Michael Buhlmann

Schülerkurs

Mathematik
> Lineare Algebra
> Lineare Gleichungen
Lineare Gleichungssysteme
> Teil I: Theorie

Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme durchziehen den Mathematikunterricht in allen Schulformen bis hin zur Oberstufe der Gymnasien. Von daher ist es wichtig und richtig, die Theorie der linearen Gleichungen und Gleichungssysteme einmal geschlossen darzustellen, wie es hier im Folgenden geschehen soll: angefangen von den linearen Gleichungen über den Gauß-Algorithmus bis hin zu den linearen Gleichungssystemen mit Parametern.
Mathematikprogramme zum Berechnen linearer Gleichungen und Gleichungssysteme sind unter www.michael-buhlmann.de > Mathematik-Programme verfügbar.

Bezeichnungen:

$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$>$	größer
$<$	kleiner
$\Rightarrow$	Folgerung
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz
$\in$	Element von
$\cap$	geschnitten
$\subset$	Teilmenge
$\|\|$	parallel
N	natürliche Zahlen
$\mathbf{N_0}$	natürliche Zahlen einschließlich der Null
R	reelle Zahlen
R.S.	Rechte Seite

Theorie

I. Lineare Gleichungen

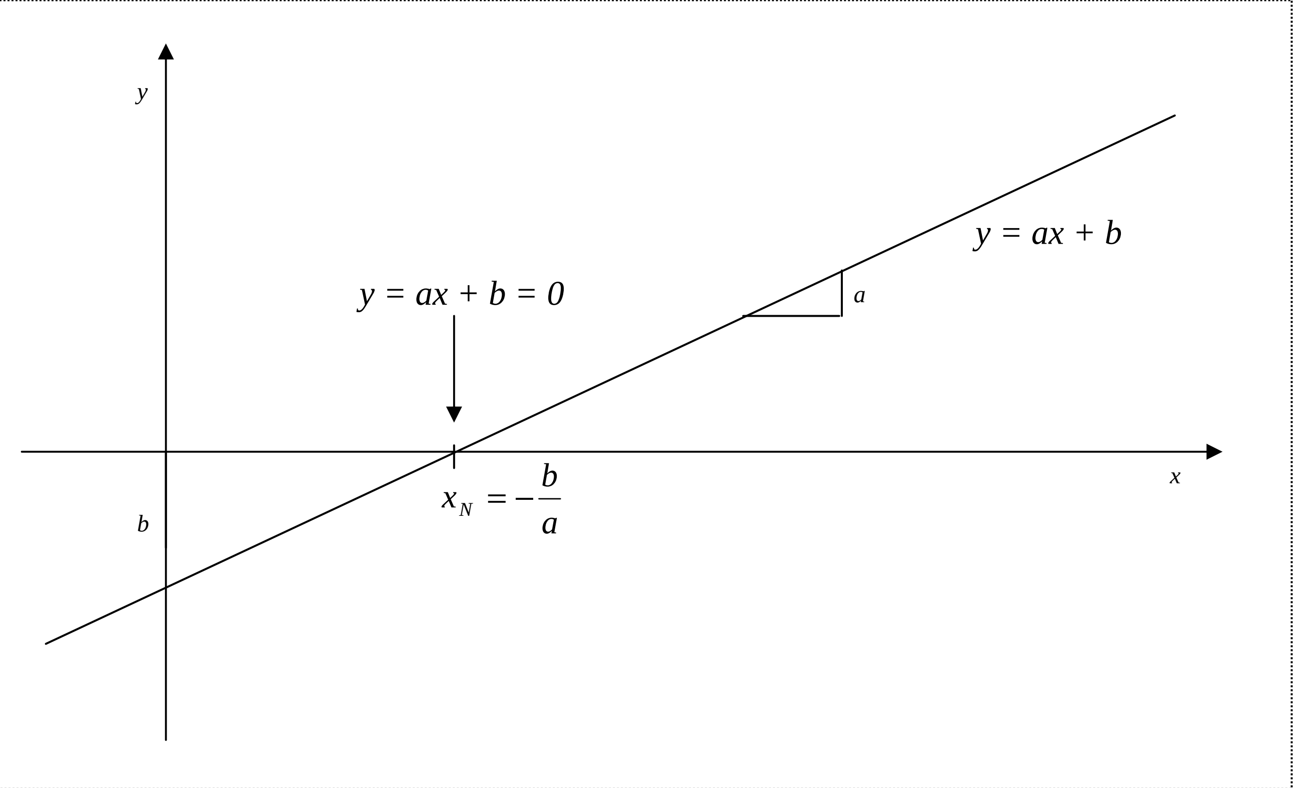
I.1 Algebra (von arabisch *al-jabru*) ist die mathematische Lehre von Rechenverknüpfungen auf Zahlenmengen, hier den reellen Zahlen. Lineare Algebra ist die Lehre von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen. Eine lineare Gleichung ist das Feststellen von Gleichheit zwischen zwei linearen Termen vom Typ *ax* + *b* für reelle Zahlen a, b und x, wobei x für eine rechnerisch zu ermittelnde Unbekannte (Variable) steht. Lineare Gleichungen haben mithin die Form:

$$ax + b = 0$$

sowie die Lösung:

$$x = -\frac{b}{a}$$

I.2 Die Lösung der linearen Gleichung $ax + b = 0$ entspricht damit grafisch der Nullstelle x_N einer Geraden $y = ax + b$ mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b, d.h.:



I.3 Das Lösen linearer Gleichungen folgt den Regeln der reellen Algebra, d.h. in den Gleichungen wird bei additiver Verknüpfung „+“ addiert und subtrahiert, bei multiplikativer Verknüpfung „·“ multipliziert und dividiert, Zahlen und Terme mit x werden zusammengefasst (Assoziativ-, Kommutativ-, Bruchgesetze), wobei Vorzeichen vor Punktrechnung, Punktrechnung vor Strichrechnung gilt. Außerdem gilt die Klammerrechnung, d.h. Klammern können gemäß den Distributivgesetzen gesetzt und aufgelöst werden. Es ergeben sich mithin die folgenden <u>Rechengesetze</u> für reelle Zahlen a, b, c, d:

$$a + 0 = a,\ a - a = 0,\ a + b = b + a,\ (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$1a = a,\ \frac{a}{a} = 1,\ a \cdot b = b \cdot a,\ (ab)c = a(bc)$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$+a = a,\ -1a = -a,\ +(+a) = a,\ +(-a) = -a,\ -(+a) = -a,\ -(-a) = a$$

$$+(a + b) = a + b,\ -(a + b) = -a - b$$

$$\frac{a}{1} = a,\ \frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n},\ n\frac{a}{b} = n + \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},\ -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

I.4 <u>Beispiele</u>: Die nachstehenden Beispiele verdeutlichen den Umgang mit linearen Gleichungen.

<table>
<tr><td>a)</td><td>7x = 49
x = 7</td><td>| :7
(Lösung)</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$
$x = \frac{3}{2}$</td><td>| ·2
(Lösung)</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>3x – 4 = 0
3x = 4
$x = \frac{4}{3}$</td><td>| +4
| :3
(Lösung)</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>12x + 24 = 0
12 x = -24
x = 2</td><td>| -24
| :2
(Lösung)</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>8 – 4x = 0
-4x = -8
x = 2</td><td>| -8
| :(-4)
(Lösung)</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>8 – 4x = 8
- 4x = 0
x = 0</td><td>| -8
| :(-4)
(Lösung)</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>14x – 7 = 21
14x = 28
x = 2</td><td>| +7
| :2
(Lösung)</td></tr>
<tr><td>h)</td><td>$\frac{1}{4}x + 3 = 0$
$\frac{1}{4}x = -3$
x = -12</td><td>| -3
| ·4
(Lösung)</td></tr>
</table>

i)	$\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}x=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$ $\frac{1}{5}x=\frac{5}{6}$ $x=\frac{5}{6}\cdot 5$ $x=\frac{25}{6}$	$\mid +\frac{1}{3}$ (Brüche addieren) $\mid \cdot 5$ (Bruchmultiplikation) (Lösung)
j)	$2x-\frac{4}{5}=-\frac{3}{2}$ $2x=-\frac{3}{2}+\frac{4}{5}$ $2x=-\frac{15}{10}+\frac{8}{10}$ $2x=-\frac{7}{10}$ $x=-\frac{7}{20}$	$\mid +\frac{4}{5}$ (Brüche addieren) | :2 (Lösung)
k)	*-11 = 4x + 5* *-16 = 4x* *4x = -16* *x = -4*	| -5 (Gleichung umdrehen) | :4 (Lösung)
l)	*5x = -12x* *17x = 0* *x = 0*	| +12x | :17 (Lösung)
m)	*3x – 2 = 2x – 3* *3x = 2x – 1* *x = -1*	| +2 | -2x (Lösung)
n)	*4 – 6x = 12 + 2x* *-8 – 6x = 2x* *-8 = 8x* *x = -1*	| -12 | +6x | :8 (Lösung)
o)	$2x-\frac{1}{2}=2+4x$ $2x-\frac{1}{2}-2=4x$ *2x – 2,5 = 4x* *-2,5 = 2x* *x = -1,25*	| -2 (Addieren) | -2x | :2 (Lösung)

p)	$3x - 9 = 9 - 3x$ $3x = 18 - 3x$ $6x = 18$ $x = 3$	| +9 | +3x | :6 (Lösung)
q)	$2(x+4) = 3(x-1) + 2$ $2x + 8 = 3x - 3 + 2$ $2x + 8 = 3x - 1$ $2x = 3x - 9$ $-x = -9$ $x = 9$	(Ausmultiplizieren) (Addieren) | -8 | -3x | ·(-1) (Lösung)
r)	$16x = 6(x-2) - 2(x-6)$ $16x = 6x - 12 - 2x + 12$ $16x = 4x$ $12x = 0$ $x = 0$	(Ausmultiplizieren) (Zusammenfassen) | -4x | :12 (Lösung)
s)	$-3(x+2) = -4(3-2x) - 5$ $-3x - 6 = -12 + 8x - 5$ $-3x - 6 = -17 + 8x$ $-3x + 11 = 8x$ $11 = 11x$ $x = 1$	(Ausmultiplizieren) (Zusammenfassen) | +17 | +3x | :11 (Lösung)
t)	$4(\frac{1}{4} - x) = 6(x - \frac{1}{2})$ $1 - 4x = 6x - 3$ $4 - 4x = 6x$ $4 = 10x$ $x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	(Ausmultiplizieren) | +3 | +4x | : 10 (Lösung)
u)	$\frac{1}{2}(x+3) = \frac{1}{4}(2-x) + \frac{1}{6}x$ $6(x+3) = 3(2-x) + 2x$ $6x + 18 = 6 - 3x + 2x$ $6x + 18 = 6 - x$ $6x = -12 - x$ $7x = -12$ $x = -\frac{12}{7}$	| ·12 (Hauptnenner-Multiplikation) (Ausmultiplizieren) (Zusammenfassen) | -18 | +x | :7 (Lösung)
v)	$5x - 8 = -4(x - \frac{1}{4})$ $5x - 8 = -4x + 1$ $5x = -4x + 9$ $9x = 9$ $x = 1$	(Ausmultiplizieren) | +8 | +4x | :9 (Lösung)

w)	$\frac{x}{6}-2=\frac{x}{4}+6$	| ·12 (Hauptnenner-Multiplikation)
	2x – 24 = 3x + 72	| +24
	2x = 3x +96	| -3x
	-x = 96	| ·(-1)
	x = -96	(Lösung)
x)	$\frac{1}{8}(2x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4})-\frac{5}{16}$	| ·16 (Hauptnenner-Multiplikation)
	$2(2x+\frac{1}{2})=8(x-\frac{1}{4})-5$	(Ausmultiplizieren)
	4x + 1 = 8x – 2 - 5	(Zusammenfassen)
	4x + 1 = 8x – 7	| +7
	4x + 8 = 8x	| -4x
	8 = 4x	| :4
	x = 2	(Lösung)

I.5 Wir erkennen beim Lösen der linearen Gleichungen noch folgende Vorgehensweise und folgende Regeln:

I. Bei Gleichungen mit Brüchen: Multiplikation mit dem Hauptnenner der auftretenden Brüche (Äquivalenzumformung).
II. Zusammenfassen der Terme mit x und der Zahlen jeweils auf der linken und rechten Seite der Gleichung unter Verwendung der Rechenregeln (Termumformungen).
III. Gleichungsaddition und -subtraktion der zusammengefassten Terme mit x und der Zahlen, so dass die Terme mit x auf der einen, die Zahlen auf der anderen Seite der Gleichung zu liegen kommen (Äquivalenzumformung).
IV. Teilen der Gleichung durch die Zahl, die im x-Term multiplikativ mit x verbunden ist. Die Unbekannte x entspricht nun der Zahl auf der gegenüberliegenden Seite der Gleichung (Äquivalenzumformung).

Um also an das x in einer Gleichung „heranzukommen“, wird in der Gleichung bei Äquivalenzumformungen algebraisch „umgekehrt“ verfahren, also: Strichrechnung vor Punktrechnung (Gleichungsadditionen und -subtraktionen vor -multiplikationen und -divisionen) sowie: Gleichungsaddition bei Termen mit „-“-Vorzeichen, -subtraktion bei Termen mit „+“-Vorzeichen, -multiplikation bei Termen mit „geteilt“, -division bei multiplikativen Termen. Auch können die Seiten einer Gleichung vertauscht werden. Es gelten etwa die Regeln:

a)	$ax+b=c$	| –b
	$ax=c-b$	
b)	$ax-b=c$	| +b
	$ax=c+b$	
c)	$\frac{x}{a}=b$	| ·a
	$x=ab$	
d)	$ax=b$	| :a (a≠0)
	$x=\frac{b}{a}$	

I.6 Das Folgende verdeutlicht die Art der Gleichungsumformungen noch einmal:

<u>Regeln</u>:	<u>Beispiele</u>:	
a) Gleichungen vom Typ $ax+b = c$ werden gelöst wie folgt: 1) Subtraktion von b 2) Division durch a	$7x + 2 = 16$ $7x = 14$ $x = 2$	| -2 | :7
	$12x - 28 = 8$ $12x = 36$ $x = 3$	| +28 | :12
	$76 = 3x - 5$ $81 = 3x$ $x = 27$	| +5 | :3
b) Gleichungen vom Typ $ax+b = c+dx$ werden gelöst wie folgt: 1) Subtraktion von b 2) Subtraktion von dx 3) Zusammenfassen der x 4) Division durch die Zahl vor dem x	$10x + 20 = 40 - 10x$ $10x = 20 - 10x$ $20x = 20$ $x = 1$	| -20 | +10x | :20
	$5x - 12 = 3x + 8$ $5x = 3x + 20$ $2x = 20$ $x = 10$	| +12 | -3x | :2
	$-4x + 24 = x + 4$ $-4x = x - 20$ $-5x = -20$ $x = 4$	| -24 | -x | :(-5)
	$3x + 7 = -4x + 112$ $3x = -4x + 105$ $7x = 105$ $x = 15$	| -7 | +4x | :7
	$-6x - 17 = -9x - 2$ $-6x = -9x + 15$ $3x = 15$ $x = 5$	| +17 | +9x | :3
c) Gleichungen mit <u>Klammern</u>, die zuvor aufgelöst werden müssen gemäß den Regeln: $a(bx+c) = abx + ac$ $-a(bx+c) = -abx - ac$ Vorzeichen ändern sich auf Grund von: $+ \cdot + = +$ $+ \cdot - = -$ $- \cdot + = -$ $- \cdot - = +$	$2 - (2x + 5) = -30$ $2 - 2x - 10 = -30$ $-8 - 2x = -30$ $-2x = -22$ $x = 11$	Klammern auflösen Zusammenfassen | +8 | :(-2)
	$87 + 2\cdot(8x - 7) = 105$ $87 + 16x - 14 = 105$ $73 + 16x = 105$ $16x = 32$ $x = 2$	Klammern auflösen Zusammenfassen | -73 | :16
	$-4\cdot(3x - 12) = -6x$ $-12x + 48 = -6x$ $48 = 6x$ $x = 8$	Klammern auflösen | +12x | :6

	$8 + 10\cdot(4x - 9) = 198$ $8 + 40x - 90 = 198$ $-82 + 40x = 198$ $40x = 280$ $x = 7$	Klammern auflösen Zusammenfassen $\mid +82$ $\mid :40$
	$10 - 9\cdot(x + 3) = -10x + 6$ $10 - 9x - 27 = -10x + 6$ $-17 - 9x = -10x + 6$ $-9x = -10x + 23$ $x = 23$	Klammern auflösen Zusammenfassen $\mid +17$ $\mid +10x$
d) Divisionsgleichungen von der Form $x:a = b:c$ werden gelöst wie folgt: 1) Multiplikation mit a 2) Ausrechnen des Divisionsterms Divisionsgleichungen von der Form $a:x = b:c$ werden gelöst wie folgt: 1) Multiplikation mit x 2) Multiplikation mit c 3) Division durch b 4) Ausrechnen	$x:12 = 40:3$ $x = (40\cdot12):3$ $x = 160$	$\mid \cdot12$ Ausrechnen
	$4x:3 = 24$ $4x = 72$ $x = 18$	$\mid \cdot3$ $\mid :4$
	$2:x = 40:20$ $2 = 40:20\cdot x$ $40 = 40x$ $x = 1$	$\mid \cdot x$ $\mid \cdot20$ $\mid :40$
	$16:x = 18:36$ $16 = 18:36\cdot x$ $16\cdot36 = 18x$ $16\cdot2 = x$ $x = 32$	$\mid \cdot x$ $\mid \cdot36$ $\mid :18$ Ausrechnen

I.7 Zum Ergebnis x einer linearen Gleichung kann auch eine <u>Lösungsmenge</u> **L** = {x} angegeben werden. Letzteres gilt im bisher behandelten Fall der <u>eindeutigen Lösbarkeit</u> einer Gleichung. Doch sind auch <u>keine Lösungen</u> oder <u>unendlich viele Lösungen</u> möglich, also: **L** = { } (= $\emptyset$; leere Menge) bzw.: **L** = **R**.

I.8 <u>Beispiele</u>: Wir bestimmen zu den folgenden linearen Gleichungen die Lösungsmenge:

a)	$12(x-2) = 4(x+3)$ $12x - 24 = 4x + 12$ $8x - 24 = 12$ $8x = 36$ $x = 4{,}5$	(Ausmultiplizieren) $\mid -4x$ $\mid +24$ $\mid :8$ (Lösungsmenge:) **L** = {4,5}
b)	$7x + 2 - 3x = 12 - 4x - 2$ $4x + 2 = 10 - 4x$ $8x + 2 = 10$ $8x = 8$ $x = 1$	(Zusammenfassen) $\mid +4x$ $\mid -2$ $\mid :8$ (Lösungsmenge:) **L** = {1}
c)	$3x + 5 = 3x - 14$ $5 = -14$	$\mid -3x$ (falsche Aussage, Lösungsmenge:) **L** = { }
d)	$3(x-2) + 6 = 3x$ $3x - 6 + 6 = 3x$ $3x = 3x$ $0 = 0$	(Ausmultiplizieren) (Zusammenfassen) $\mid -3x$ (allgemein gültige Aussage, Lösungsmenge:) **L** = **R**

e)	$-3x + 4(1-x) = -7(x+1) + 11$ $-3x + 4 - 4x = -7x - 7 + 11$ $-7x + 4 = -7x + 4$ $4 = 4$	(Ausmultiplizieren) (Zusammenfassen) | +7x (allgemein gültige Aussage, Lösungsmenge:) **L** = **R**
f)	$9x - 26 = 9(x-26) + 76$ $9x - 26 = 9x - 234 + 76$ $9x - 26 = 9x - 158$ $-26 = -158$	(Ausmultiplizieren) (Zusammenfassen) | -9x (falsche Aussage, Lösungsmenge:) **L** = { }
g)	$5(x-5) + 8 = 4x - 12$ $5x - 25 + 8 = 4x - 12$ $5x - 17 = 4x - 12$ $x - 17 = -12$ $x = 5$	(Ausmultiplizieren) (Zusammenfassen) | -4x | +17 (Lösungsmenge:) **L** = {5}

I.9 <u>Aufgaben</u>: Bestimme die Lösung (Lösungsmenge) der folgenden linearen Gleichungen:

a) $4x = 7$

b) $3x + 7 = 46$

c) $34x + 12 = 104 - 12x$

d) $11x + 3 - 3x = -15 + 5x$

e) $23x + 28 - 4x + 12 = 2x + 130 - 13x$

f) $12x - (9 - 6x) = 2x - 1$

g) $2(x+2) - 10 = 5x - 7 - 3x$

h) $4(x-3) - 3(x-4) = 2(x+12)$

i) $\frac{1}{2}(2x+6) = 5x + 9 - 7x$

j) $\frac{x-4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4}$

k) $4x + \frac{x}{4} = \frac{x+4}{4} + 4$

l) $3(x-8) + \frac{x+3}{8} = 2 - \frac{1}{3}(x+5)$

II. Lineare Gleichungen mit Parameter

II.1 <u>Lineare Gleichungen mit Parameter</u> sind Gleichungen, in denen neben der Unbekannten x ein/mehrere beliebige/r feste/r reelle/r Parameter a, k, t o.a. vorkommt/vorkommen. Für das Errechnen der Variable x gelten mithin dieselben Regeln wie bei den linearen Gleichungen ohne Parameter.

II.2 <u>Beispiele</u>: a) Mit dem Parameter k gelten die Umformungen der folgenden linearen Gleichung mit der Variablen x:

$2x + 6 + k = 3k$ | -k
$2x + 6 = 2k$ | -6
$2x = 2k - 6$ | :2
$x = k - 3$ (Lösungsmenge:) **L** = {k-3}

b) Mit Parameter t und Variable x ergibt sich:

$tx - 5x + t = 5$ (Ausklammern)
$x(t-5) + t = 5$ | -t
$x(t-5) = 5 - t$ | :(t-5) für t–5≠0, d.h.: t≠5
$x = \frac{5-t}{t-5} = -\frac{t-5}{t-5} = -1$

Da wir bei t–5 nicht durch 0 teilen dürfen, haben wir t–5≠0, also t≠5 vorausgesetzt. Lösungsmenge ist hierbei: $\mathbf{L}_{t\neq 5}$ = {-1}. Neben dem Fall t≠5 ist allerdings noch der Fall t=5 zu betrachten. Hier gilt, wenn wir t=5 in die Gleichung $x(t-5) = 5 - t$ einsetzen:

$x \cdot 0 = 0$
$0 = 0$

$0 = 0$ ist eine allgemeingültige Aussage, deswegen ist die Gleichung im Fall t=5 für alle x erfüllt. Lösungsmenge ist hier: $\mathbf{L}_{t=5} = \mathbf{R}$.

c) Parameter sei im Folgenden a, die Variable heißt x:

$ax + x + 1 = a^2$ (Ausklammern)
$(a+1)x + 1 = a^2$ | -1
$(a+1)x = a^2 - 1$

Fall 1: $a+1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$:

$(a+1)x = a^2 - 1$ | :(a+1)

$x = \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)} = a-1$ (Lösungsmenge:) $\mathbf{L}_{a\neq-1} = \{a-1\}$

Fall 2: a=-1:

$(-1+1)x = (-1)^2 - 1$
$0x = 0$
$0 = 0$ (Lösungsmenge:) $\mathbf{L}_{a=-1} = \mathbf{R}$

II.3 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungen mit Parameter a, k oder t:

a) $4x + a = 2a$
b) $7x + 2t = 21 - 5t$
c) $ax + 5 = x + a$
d) $k^2(x+4) = x(2k-1) + 4$
e) $kx(k-1) - 3(2x-1) = k$
f) $\frac{1}{t}x + 4t = -\frac{1}{t^2}x$, $t \neq 0$

III. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

III.1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen x und y und den reellen Konstanten a_1,b_1,c_1, a_2,b_2,c_2 bestehen aus zwei linearen Gleichungen (I, II) dergestalt, dass gilt:

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ (I)}$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \text{ (II)}$$

Das lineare Gleichungssystem hat auf der Seite rechts der Gleichheitszeichen, der rechten Seite, Zahlen ohne Unbekannte, auf der linken Seite (lineare) Terme mit den Unbekannten. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x und y ergeben sich die Vorgehensweisen: Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren (einschließlich des Subtraktionsverfahrens).

III.2 Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen sind bzw. werden nach derselben Variablen aufgelöst, die zwei Ausdrücke, die diese Variable darstellen, werden gleichgesetzt. Dann wird die daraus entstandene Gleichung nach der anderen Variablen aufgelöst, die Lösung in eine der nach der ersten Variablen aufgelösten Gleichung eingesetzt, um die zweite Variable zu errechnen.
Konkreter gilt für ein Gleichungssystem der Form:

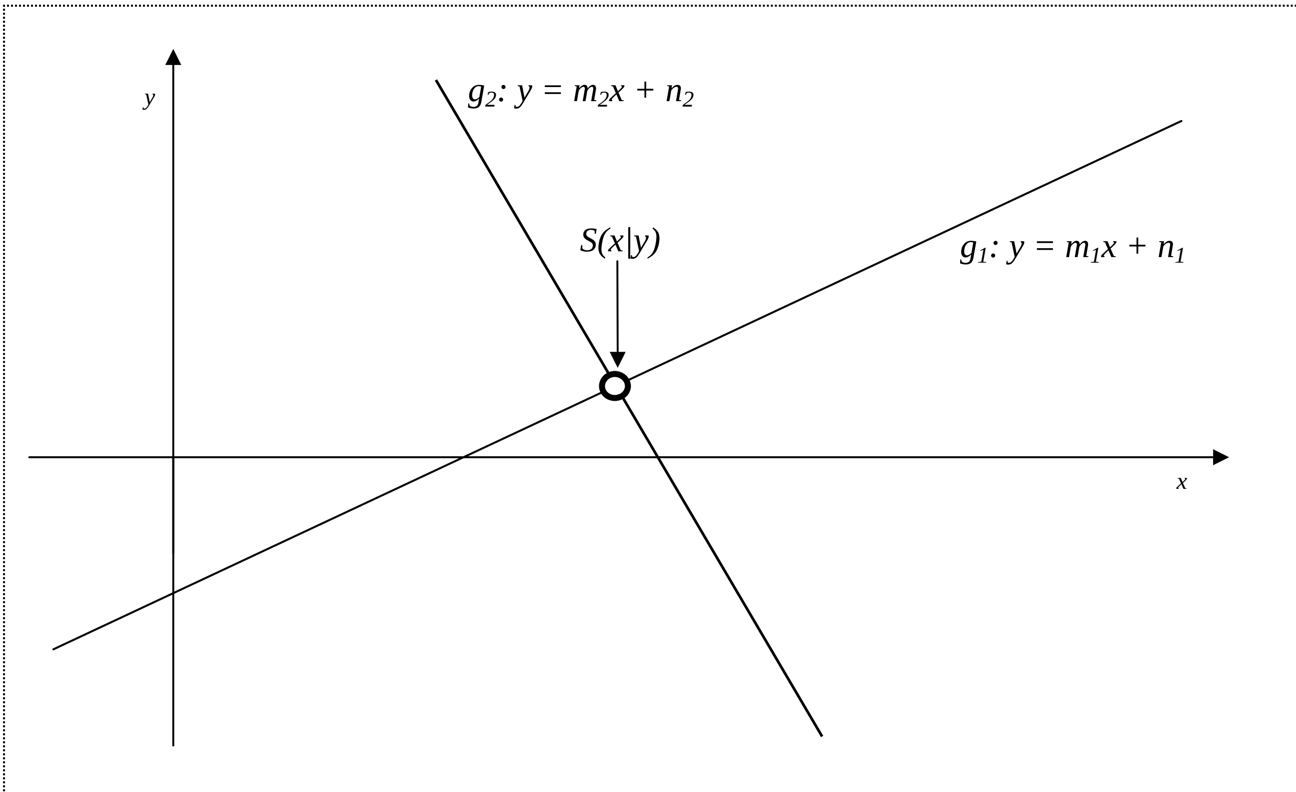
$$y = m_1x + n_1$$
$$y = m_2x + n_2$$

mit reellen Zahlen m_1, m_2, n_1, n_2 die Gleichsetzung:

$$m_1x + n_1 = m_2x + n_2$$

Die Gleichung in x kann nach x aufgelöst, das errechnete x in $y = m_1x + n_1$ oder in $y = m_2x + n_2$ zur Bestimmung von y eingesetzt werden. Analoges gilt, wenn die Rollen von x und y vertauscht sind.

III.3 Die <u>Lösungsmenge</u> eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen besteht im Fall der Eindeutigkeit aus einem Paar reeller Zahlen oder einem zweidimensionalen Punkt (x|y): **L** = {(x|y)}.
Ausdrücke der Form $y = mx + n$ können wir zudem als Geraden mit Steigung m und y-Achsenabschnitt n interpretieren, so dass das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen mit dem Errechnen des Schnittpunktes S(x|y) zweier Geraden g_1: $y = m_1x + n_1$ und g_2: $y = m_2x + n_2$ identifiziert werden kann.



III.4 <u>Beispiele</u>: a) Wir verwenden das Gleichsetzungsverfahren zur Lösung des nächstehenden linearen Gleichungssystems:

$x - 7 = y + 3$	| +7
$2x = 4y - 10$	| :2
$x = y + 10$	I
$x = 2y - 5$	II (Gleichsetzen I = II)
$x = y + 10$	I
$y + 10 = 2y - 5$	| -y
$x = y + 10$	I
$10 = y - 5$	| +5
$x = y + 10$	I
$y = 15$	II (Einsetzen von x in I)
$x = 15 + 10 = 25$	
$y = 15$	(Lösung:) $x = 25, y = 15$
	(Lösungsmenge:) **L** = {(25|15)}

b) Der Schnittpunkt der beiden Geraden g_1: $y = 2x + 5$ und g_2: $y = 17 – x$ soll bestimmt werden. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$y = 2x + 5$ $y = 17 – x$	I II (Gleichsetzen I = II)
$y = 2x + 5$ $2x + 5 = 17 – x$	 | +x
$y = 2x + 5$ $3x + 5 = 17$	 | -5
$y = 2x + 5$ $3x = 12$	 | :3
$y = 2x + 5$ $x = 4$	I II (Einsetzen von x in I)
$y = 2\cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$ $x = 4$	 (Lösung:) $x = 4, y=13$

Schnittpunkt der beiden Geraden ist also: S(4|13).

c) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem, das nach Umstellen der beiden Gleichungen nach y durch das Gleichsetzungsverfahren gelöst wird:

$x + y = 24$ $4x – 2y = -120$	I | -x (Auflösen nach y) II
$y = 24 – x$ $4x – 2y = -120$	I II | -4x (Auflösen nach y)
$y = 24 – x$ $-2y = -120 – 4x$	 | :(-2)
$y = 24 – x$ $y = 60 + 2x$	I II (Gleichsetzen I = II)
$y = 24 – x$ $24 – x = 60 + 2x$	 | +x
$y = 24 – x$ $24 = 60 + 3x$	 | -60
$y = 24 – x$ $-36 = 3x$	 | :3
$y = 24 – x$ $x = -12$	I II (Einsetzen von x in I)
$y = 24 – (-12) = 24+12 = 36$ $x = -12$	 (Lösung:) $x = -12, y = 36$ (Lösungsmenge:) **L** = {(-12|36)}

III.5 <u>Aufgaben</u>: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gleichsetzungs-verfahren:

a) $y = 2x + 5$
$y = -x +8$

b) $x = 5y + 3$
$2x = 12y$

c) $y + 4 = x + 3$
$2y = x + 5$

d) $2(x+1) = 5(y–12) + 8y + 17$
$6x = 5y + 3(y–3) + 29$

III.6 <u>Einsetzungsverfahren</u>: Eine Gleichung ist hier nach einer Variablen aufzulösen, diese Variable wird in die andere Gleichung einsetzen, so dass die Lösung dieser Gleichung mit nur einer Variablen ermittelt werden kann. Anschließend ist die gefundene Lösung in die Gleichung für die aufgelöste Variable einzusetzen.
Konkreter gilt für ein Gleichungssystem der Form:

$$y = m_1x + n_1$$
$$x = m_2y + n_2$$

mit reellen Zahlen m_1, m_2, n_1, n_2 die Einsetzung:

$$y = m_1(m_2y + n_2) + n_1 ,$$

so dass sich gemäß den Umformungen: $y = m_1(m_2y + n_2) + n_1 \Leftrightarrow y = m_1m_2y + m_1n_2 + n_1 \Leftrightarrow y - m_1m_2y = m_1n_2 + n_1 \Leftrightarrow y(1 - m_1m_2) = m_1n_2 + n_1$ als Lösungen ergeben ($m_1m_2 \neq 1$):

$$y = \frac{m_1n_2 + n_1}{1 - m_1m_2},\ x = m_2 \cdot \frac{m_1n_2 + n_1}{1 - m_1m_2} + n_2$$

III.7 <u>Beispiele</u>: a) Wir verwenden das Einsetzungsverfahren zur Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$y = 8x - 5$ $x = 5y - 1$	I II (Einsetzen von x in I)
$y = 8(5y-1) - 5$ $x = 5y - 1$	I (Ausrechnen) II
$y = 40y - 8 - 5$ $x = 5y - 1$	I (Zusammenfassen) II
$y = 40y - 13$ $x = 5y - 1$	| -39y
$-39y = -13$ $x = 5y - 1$	| :(-39) II
$y = \frac{1}{3}$ $x = 5y - 1$	I (Einsetzen von y in II) II
$y = \frac{1}{3}$ $x = 5 \cdot \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}$	(Lösung:) $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ (Lösungsmenge:) **L** = $\left\{\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)\right\}$

b) Analog gilt nach Gleichungsumformungen:

$2x + 4y = 8$ $-x + 3y = 1$	I II | -3y
$2x + 4y = 8$ $-x = 1 - 3y$	 | ·(-1)
$2x + 4y = 8$ $x = -1 + 3y$	I II (Einsetzen von x in I)
$2\cdot(-1+3y) + 4y = 8$ $x = -1 + 3y$	I II
$-2 + 6y + 4y = 8$ $x = -1 + 3y$	| +2
$10y = 10$ $x = -1 + 3y$	| :10 II (Einsetzen von y in II)
$y = 1$ $x = -1 + 3y$	I (Einsetzen von y in II) II
$y = 1$ $x = -1 + 3\cdot 1 = 2$	(Lösung:) $x=2,\ y=1$ (Lösungsmenge:) **L** = {(2|1)}

III.8 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Einsetzungsverfahren:

a) $y = 4x - 29$
$2x + y = 19$

b) $5x = 7 - 2y$
$10x - 3y = 49$

c) $2y = 2x - 16$
$7x = 23 - 4y$

d) $y = 5x - 3$
$12x + 3y + 10 = 2(y-3)$

III.9 Additionsverfahren: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen. Genauer haben wir das lineare Gleichungssystem mit den folgenden Umformungen

$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	I | $\cdot b_2$ II | $\cdot(-b_1)$
$b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1$ $-b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2$	I II (Addition I + II)
$b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1$ $(b_2a_1-b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2$	I II | $:(b_2a_1-b_1a_2) \neq 0$
$b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1$ $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$	I II (Einsetzen in I)
$b_2a_1\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2} + b_2b_1y = b_2c_1$ $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$	I (Auflösen nach y) II
$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_2a_1 - b_1a_2}$ $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$	I II

Im Falle des linearen Gleichungssystems

$$a_1x + by = c_1$$
$$a_2x + by = c_2$$

lässt sich das Subtraktionsverfahren als Spezialfall des Additionsverfahrens anwenden (mit reellem b). Subtraktion der beiden linearen Gleichungen ergibt:

$$(a_1-a_2)x = c_1 - c_2 \text{ ,}$$

was Ausgangspunkt für die weiteren Umformungen des linearen Gleichungssystems ist.

III.10 Beispiele: a) Wir lösen mit dem Additionsverfahren:

$3x - 4y = 20$ $-4x + 6y = -24$	I | $\cdot 4$ II | $\cdot 3$
$12x - 16y = 80$ $-12x + 18y = -72$	I II (Addition I + II)
$3x - 4y = 20$ $2y = 8$	I II | :2
$3x - 4y = 20$ $y = 4$	I II (Einsetzen in I)

$3x - 4 \cdot 4 = 20$ $y = 4$	I | +16 II
$3x = 36$ $y = 4$	I | :3 II
$x = 12$ $y = 4$	 (Lösung:) $x=12,\ y=4$ (Lösungsmenge:) **L** = {(12|4)}

b) Ebenfalls nach dem Additionsverfahren gehen wir bei dem folgenden linearen Gleichungssystem vor:

$5x + 4 + 2y = 10$ $4x - 3 + 3y = -1$	| -4 | +3
$5x + 2y = 6$ $4x + 3y = 2$	I | ·3 II | ·(-2)
$15x + 6y = 18$ $-8x - 6y = -4$	I II (Addition I + II)
$5x + 2y = 6$ $7x = 14$	I II | :7
$5x + 2y = 6$ $x = 2$	I II (Einsetzen von x in I)
$5 \cdot 2 + 2y = 6$ $x = 2$	I II
$2y = -4$ $x = 2$	I | :2 II
$y = -2$ $x = 2$	 (Lösung:) $x=2,\ y=-2$ (Lösungsmenge:) **L** = {(2|-2)}

III.11 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Additionsverfahrens (bzw. auch Subtraktionsverfahrens):

a) $4x + 3y = 10$
$7x - 3y = 56$

b) $5x + 8y = 29$
$7x + 5y = 53$

c) $4x - 9 + 2y = x + 8$
$3x + 12 = 37 - 4y$

d) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$
$\frac{4}{x} - \frac{7}{y} - 1 = -10$

Zur letzten Aufgabe ist zu sagen, dass wir die dort auftretenden Kehrwerte durch neue Variablen x' und y' ersetzen mit: $x' = \frac{1}{x},\ y' = \frac{1}{y}$ und somit ein „normales" lineares Gleichungssystem erhalten. Die Kehrwerte von dessen Lösungen sind die Lösungen x, y des ursprünglichen Gleichungssystems (Substitution).

III.12 Wie lineare Gleichungen können auch lineare Gleichungssysteme verschiedene Arten von Lösungen haben (Lösbarkeit). Eine falsche Aussage führt zur Unlösbarkeit, eine allgemein gültige zur mehrdeutigen Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems mit unendlich vielen Lösungen. Im letzten Fall muss ein Parameter eingeführt werden. Der reelle Parameter, z.B. t, ist dann gleich der einen Variable, die andere Variable befindet sich (meist) auch in linearer Abhängigkeit zum Parameter.
Wir beachten die Situation, dass bei mehrdeutiger Lösung das lineare Gleichungssystem aus nur einer Gleichung mit zwei Unbekannten besteht (die zweite Gleichung ist von der

Form $0 = 0$). Dann gilt:

$ax + by = c$	(Einführen des Parameters: y = t)
$ax + by = c$ $y = t$	(Einsetzen in die Ursprungsgleichung)
$ax + bt = c$ $y = t$	(Auflösen nach x; a≠0)
$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}t$ $y = t$	(Lösung:) $x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}t$, $y = t$ (Lösungsmenge:) **L** = $\left\{\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}t \mid t\right) \mid t \in R\right\}$

III.13 <u>Beispiele</u>: Wir bestimmen zu den folgenden linearen Gleichungssystemen die Lösungsmenge:

a)	$2x + 5y = 8$ $4x + 10y = 16$	| ·(-2)
	$-4x – 10y = -16$ $4x + 10y = 16$	(Addition der Gleichungen)
	$2x + 5y = 8$ $0 = 0$	
	$2x + 5y = 8$ $y = t$	(Einsetzen in Ursprungsgleichung)
	$2x + 5t = 8$ $y = t$	(Auflösen nach x) | -5t
	$2x = 8 – 5t$ $y = t$	| :2
	$x = 2 – 2,5t$ $y = t$	(Lösungsmenge:) **L** = {(2-2,5t|t)| tϵ**R**}
b)	$12(x-5) = 3(y+5)$ $3(x+4) = 4(y-12)$	| :3
	4(x-5) = y + 5 $3(x+4) = 2(2y-9)$	(Ausmultiplizieren)
	4x – 20 = y +5 3x + 12 = 4y – 18	| -y, +20 | -4y, -12
	4x – y = 25 $3x – 4y = -30$	| ·(-4)
	$-16x + 4y = -100$ $3x – 4y = -30$	(Addition der Gleichungen)
	$4x – y = 25$ $-13x = -130$	| :(-13)
	$4x – y = 25$ $x = 10$	(Einsetzen in die andere Gleichung)
	$40 – y = 25$ $x = 10$	| -40, ·(-1)
	$y = 15$ $x = 10$	(Lösungsmenge:) **L** = {(10|15)}

c)		
	$2(x+1) + 3(y+2) = 20$ $4(2-x) - 6(y-2) = -12$	(Klammern auflösen)
	$2x + 2 + 3y + 6 = 20$ $8 - 4x - 6y + 12 = -12$	(Zusammenfassen)
	$2x + 3y = 12$ $-4x - 6y + 20 = -12$	$\| -20$
	$2x + 3y = 12$ $-4x - 6y = -32$	$\| \cdot 2$
	$4x + 6y = 24$ $-4x - 6y = -32$	(Addition der Gleichungen)
	$4x + 6y = 24$ $0 = -8$	(falsche Aussage, Lösungsmenge:) **L** = { }

III.14 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

a) $4x + 12y = -8$ $-2x + 20y = -22$	b) $5(x-3) + 6(y-7) = 0$ $25x - 7(y-2) = 40$
c) $4(2x+3) - 3(2y-3) = 17$ $-8(x-y) + 10(x+y) = 38$	d) $4x - 3y = 20 - 80x$ $8x = 18y - 4$
e) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ $\frac{1}{4}x + \frac{1}{10}y = \frac{5}{4}$	f) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{12}$ $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = \frac{1}{3}$
g) $\frac{x-2y}{3} + \frac{2-x}{5} = \frac{x}{6}$ $2x + 4y = 6$	h) $\frac{1}{9}(x+9) + \frac{y}{6} = 21$ $\frac{x}{8} + \frac{1}{10}(y-20) = 10$
i) $4(x-2y+3) - 3(x+y-7) = 15(2y-3)$ $2(x+y) + 4(2x-8) = 12(4x-7y-1)$	j) $\frac{x}{8} + \frac{x+2y}{4} + \frac{y}{16} = 3$ $\frac{y}{10} - \frac{y-x}{8} + \frac{x}{4} = 3$

IV. Gauß-Algorithmus: Lineare Gleichungssysteme

IV.1 Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$
\begin{array}{lr}
a_{11}x_1 + b_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\
\ldots & \\
a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & (m)
\end{array}
$$

mit den reellen Variablen $x_1, \dots x_n$, den reellen Koeffizienten $a_{11}, \dots a_{mn}$ und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) $b_1, \dots b_m$.
Das lineare Gleichungssystem lässt sich dann in Matrixdarstellung mit Koeffizientenmatrix A, Lösungsvektor $\vec{x}$ und Ergebnisvektor $\vec{b}$ darstellen als:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

In abgekürzter Matrixdarstellung (unter Vernachlässigung des Lösungsvektors) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$(A|\vec{b})$$

oder:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Für die Koeffizientenmatrix A heißt $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$ die Hauptdiagonale der Matrix. A besitzt Dreiecksgestalt, wenn unterhalb der Hauptdiagonalen alle Matrixelemente den Wert 0 haben. A hat Diagonalgestalt, wenn außerhalb der Hauptdiagonalen alle Matrixelemente den Wert 0 haben. Im Falle von Dreiecks- oder Diagonalgestalt der Koeffizientenmatrix lässt sich dann die Lösung $(x_1, \dots x_n)$ leicht bestimmen, im anderen Fall sind Koeffizientenmatrix und Ergebnisvektor $(b_1, \dots b_m)$ so umzuformen, dass eine Dreiecks- oder Diagonalgestalt der Koeffizientenmatrix entsteht. Dies ist der Inhalt des Gauß-Algorithmus.
Das lineare Gleichungssystem heißt homogen, wenn $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ gilt, ansonsten inhomogen. Ist n = m, so heißt das Gleichungssystem quadratisch (wegen der quadratischen Gestalt der Koeffizientenmatrix).

IV.2 Wir betrachten zunächst den Fall eindeutiger Lösbarkeit, der nur dann gegeben ist, wenn das Gleichungssystem aus n Gleichungen und n Unbekannten (also: n = m) besteht, also quadratisch ist. Zur Lösung solcher linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gauß-Algorithmus (Gaußsches Eliminationsverfahren), d.h. die folgende Vorgehensweise:

1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht einer Zeile, eine Unbekannte einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-, Ergebnis-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten sei identisch. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*)). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile

3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. 3) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Dreiecksgestalt gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement a≠0 und dem Element b der rechten Seite: az = b ⇔ z = b/a. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement c≠0, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: cy+dz = e ⇔ cy = e – (db)/a ⇔ y = e/c – (db)/(ac) / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Der Gauß-Algorithmus ist damit ein verallgemeinertes Additionsverfahren, wie wir es bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten kennen gelernt haben. Die obige Vorgehensweise erzeugt dabei eine Koeffizientenmatrix in Dreiecksgestalt. Wird in den Schritten 2, 3 … die Subtraktion des Vielfachen der Zeile 2, 3 … auch auf die entsprechenden Vielfachen der vorhergehenden Zeilen ausgedehnt, so erhält man automatisch die Diagonalgestalt der Koeffizientenmatrix.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir schließlich davon ausgehen, dass alle Koeffizienten und rechten Seiten des linearen Gleichungssystems ganzzahlig sind (Ganzzahligkeit). Sollten nämlich in Gleichungen Brüche auftreten, so sind die Gleichungen mit dem Hauptnenner zu multiplizieren. Zudem kann jede lineare Gleichung in die Form $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, i = 1, …m, gebracht werden, etwa durch Auflösen von Klammern, Zusammenfassen von Termen und Gleichungsadditionen und -subtraktionen. Was schließlich die Subtraktion des Vielfachen der unverändert bleibenden (Bezugs-) Zeile zum Vielfachen einer anderen Zeile anbetrifft, so spielt hier das kleinste gemeinsame Vielfache von Diagonalelement und Spaltenelement oberhalb oder unterhalb des Diagonalelements eine wichtige Rolle. All dies geht aus dem Folgenden hervor.

IV.3 Beispiele: Im Folgenden werden lineare Gleichungssysteme auf Dreiecksgestalt gebracht, die Gleichungssysteme dabei in Matrixdarstellung wiedergegeben.

a) Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

2x + 3y = 8
-x + 4y = 7

▶ Matrixdarstellung (mit durchnummerierten Zeilen):

x	*y*	*rechte Seite*	
2	3	8	← (unveränderte Bezugszeile (1))
-1	4	7	2·(*2*) + (*1*) (Zeilenaddition)
2	3	8	
0	11	22	▶ Lösungen:

11y = 22 ⇔ y = 2
2x + 3·2 = 8 ⇔ 2x = 2 ⇔ x=1

▶ Lösungsmenge: **L** = {(1|2)}

b) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

x + y = 1
x – z = -1
x + y + z = -2

▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*rechte Seite*	
1	1	0	1	← (Bezugszeile (1))
1	0	-1	-1	(*2*) – (*1*) (Zeilenaddition)
1	1	1	-2	(*3*) – (*1*) (Zeilenaddition)

1	1	0	1	
0	-1	-1	-2	◄ (Bezugszeile (2))
0	0	1	-3	(*3*) + (*2*) (Zeilenaddition)

▶ Lösungen:

z = -3

-y – (-3) = -2 ⇔ -y = -5 ⇔ y= 5

x + 5 = 1 ⇔ x = -4

▶ Lösungsmenge: **L** = {(-4|5|-3)}

c) Lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten:

x + 2y – z + 2w = -6

2x – y +3z – w = 18

3x – 3y + z + w = 20

-x + y – 4y + 5z = -12 ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*w*	*rechte Seite*	
1	2	-1	2	-6	◄ (Bezugszeile (1))
2	-1	3	-1	18	(*2*) – 2·(*1*)
3	-3	1	1	20	(*3*) – 3·(*1*)
-1	1	-4	5	-12	(*4*) + (*1*)
1	2	-1	2	-6	
0	-5	5	-5	30	:5 (Vereinfachung)
0	-9	4	-5	38	
0	3	-5	7	-18	
1	2	-1	2	-6	
0	-1	1	-1	6	◄ (Bezugszeile (2))
0	-9	4	-5	38	(*3*) – 9·(*2*)
0	3	-5	7	-18	(*4*) + 3·(*2*)
1	2	-1	2	-6	
0	-1	1	-1	6	
0	0	-5	4	-16	◄ (Bezugszeile (3))
0	0	-2	4	0	5·(*4*) – 2·(*3*)
1	2	-1	2	-6	
0	-1	1	-1	6	
0	0	-5	4	-16	
0	0	0	8	48	▶ Lösungen:

8w = 48 ⇔ w = 6

-5z + 4·6 = -16 ⇔ -5z = -40 ⇔ z = 8

-y + 8 – 6 = 6 ⇔ -y = 4 ⇔ y = -4

x + 2·(-4) – 8 +2·6 = -6 ⇔ x – 8 +8 + 12 = -6 ⇔ x = -18

▶ Lösungsmenge: **L** = {(-18|-4|8|6)}

Im vorangehenden Beispiel wurde die Zeile (2), mit der im 2. Schritt gerechnet werden sollte, zunächst vereinfacht, um bei den auftretenden Multiplikationen nicht zu große Zahlen entstehen zu lassen. In dieselbe Richtung geht der Gebrauch des kleinsten gemeinsames Vielfachen in den zwei folgenden Beispielen.

d) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

+ 2x + 2y + 2z = 7

- 1x + 2y + 2z = 1

+ 2x - 2y + 4z = 4

Anfangstableau:

x	*y*	*z*	*R.S.*
2	2	2	7
-1	2	2	1
2	-2	4	4

1. Schritt: 2*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*)

2	2	2	7
0	6	6	9
0	-4	2	-3

2. Schritt: 3*(*3*) + 2*(*2*)

2	2	2	7
0	6	6	9
0	0	18	9

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+2x+2y+2z=7$$
$$+6y+6z=9$$
$$+18z=9$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$z = 0.5$
$y = 1$
$x = 2$

e) Lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten:

$$+1x+1y+1u=6$$
$$+1x+1z+1u=4$$
$$+1y+1z+1u=2$$
$$+1x+1y+1z=9$$

Anfangstableau:

x	*y*	*z*	*u*	*R.S.*
1	1	0	1	6
1	0	1	1	4
0	1	1	1	2
1	1	1	0	9

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*4*) - 1*(*1*)

1	1	0	1	6
0	-1	1	0	-2
0	1	1	1	2
0	0	1	-1	3

2. Schritt: 1*(*3*) + 1*(*2*)

1	1	0	1	6
0	-1	1	0	-2
0	0	2	1	0
0	0	1	-1	3

3. Schritt: 2*(*4*) - 1*(*3*)

1 1 0 1 | 6
0 -1 1 0 | -2
0 0 2 1 | 0
0 0 0 -3 | 6

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x+1y \quad\quad &+1u = 6 \\ -1y+1z \quad &= -2 \\ +2z &+1u = 0 \\ &-3u = 6 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$u = -2$
$z = 1$
$y = 3$
$x = 5$

IV.4 Aufgaben: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme nach dem Gauß-Algorithmus durch Umformen in die Dreiecksgestalt:

a) $\begin{aligned} -5x+5y \quad\quad &= 5 \\ +2x \quad\quad +3z &= 11 \\ +7y-2z &= 8 \end{aligned}$	b) $\begin{aligned} +x-2y+z &= 0 \\ +2x+3y-4z &= 1 \\ -3x+4y+z &= 2 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} +10x+4y+3z+2u &= 3 \\ -6x+8y+7z+4u &= -7 \\ +14x-2y+5z+3u &= 6 \\ +8x+12y-9z+10u &= -4 \end{aligned}$	d) $\begin{aligned} +x+y-2z+u-v &= -1 \\ +x-y+z+u+2v &= 1 \\ -2x+y-z-u+v &= 23 \\ -x-y+2z-u-v &= -23 \\ +x-y-z+u+2v &= 1 \end{aligned}$

IV.5 Beispiele: Wir formen nun unter Benutzung des Gauß-Algorithmus lineare Gleichungssysteme in Diagonalgestalt um.

a) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$+3x+5y+8z = 31$
$+3x+6y+9z = 36$
$+4x+7y+9z = 35$

Anfangstableau:

x y z | *R.S.*
3 5 8 | 31
3 6 9 | 36
4 7 9 | 35

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 3*(*3*) - 4*(*1*)

3 5 8 | 31
0 1 1 | 5
0 1 -5 | -19

2. Schritt: 1*(*1*) - 5*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*)

3 0 3 | 6
0 1 1 | 5
0 0 -6 | -24

3. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*3*) / 6*(*2*) + 1*(*3*)

6 0 0 | -12
0 6 0 | 6
0 0 -6 | -24

Teilen: (*1*):6 / (*2*):6 / (*3*):(-6)

1 0 0 | -2
0 1 0 | 1
0 0 1 | 4

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
+1x \quad\quad\quad &= -2 \\
+1y \quad\quad &= 1 \\
+1z &= 4
\end{aligned}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x = -2$
$y = 1$
$z = 4$

b) Lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten:

$+ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -2$
$+ 3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 9x_4 = 2$
$+ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -2$
$+ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*
2 5 4 7 | -2
3 7 1 9 | 2
4 9 6 5 | -2
7 2 5 3 | 2

1. Schritt: 2*(*2*) - 3*(*1*) / 1*(*3*) - 2*(*1*) / 2*(*4*) - 7*(*1*)

2 5 4 7 | -2
0 -1 -10 -3 | 10
0 -1 -2 -9 | 2
0 -31 -18 -43 | 18

2. Schritt: 1*(*1*) + 5*(*2*) / -1*(*3*) + 1*(*2*) / -1*(*4*) + 31*(*2*)

2 0 -46 -8 | 48
0 -1 -10 -3 | 10
0 0 -8 6 | 8
0 0 -292 -50 | 292

3. Schritt: -4*(*1*) + 23*(*3*) / -4*(*2*) + 5*(*3*) / -2*(*4*) + 73*(*3*)

-8	0	0	170	|	-8
0	4	0	42	|	0
0	0	-8	6	|	8
0	0	0	538	|	0

4. Schritt: 269*(*1*) - 85*(*4*) / 269*(*2*) - 21*(*4*) / 269*(*3*) - 3*(*4*)

-2152	0	0	0	|	-2152
0	1076	0	0	|	0
0	0	-2152	0	|	2152
0	0	0	538	|	0

Teilen: (*1*):(-2152) / (*2*):1076 / (*3*):(-2152) / (*4*):538

1	0	0	0	|	1
0	1	0	0	|	0
0	0	1	0	|	-1
0	0	0	1	|	0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rrrrl}
+1x_1 & & & & = 1 \\
& +1x_2 & & & = 0 \\
& & +1x_3 & & = -1 \\
& & & +1x_4 & = 0
\end{array}
$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = -1$
$x_4 = 0$

c) Lineares Gleichungssystem mit fünf Gleichungen und fünf Unbekannten:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+1x_1 & +1x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
& +1x_2 & -1x_3 & & +1x_5 & = 2 \\
-1x_1 & & +1x_3 & +1x_4 & & = 2 \\
+1x_1 & & & +1x_4 & -1x_5 & = 2 \\
& +1x_2 & +1x_3 & -1x_4 & & = 1
\end{array}
$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	|	*R.S.*
1	1	0	0	1	|	4
0	1	-1	0	1	|	2
-1	0	1	1	0	|	2
1	0	0	1	-1	|	2
0	1	1	-1	0	|	1

1. Schritt: 1*(*3*) + 1*(*1*) / 1*(*4*) - 1*(*1*)

1	1	0	0	1	|	4
0	1	-1	0	1	|	2
0	1	1	1	1	|	6
0	-1	0	1	-2	|	-2
0	1	1	-1	0	|	1

2. Schritt: 1*(*1*) - 1*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*) / 1*(*4*) + 1*(*2*) / 1*(*5*) - 1*(*2*)

1 0 1 0 0 | 2
0 1 -1 0 1 | 2
0 0 2 1 0 | 4
0 0 -1 1 -1 | 0
0 0 2 -1 -1 | -1

3. Schritt: 2*(*1*) - 1*(*3*) / 2*(*2*) + 1*(*3*) / 2*(*4*) + 1*(*3*) / 1*(*5*) - 1*(*3*)

2 0 0 -1 0 | 0
0 2 0 1 2 | 8
0 0 2 1 0 | 4
0 0 0 3 -2 | 4
0 0 0 -2 -1 | -5

4. Schritt: 3*(*1*) + 1*(*4*) / 3*(*2*) - 1*(*4*) / 3*(*3*) - 1*(*4*) / 3*(*5*) + 2*(*4*)

6 0 0 0 -2 | 4
0 6 0 0 8 | 20
0 0 6 0 2 | 8
0 0 0 3 -2 | 4
0 0 0 0 -7 | -7

5. Schritt: -7*(*1*) + 2*(*5*) / 7*(*2*) + 8*(*5*) / 7*(*3*) + 2*(*5*) / -7*(*4*) + 2*(*5*)

-42 0 0 0 0 | -42
0 42 0 0 0 | 84
0 0 42 0 0 | 42
0 0 0 -21 0 | -42
0 0 0 0 -7 | -7

Teilen: (*1*):(-42) / (*2*):42 / (*3*):42 / (*4*):(-21) / (*5*):(-7)

1 0 0 0 0 | 1
0 1 0 0 0 | 2
0 0 1 0 0 | 1
0 0 0 1 0 | 2
0 0 0 0 1 | 1

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllllll} +1x_1 & & & & & = 1 \\ & +1x_2 & & & & = 2 \\ & & +1x_3 & & & = 1 \\ & & & +1x_4 & & = 2 \\ & & & & +1x_5 & = 1 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$
$x_4 = 2$
$x_5 = 1$

IV.6 <u>Aufgaben</u>: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme nach dem Gauß-Algorithmus durch Umformen in die Diagonalgestalt:

a) $+x+y+z=14$ $+2x+y+3z=32$ $+3x+2y+z=22$	b) $-2x_1+4x_2+x_3=9$ $+3x_1+2x_2+x_3=-4$ $-5x_1+x_2+2x_3=-9$
c) $+x+y+z+u=7$ $+2x-3y-2z+4u=7$ $+3x-y+z+2u=10$ $+x+2y+3-u=6$	d) $-2x-2y+z+3u+v=3$ $+x-2y-2z+u+3v=4$ $+3x+y-2z-2u+v=2$ $+x+3y+z-2u-2v=1$ $-2x+y+3z+u-2v=5$

IV.7 Im Falle einer beliebigen Anzahl von m Gleichungen und n Unbekannten gilt hinsichtlich des Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems die folgende Vorgehensweise:

1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*)). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

<u>Fall I – eindeutige Lösung</u>: 3/I) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Diagonalgestalt gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a\neq0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c\neq0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy+dz = e \Leftrightarrow cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: $\mathbf{L} = \{(l|m|\ldots|t)\}$ mit reellen Zahlen l, m, … t.

<u>Fall II – keine Lösung</u>: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f\neq0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung: $\mathbf{L} = \{\ \}$.

<u>Fall III – mehrdeutige Lösung</u>: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die dazugehörige rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z, dessen Diagonalelement =0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ $\mathbf{L} = \{(l(r)|m(r)|\ldots|t(r))|\ r\in\mathbf{R}\}$ mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, m(r)

$= m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

Eine entsprechende Vorgehensweise ergibt sich, wenn man das Gleichungssystem statt in eine (gestaffelte) Dreiecksgestalt in eine (modifizierte) Diagonalgestalt bringt.

IV.8 Hinsichtlich der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen folgt aus dem Endtableau (hier: in Dreiecksgestalt) nach Anwendung des Gauß-Algorithmus für den Fall von drei Gleichungen mit drei Unbekannten (*: Zahl $\neq 0$):

a) Dreiecksgestalt:

*	* oder 0	* oder 0	* oder 0	eindeutige Lösung
0	*	* oder 0	* oder 0	
0	0	*	* oder 0	

b) Letzte Zeile mit 0-Koeffizienten, rechte Seite $\neq 0$:

*	* oder 0	* oder 0	* oder 0	keine Lösung
0	*	* oder 0	* oder 0	
0	0	0	*	

c) Letzte Zeile mit 0-Koeffizienten, rechte Seite =0:

*	* oder 0	* oder 0	* oder 0	mehrdeutige Lösung
0	*	* oder 0	* oder 0	
0	0	0	0	

Ein homogenes Gleichungssystem (rechte Seite enthält nur Nullen) hat daher immer mindestens eine Lösung (den Nullvektor), bei einem inhomogenen Gleichungssystem kann die Lösungsmenge leer, die Lösung eindeutig oder mehrdeutig sein.

IV.9 Beispiele: Wir analysieren Endtableaus quadratischer linearer Gleichungssysteme in (modifizierter, gestaffelter) Dreiecksgestalt:

a) Eindeutige Lösung des inhomogenen Gleichungssystems: **L** = {(20|-10)}

2	4	0
0	3	60

b) Eindeutige Lösung des homogenen Gleichungssystems: **L** = {(0|0|0)}

3	-4	7	0
0	5	0	0
0	0	-12	0

c) Mehrdeutige Lösung des homogenen Gleichungssystems: **L** = {(-3s|-s|s)| $s \in \mathbf{R}$}

1	-1	2	0
0	1	1	0
0	0	0	0

d) Eindeutige Lösung des inhomogenen Gleichungssystems: **L** = {(-5|15|5)}

-6	-1	1	20
0	1	3	30
0	0	2	10

e) Keine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems: **L** = { }

2	18	-21	9
0	5	8	7
0	0	0	4

f) Mehrdeutige Lösung des inhomogenen Gleichungssystems: **L** = {(3|1+s|s)| s∈**R**}

1	-1	1	2
0	1	-1	1
0	0	0	0

g) Mehrdeutige Lösung des inhomogenen Gleichungssystems: **L** = {(2+2t-3s|t|s)| s,t∈**R**}

1	-2	3	2
0	0	0	0
0	0	0	0

h) Keine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems: L = { }

31	-11	-8	2
0	0	0	-9
0	0	0	0

IV.10 Beispiele: Wir bestimmen die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen durch Umformen in Dreiecksgestalt:

a) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

x + y = -1
x – z = -5
y – z = 2 ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*rechte Seite*	
1	1	0	-1	
1	0	-1	-5	(*2*) – (*1*)
0	1	-1	2	
1	1	0	1	
0	-1	-1	-4	
0	1	-1	2	(*3*) + (*2*)
1	1	0	1	
0	-1	-1	-4	
0	0	-1	-2	▶ eindeutige Lösung:

-z = -2 ⇔ z = 1
-y – 1 = -4 ⇔ -y = -3 ⇔ y= 3
x + 3 = -1 ⇔ x = -4 ▶ Lösungsmenge: **L** = {(-4|3|1)}

b) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

x + y = -1
x – z = -2
y + z = 2 ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*rechte Seite*	
1	1	0	-1	
1	0	-1	-2	(*2*) – (*1*)
0	1	1	2	
1	1	0	0	
0	-1	-1	-1	
0	1	1	2	(*3*) + (*2*)
1	1	0	1	
0	-1	-1	-1	
0	0	0	1	▶ keine Lösung

▶ Lösungsmenge: **L** = { }

c) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

x + y = 1
x – z = -1
y + z = 2 ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*rechte Seite*	
1	1	0	1	
1	0	-1	-1	(*2*) – (*1*)
0	1	1	2	
1	1	0	1	
0	-1	-1	-2	
0	1	1	2	(*3*) + (*2*)
1	1	0	1	
0	-1	-1	-2	
0	0	0	0	▶ mehrdeutige Lösung:

z = r (als Parameter)
-y – r = -2 ⇔ -y = -2 + r ⇔ y= 2 – r
x + (2–r) = 1 ⇔ x + 2 – r = 1 ⇔ x = -1 + r

▶ Lösungsmenge: **L** = {(-1+r|2-r|r)|r∈**R**} = $\left\{ \begin{pmatrix} -1+r \\ 2-r \\ r \end{pmatrix} \middle| r \in R \right\}$

d) Lineares (homogenes) Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

x + y = 0
y – z = 0
x + z = 0 ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*rechte Seite*	
1	1	0	0	
0	1	-1	0	
1	0	1	0	(*3*) – (*1*)
1	1	0	0	
0	1	-1	0	
0	-1	1	0	(*3*) + (*2*)
1	1	0	0	
0	1	-1	0	
0	0	0	0	▶ mehrdeutige Lösung:

z = r (als Parameter)
y – r = 0 ⇔ y = r
x + r = 0 ⇔ x = – r

▶ Lösungsmenge: **L** = {(-r|r|r)|r∈**R**} = $\left\{ \begin{pmatrix} -r \\ r \\ r \end{pmatrix} \middle| r \in R \right\}$

e) Lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten:

x + y – z = 1
y +3z – w = 8
3x – y + w = 1
-x – 4z + 5w = -9 ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*w*	*rechte Seite*	
1	1	-1	0	1	
0	1	3	-1	8	
3	-1	0	1	1	(3) – 3·(1)
-1	0	-4	5	-9	(4) + (1)
1	1	-1	0	1	
0	1	3	-1	8	
0	-4	3	1	-2	(3) + 4·(2)
0	1	-5	5	-8	(4) – (2)
1	2	-1	2	1	
0	1	3	-1	8	
0	0	15	-3	30	:3
0	0	-8	6	-16	:2
1	2	-1	2	1	
0	1	3	-1	8	
0	0	5	-1	10	
0	0	-4	3	-8	5·(4) + 4·(3)
1	2	-1	2	1	
0	1	3	-1	8	
0	0	5	-1	10	
0	0	0	11	0	▶ eindeutige Lösung:

$11w = 0 \Leftrightarrow w = 0$
$5z - 0 = 10 \Leftrightarrow -5z = 10 \Leftrightarrow z = 2$
$y + 6 - 0 = 8 \Leftrightarrow y = 2$
$x + 2 - 2 + 0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ▶ Lösungsmenge: **L** = {(1|2|2|0)}

f) Lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten:

$x + y = 2$
$y + z + w = 2$
$x - z + w = 3$
$x + y - 2w = 1$ ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*w*	*rechte Seite*	
1	1	0	0	3	
0	1	1	1	2	
1	0	-1	1	3	(3) – (1)
1	1	0	-2	1	(4) – (1)
1	1	0	0	3	
0	1	1	1	2	
0	-1	-1	1	0	(3) + (2)
0	0	0	-2	-2	
1	1	0	0	3	
0	1	1	1	2	
0	0	0	2	2	
0	0	0	-2	-2	(4) + (3)
1	1	0	0	3	
0	1	1	1	2	
0	0	0	2	2	
0	0	0	0	0	▶ mehrdeutige Lösung:

Das Diagonalelement zu z ist gleich 0, so dass z = r, rϵ**R**, zu setzen ist. Dann gilt:

$2w = 2 \Leftrightarrow w = 1$
$z = r$
$y + r + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1 - r$

$x + (1-r) = 3 \Leftrightarrow x + 1 - r = 3 \Leftrightarrow x = 2 + r$

▶ Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+r \\ 1-r \\ r \\ 1 \end{pmatrix} \middle| r \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} r \middle| r \in R \right\}$.

g) Lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten:

x + 2y + 3z – 2w = 6
2x – y +z + 4w = 5
x + 7y + 8z – 10w = 13
-x + 3y + 2z – 6w = 1 ▶ Matrixdarstellung:

x	*y*	*z*	*w*	*rechte Seite*	
1	2	3	-2	6	
2	-1	1	4	5	(*2*) – 2·(*1*)
1	7	8	-10	13	(*3*) – (*1*)
-1	3	2	-6	1	(*4*) + (*1*)
1	2	3	-2	6	
0	-5	-5	8	-7	
0	5	5	-8	7	(*3*) + (*2*)
0	5	5	-8	7	(*4*) – (*2*)
1	2	3	-2	6	
0	-5	-5	8	-7	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	▶ mehrdeutige Lösung:

Zwei Nullzeilen im Endtableau des Gauß-Algorithmus ergeben eine mehrdeutige Lösung mit zwei Parametern r∊**R** und s∊**R**, und zwar:

w = r
z = s

$-5y - 5s + 8r = -7 \Leftrightarrow -5y = -7 - 8r + 5s \Leftrightarrow y = \frac{7}{5} + \frac{8}{5}r - s$

$x + 2\left(\frac{7}{5} + \frac{8}{5}r - s\right) + 3s - 2r = 6 \Leftrightarrow x + \frac{14}{5} + \frac{16}{5}r - 2s + 3s - 2r = 6 \Leftrightarrow$

$x + \frac{14}{5} + \frac{6}{5}r + s = 6 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5} - \frac{6}{5}r - s$

▶ Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{16}{5} - \frac{6}{5}r - s \\ \frac{7}{5} + \frac{8}{5}r - s \\ s \\ r \end{pmatrix} \middle| r, s \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \middle| r, s \in R \right\}$.

IV.11 Stimmt die Anzahl der Gleichungen mit der der Unbekannten nicht überein, so liegen nicht quadratische lineare Gleichungssysteme vor. Jedes nicht quadratische Gleichungssystem kann aber in ein quadratisches überführt werden, wenn wir Folgendes beachten. Ist m nämlich die Anzahl der Gleichungen und n die der Unbekannten, so gilt:

m < n: Das unterbestimmte Gleichungssystem lässt sich mit n – m Gleichungen vom Typ *0 = 0* erweitern, so dass im Fall der Lösbarkeit mindestens n – m Parameter r, s, … in den Lösungen in Erscheinung treten.

m > n: Das überbestimmte Gleichungssystem lässt sich in Diagonalgestalt bringen, so dass ab der n+1. Gleichung Gleichungen vom Typ *0 = 0* oder *0* = * (*:Zahl ≠0) entstehen. Im Falle, dass eine der n+1. bis m. Gleichungen, vom Typ *0* = * ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Sind alle der n+1. bis m. Gleichungen vom Typ *0 = 0*, so lassen sich diese Gleichungen streichen und das Gleichungssystem wird ein quadratisches.

IV.12 Beispiele: Wir lösen im Folgenden (nicht quadratische) lineare Gleichungssysteme mit einer unterschiedlichen Anzahl von Gleichungen und Unbekannten:

a) Lineares homogenes Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten:

$+ 1x_1 - 1x_2 = 0$

$+ 1x_2 + 1x_3 = 0$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
1	-1	0	0
0	1	1	0

1. Schritt: (keine Umformung)

1 -1 0 | 0

0 1 1 | 0

2. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*2*)

1 0 1 | 0

0 1 1 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 + 1x_3 = 0$

$+ 1x_2 + 1x_3 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$ (t wird als Parameter für x_3 gesetzt)

$x_1 = -t$ ($\Leftrightarrow x_1 + t = 0$)

$x_2 = -t$ ($\Leftrightarrow x_2 + t = 0$)

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t

▶ Lösungsmenge: **L** = {(-t|-t|t)| t∊**R**}

b) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$+ 1x_1 + 1x_2 = -1$

$+ 2x_1 + 1x_2 = 0$

$+ 4x_1 + 1x_2 = 2$

Anfangstableau:

x_1	x_2	R.S.
1	1	-1
2	1	0
4	1	2

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*)

1 1 | -1

0 -1 | 2

0 -3 | 6

2. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 3*(*2*)

1 0 | 1
0 -1 | 2
0 0 | 0

Teilen: (*2*):(-1)

1 0 | 1
0 1 | -2
0 0 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 \quad = 1$
$\quad + 1x_2 = -2$
$\quad [0 = 0]$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 1$
$x_2 = -2$

▶ eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

▶ Lösungsmenge: **L** = {(1|-2)}

c) Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und vier Unbekannten:

$+ 2x_1 + 4x_2 - 1x_3 - 1x_4 = 10$
$+ 1x_1 - 5x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 10$

Anfangstableau:

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ | *R.S.*
 2 4 -1 -1 | 10
 1 -5 1 2 | 10

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*)

2   4 -1 -1 | 10
0 -14 3 5 | 10

2. Schritt: 7*(*1*) + 2*(*2*)

14   0 -1 3 | 90
 0 -14 3 5 | 10

Teilen: (*1*):14 / (*2*):(-14)

1 0 -0.0714 0.2143 | 6.4286
0 1 -0.2143 -0.3571 | -0.7143

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 \quad - 0.0714x_3 + 0.2143x_4 = 6.4286$
$\quad + 1x_2 - 0.2143x_3 - 0.3571x_4 = -0.7143$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_4 = u$
$x_1 = 6.4286 + 0.0714t - 0.2143u$
$x_2 = -0.7143 + 0.2143t + 0.3571u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen t, u

▶ Lösungsmenge: **L** = $\left\{ \begin{pmatrix} 6,4286 \\ -0.7143 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0714 \\ 0.2143 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -0.2143 \\ 0.3571 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \middle| t, u \in R \right\}$

d) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten:

$+ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8$
$+ 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$
$+ 1x_3 + 2x_4 = 0$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S.
1	2	3	4	8
0	1	2	3	2
0	0	1	2	0

1. Schritt: (keine Umformung)

1 2 3 4 | 8
0 1 2 3 | 2
0 0 1 2 | 0

2. Schritt: 1*(*1*) - 2*(*2*)

1 0 -1 -2 | 4
0 1 2 3 | 2
0 0 1 2 | 0

3. Schritt: 1*(*1*) + 1*(*3*) / 1*(*2*) - 2*(*3*)

1 0 0 0 | 4
0 1 0 -1 | 2
0 0 1 2 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 = 4$
$+ 1x_2 - 1x_4 = 2$
$+ 1x_3 + 2x_4 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_4 = u$
$x_1 = 4$
$x_2 = 2 + 1u$
$x_3 = 0 - 2u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl u

▶ Lösungsmenge: **L** = {(4|2+u|-2u|u)| u∊**R**}

e) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten:

$+ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 10$

$+ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8$

$+ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*

2 4 3 1 | 10

1 2 1 2 | 8

2 4 4 -2 | 3

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*)

2 4 3 1 | 10

0 0 -1 3 | 6

0 0 1 -3 | -7

2. Schritt: (keine Umformung)

2 4 3 1 | 10

0 0 -1 3 | 6

0 0 1 -3 | -7

3. Schritt: 1*(*1*) - 3*(*3*) / 1*(*2*) + 1*(*3*)

2 4 0 10 | 31

0 0 0 0 | -1

0 0 1 -3 | -7

Teilen: (*1*):2

1 2 0 5 | 15.5

0 0 0 0 | -1

0 0 1 -3 | -7

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +1x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 5x_4 &= 15.5 \\ 0 &= -1 \\ +1x_3 - 3x_4 &= -7 \end{aligned}$$

▶ keine Lösung des linearen Gleichungssystems

▶ Lösungsmenge: **L** = { }

f) Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten:

$+ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 10$

$+ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8$

$+ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 x_4 | *R.S.*

2 4 3 1 | 10

1 2 1 2 | 8

2 4 4 -2 | 4

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*)

2 4 3 1 | 10

0 0 -1 3 | 6

0 0 1 -3 | -6

<u>2. Schritt</u>: (keine Umformung)

2 4 3 1 | 10
0 0 -1 3 | 6
0 0 1 -3 | -6

<u>3. Schritt</u>: 1*(*1*) - 3*(*3*) / 1*(*2*) + 1*(*3*)

2 4 0 10 | 28
0 0 0 0 | 0
0 0 1 -3 | -6

<u>Teilen</u>: (*1*):2

1 2 0 5 | 14
0 0 0 0 | 0
0 0 1 -3 | -6

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +1x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 5x_4 &= 14 \\ 0 &= 0 \\ +1x_3 - 3x_4 &= -6 \end{aligned}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_2 = t$
$x_4 = u$
$x_1 = 14 - 2t - 5u$
$x_3 = -6 + 3u$

▶ unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter sind die reellen Zahlen t, u

▶ <u>Lösungsmenge</u>: **L** = {(14-2t-5u|t|-6+3u|u)| t,u∊**R**}

IV.13 <u>Aufgaben</u>: Bestimme die Lösungsmenge (leer, eindeutig, mehrdeutig) der folgenden linearen Gleichungssysteme.

a) $\begin{aligned} +2x_1 - 3x_2 &= 4 \\ +x_1 + 4x_2 &= 0 \\ +5x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$	b) $+2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 22$
c) $\begin{aligned} +2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\ +3x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= 0 \\ +5x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$	d) $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\ +3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -8 \\ -8x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= -7 \end{aligned}$
e) $\begin{aligned} +x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ +x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$	f) $\begin{aligned} +x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ +2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -2 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1 \\ +2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

IV.14 <u>Aufgaben</u>: Bestimme die Lösungsmenge (leer, eindeutig, mehrdeutig) der folgenden linearen Gleichungssysteme in Matrixdarstellung. Unbekannte sind: x_1, x_2, …

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 8 & -3 & 5 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & -8 \\ -1 & 2 & -4 & 9 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 6 & 28 \\ 10 & -1 & 43 & 70 \\ 15 & 1 & -20 & 53 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -2 & 3 & 17 & 27 \\ 13 & 7 & 1 & -8 & 13 \\ -1 & 4 & 16 & 7 & 26 \\ 2 & 13 & -5 & 12 & 22 \end{array}\right)$

V. Determinanten

V.1 Ein (quadratisches) lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen und n Unbekannten hat mit reellen a_{ij}, b_i, x_i (i,j=1,…n) die (Tableau-) Form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} & b_3 \\ ... & & ... & & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \quad (*)$$

wobei mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overset{->}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \overset{->}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

A die Koeffizientenmatrix, $\overset{->}{b}$ die rechte Seite und $\overset{->}{x}$ die Lösung des linearen Gleichungssystems (*) bedeutet. <u>Determinanten</u> nennen wir quadratische Tabellen, die gewissen quadratischen (Koeffizienten-) Matrizen A einen reellen Wert, nämlich *det* A, zuordnen, wobei für n=2 bzw. n=3 gilt:

<u>n=2</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

<u>n=3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

Für n>3 gilt zudem der <u>Entwicklungssatz</u> für n-reihige Determinanten, d.h.:

<u>n>3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}...a_{2n} \\ a_{32}...a_{3n} \\ ... \\ a_{n1}...a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}...a_{1n} \\ a_{32}...a_{3n} \\ ... \\ a_{n1}...a_{nn} \end{vmatrix} + ... + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}...a_{1n} \\ a_{32}...a_{3n} \\ ... \\ a_{n1}...a_{nn} \end{vmatrix} + ... + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{32} ... a_{3n} \\ ... \\ a_{n-11}...a_{n-1n} \end{vmatrix}$

wenn z.B. nach der 1. Spalte entwickelt wird und die sog. n-1-reihige Unterdeterminanten durch Streichung der 1. Spalte und der jeweiligen Zeile entstehen. Doch sind auch andere Entwicklungen möglich, wenn nach irgendeiner Spalte oder Zeile entwickelt wird.

V.2 Die Lösungen des linearen Gleichungssystem (*) erhalten wir mit Hilfe der Determinanten nur im Fall einer eindeutigen Lösbarkeit. Die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssystems (*) ist dann regulär, d.h. die dazugehörige Determinante *det* A besitzt einen Wert ≠ 0. In dem Fall gilt für die Lösungen x_i (i=1,…n) die Cramersche Regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},\ \dots,\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & b_3 \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Wir betrachten noch die Spezialfälle n=2 und n=3:

n=2: Lineares Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \text{ (*)}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems (*):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

n=3: Lineares Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \text{ (*)}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems (*):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Die Lösungen x_i (i=1,…n) bilden einen Bruch, in dessen Nenner die Determinante der Koeffizientenmatrix steht, während der Zähler eine Determinante ist, die aus der Determinante der Koeffizientenmatrix durch Ersetzen der i-ten Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems (b_i, i=1,…n) entsteht.

V.3 Beispiele: Für die Berechnung von Determinanten begnügen wir uns mit den Fällen n=2, n=3 und n=4.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)-(-3)\cdot 1 = -5$

b) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4-(-2)\cdot(-8) = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 3 = 24$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot 1+1\cdot(-1)\cdot 0+0\cdot 1\cdot 1-0\cdot 1\cdot 0-(-1)\cdot(-1)\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1 = -3$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ (als Determinante einer Matrix in Dreiecksgestalt)

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$1\cdot(1+0+0-0-1-1)+0-1\cdot(-1+0+1-0-0-0)-1\cdot(-1+0+1-1-0-0) = -1+0+0+1 = 0$

(nach dem Entwicklungssatz für Determinanten, entwickelt nach der 1. Determinantenspalte)

V.4 Aufgaben: Berechne die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 13 & -12 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

V.5 Beispiele: Für die folgenden linearen Gleichungssysteme ergibt sich mit Determinanten und Cramerscher Regel:

a) $\left.\begin{matrix} 2x+3y=7 \\ 3x-y=5 \end{matrix}\right\}$ => $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$ => $x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7\cdot(-1)-3\cdot 5}{2\cdot(-1)-3\cdot 3} = \frac{-22}{-11} = 2$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{-11} = 1$

b) $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ y+z=5 \\ x+z=4 \end{matrix}\right\}$ => $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$ => $x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+4-5}{1+1} = 1$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 2$, $z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 3$

c) $\left.\begin{matrix} \frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z}=18 \\ -\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=6 \\ \frac{10}{x}-\frac{1}{y}-\frac{6}{z}=12 \end{matrix}\right\}$ => $\left\{\begin{matrix} 5\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}+3\cdot\frac{1}{z}=18 \\ -1\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{y}+1\cdot\frac{1}{z}=6 \\ 10\cdot\frac{1}{x}-1\cdot\frac{1}{y}-6\cdot\frac{1}{z}=12 \end{matrix}\right\}$ => $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & 18 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 10 & -1 & -6 & 12 \end{array}\right)$ =>

$\frac{1}{x} = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 10 & -1 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{-96}{-96} = 1$, $\frac{1}{y} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 18 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 10 & 12 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 10 & -1 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{-384}{-96} = 4$, $\frac{1}{z} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 18 \\ -1 & 2 & 6 \\ 10 & -1 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 10 & -1 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{96}{-96} = -1$ =>

$x=1,\ y=\frac{1}{4},\ z=-1$

V.6 Aufgaben: Bestimme mit Hilfe von Determinanten und Cramerscher Regel die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $-3a+7b=4$ $9a-12b=-3$	b) $5(p+q)-12=3$ $-4(p-2)+3=2(q-p)+q$
c) $p+2q+3r=23$ $-2p+4q+r=-14$ $5p+8q-4r=-31$	d) $4(x+y)-7z=-7$ $13x-2(y+2z)=-19$ $-3(x-5y)+5(2y-9z)=-17$

VI. Anwendungen

VI.1 Wir beschränken uns im Folgenden auf mathematische Anwendungen. Bestimmungsaufgaben heißen Aufgaben, bei denen – auch innerhalb der Differential- und Integralrechnung – aus Eigenschaften von Funktionen ebendiese Funktionen hergeleitet werden sollen. Im Folgenden sollen bestimmt werden Polynome (ganz rationale Funktionen) vom Typ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

mit vorgegebenen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbf{R}$ und vorgegebener nicht negativer ganzer Zahl $n \in \mathbf{N_0}$. Die Zahl n mit $a_n \neq 0$ heißt Grad des Polynoms, die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ heißen Koeffizienten, das reelle x Variable. Geraden und Parabeln (2. Grades) sind Polynome.

VI.2 Beispiele: a) Durch zwei verschiedene Punkte geht immer eine Gerade, die Bestimmung einer Geraden $g: y = mx + b$ erfolgt mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und den Unbekannten m (Steigung) und b (y-Achsenabschnitt). Gegeben sind nun die Punkte P(2|-4) und Q(10|20). Einsetzen der x- und y-Werte der Punkte in die Geradengleichung $y = mx + b$ ergibt nach dem Subtraktionsverfahren:

$-4 = 2m + b$ $20 = 10m + b$	I II (Subtrahieren I – II)
$-4 = 2m + b$ $-24 = -8m$	 | :(-8)
$-4 = 2m + b$ $m = 3$	I II (Einsetzen in I)
$-4 = 6 + b$ $m = 3$	| -6
$b = -10$ $m = 3$	

Die Gerade durch die zwei Punkte P und Q lautet: $y = 3x – 10$.

b) Eine nach oben geöffnete Normalparabel ist von der Form $p: y = x^2 + px + q$. Zur Bestimmung der Unbekannten p und q benötigen wir zwei Punkte, hier: A(-1|28), B(3|12). Einsetzen der x- und y-Werte der Punkte in $y = x^2 + px + q$ führt zu:

$28 = (-1)^2 + p(-1) + q$ $12 = 3^2 + p \cdot 3 + q$	
$1 – p + q = 28$ $9 + 3p + q = 12$	| -1 | -9
$-p + q = 27$ $3p + q = 3$	I II (Subtrahieren I – II)
$-p + q = 27$ $-4p = 24$	 | :(-4)
$-p + q = 27$ $p = -6$	I II (Einsetzen in I)
$-(-6) + q = 27$ $p = -6$	
$6 + q = 27$ $p = -6$	| -6
$q = 21$ $p = -6$	

Die Normalparabel besitzt damit den Funktionsterm $y = x^2 – 6x + 21 = (x-3)^2 + 12$.

c) Gegeben sind die Punkte: P_1(-4|65), P_2(1|5), P_3(2|-1), durch die eine Parabel der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gehen soll. Es ergibt sich hier durch Einsetzen der x- und y-Koordinaten das lineare Gleichungssystem:

$f(1) = 5 \Rightarrow \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5 \Rightarrow a + b + c = 5$
$f(2) = -1 \Rightarrow \quad a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -1 \Rightarrow a + 2b + c = -1$

f(-4) = 65 => a(-4)^2 *+ b(-4) + c = 65 => 16a – 4b + c = 65*

Die Anwendung des Gauß-Algorithmus führt auf die Matrixumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 16 & -4 & 1 & 65 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-4I \\ III-16I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -21 \\ 0 & -20 & -15 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III-10II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & 15 & 195 \end{array}\right)$$

Also: *15c = 195* ⇔ *c = 13*, weiter: *-2b – 3·13 = -21* ⇔ *-2b = 18* ⇔ *b = -9*, weiter: *a – 9 + 13 = 5* ⇔ *a + 4 = 5* ⇔ *a = 1*. Es ergibt sich insgesamt die Normalparabel $f(x) = x^2 - 9x + 13$.

d) Ein Polynom 4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ist bestimmbar, wenn entsprechend den fünf Koeffizienten a,b,c,d,e∊**R** fünf Punkte vorliegen, z.B. P_1(-2|42), P_2(0|12), P_3(1|6), P_4(2|14), P_5(4|420). Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt:

f(-2) = 42 => 16a – 8b + 4c – 2d + e = 42
f(0) = 12 => e = 12
f(1) = 6 => a + b + c + d + e = 6
f(2) = 14 => 16a + 8b + 4c + 2d + e = 14
f(4) = 420 => 256a + 64b + 16c + 4d + e = 420

Die Auswertung des linearen Gleichungssystems mit fünf Gleichungen und fünf Unbekannten ergibt dann (bei vorangehendem Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen):

Anfangstableau:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*R.S.*
1	1	1	1	1	6
16	8	4	2	1	14
16	-8	4	-2	1	42
256	64	16	4	1	420
0	0	0	0	1	12

1. Schritt: 1*(*2*) - 16*(*1*) / 1*(*3*) - 16*(*1*) / 1*(*4*) - 256*(*1*)

1	1	1	1	1	6
0	-8	-12	-14	-15	-82
0	-24	-12	-18	-15	-54
0	-192	-240	-252	-255	-1116
0	0	0	0	1	12

2. Schritt: 8*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 3*(*2*) / -1*(*4*) + 24*(*2*)

8	0	-4	-6	-7	-34
0	-8	-12	-14	-15	-82
0	0	-24	-24	-30	-192
0	0	-48	-84	-105	-852
0	0	0	0	1	12

3. Schritt: -6*(*1*) + 1*(*3*) / -2*(*2*) + 1*(*3*) / -1*(*4*) + 2*(*3*)

-48	0	0	12	12	12
0	16	0	4	0	-28
0	0	-24	-24	-30	-192
0	0	0	36	45	468
0	0	0	0	1	12

<u>4. Schritt</u>: 3*(*1*) - 1*(*4*) / 9*(*2*) - 1*(*4*) / 3*(*3*) + 2*(*4*)

$$\begin{array}{rrrrr|r} -144 & 0 & 0 & 0 & -9 & -432 \\ 0 & 144 & 0 & 0 & -45 & -720 \\ 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 45 & 468 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}$$

<u>5. Schritt</u>: 1*(*1*) + 9*(*5*) / 1*(*2*) + 45*(*5*) / 1*(*4*) - 45*(*5*)

$$\begin{array}{rrrrr|r} -144 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 144 & 0 & 0 & 0 & -180 \\ 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}$$

<u>Teilen</u>: (*1*):(-144) / (*2*):144 / (*3*):(-72) / (*4*):36

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}$$

<u>Lösungen</u> des linearen Gleichungssystems sind: $a = 2{,}25$, $b = -1{,}25$, $c = -5$, $d = -2$, $e = 12$. Das Polynom 4. Grades lautet also: $f(x) = 2{,}25x^4 - 1{,}25x^3 - 5x^2 - 2x + 12$.

VI.3 Allgemein gilt: Durch n+1 Punkte $P_i(x_i|y_i)$ (i=1,…n+1) lässt sich ein Polynom n-ten Grades

$$f(x) = ax^n + bx^n + \dots + z \quad (*)$$

legen, so dass alle Punkte auf der Funktion liegen. Durch Einsetzen der x_i und y_i in (*) erhält man mit Gleichungen der Form:

$$y_i = ax_i^n + bx_i^n + \dots + z \quad (i=1,\dots n+1)$$

ein lineares Gleichungssystem mit n+1 Unbekannten und n+1 Gleichungen. Für niedrige n ist das Gleichungssystem mit Gleichsetzungs-, Einsetzungs- oder Additionsverfahren zu lösen, für hohe n empfiehlt sich der Gauß-Algorithmus.

VI.4 <u>Aufgaben</u>: Bestimme die Geraden, Parabeln, Polynome, die durch die gegebenen Punkte gehen.

a) $P_1(-1|-8{,}5)$, $P_2(3{,}5|32)$
b) $P_1(-6|38)$, $P_2(5|-6)$
c) $P_1(0|51)$, $P_2(1|52)$, $P_3(5|76)$
d) $P_1(-2|-18)$, $P_2(0|0)$, $P_3(7|0)$
e) $P_1(-2|-2)$, $P_2(1|1)$, $P_3(2|10)$
f) $P_1(-3|-22)$, $P_2(1|-10)$, $P_3(2|-12)$
g) $P_1(-1|2)$, $P_2(0|1)$, $P_3(2|11)$, $P_4(3|34)$
h) $P_1(-2|-73)$, $P_2(-1|9)$, $P_3(0|23)$, $P_4(4|599)$
i) $P_1(-2|42)$, $P_2(0|12)$, $P_3(1|6)$, $P_4(2|14)$, $P_5(4|240)$

VI.5 <u>Beispiele</u>: a) Gesucht ist ein Polynom $f(x)$ dritten Grades mit folgenden Eigenschaften: $f(x)$ besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3; $f(x)$ hat einen Tiefpunkt bei $x=\frac{5}{3}$; $f(x)$ schneidet die y-Achse bei y=-3.

I. Ansatz Polynom dritten Grades	I. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c,dϵ**R**.
II. Eigenschaften und Gleichungen a)/b) f besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3 c) f hat einen Tiefpunkt bei x=5/3 d) f schneidet die y-Achse bei y=-3.	II. Eigenschaften: Es gilt: $f(-1) = 0$ (Nullstelle bei *x*=-1) $f(3) = 0$ (Nullstelle bei *x*=3) $f'(\frac{5}{3}) = 0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=$\frac{5}{3}$) $f(0) = -3$ (Schnittpunkt mit der *y*-Achse im Punkt P(0|-3))
III. Aufstellen des linearen Gleichungssystems	III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen: $0 = f(-1) = a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d$ $0 = f(3) = a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d$ $0 = f'(\frac{5}{3}) = 3a\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2b\cdot\frac{5}{3} + c$ $-3 = f(0) = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$ Also: $0 = -a + b - c + d$ $0 = 27a + 9b + 3c + d$ $0 = \frac{25}{3}a + \frac{10}{3}b + c$ $-3 = d$
IV. Lösen des linearen Gleichungssystems	IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wegen d=-3 erhalten wir (durch Subtraktion von d=-3 in den ersten beiden Gleichungen und Multiplikation mit 3 in der 3. Gleichung) das Gleichungssystem: $-a + b - c = 3$ $27a + 9b + 3c = 3$ $25a + 10b + 3c = 0$ (Multiplikation der 1. Gleichung mit 3:) $-3a + 3b - 3c = 9$ $27a + 9b + 3c = 3$ $25a + 10b + 3c = 0$ (Addition der 1. zur 2. Gleichung:) $-3a + 3b - 3c = 9$ $24a + 12b = 12$ $25a + 10b + 3c = 0$ (Division der 2. Gleichung durch 12, Addition der 1. zur 3. Gleichung:) $-3a + 3b - 3c = 9$ $2a + b = 1$ $22a + 13b = 9$

(Multiplikation der 2. Gleichung mit 13:)

$$-a+b-c=3$$
$$26a+13b=13$$
$$22a+13b=9$$

(Subtraktion der 2. von der 3. Gleichung:)

$$-a+b-c=3$$
$$26a+13b=13$$
$$-4a=-4$$

(Division der 2. Gleichung durch 13, Auflösen nach a:)

$$-a+b-c=3$$
$$2a+b=1$$
$$a=1$$

(Auflösen nach b und c:)

$$a=1$$
$$2+b=1 \Rightarrow b=-1$$
$$-1-1-c=3 \Rightarrow -2-c=3 \Rightarrow c=-5$$

Die gesuchten Koeffizienten sind: a=1, b=-1, c=-5, d=-3.

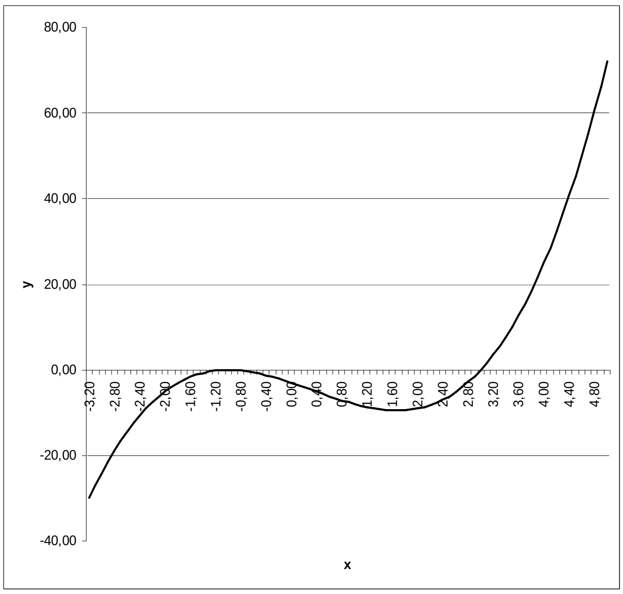
V. Funktion

V. Die Funktion hat also die Gleichung: $f(x)=x^3-x^2-5x-3$.

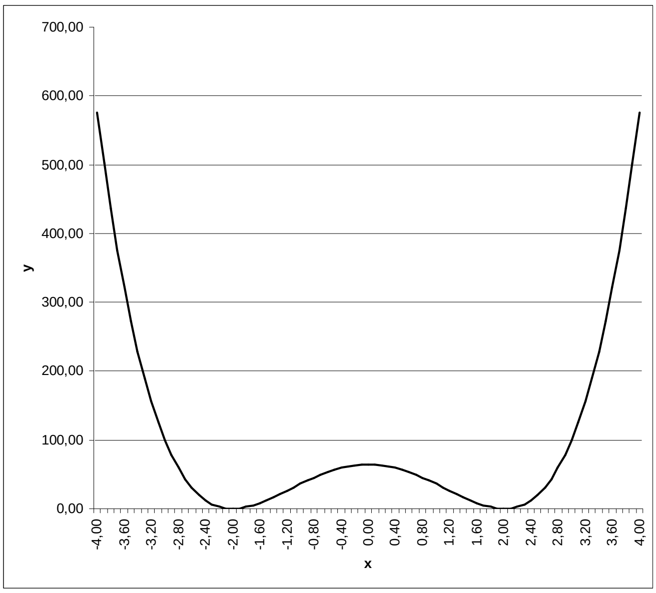
VI. Probe

VI. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(\frac{5}{3})=0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist: $f'(x)=3x^2-2x-5,\quad f''(x)=6x-2$ und damit: $f''(\frac{5}{3})=10-2=8>0$ mit $x=\frac{5}{3}$ als Tiefpunkt. Die Funktion erfüllt daher alle geforderten Eigenschaften.

▼ VII. Zeichnung



$y=f(x)=x^3-x^2-5x-3$



$y=f(x)=4x^4-32x^2+64$

b) Ein biquadratisches Polynom *f(x)* besitzt an der Nullstelle *x*=2 einen Tiefpunkt und im Punkt *x*=1 die Steigung -48.

I. <u>Ansatz</u>
Biquadratisches Polynom vierten Grades

I. <u>Ansatz</u>: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c∊**R**.

II. <u>Eigenschaften und Gleichungen</u>
a) f besitzt Nullstelle bei x=2
b) f hat einen Tiefpunkt bei x=2
c) f hat bei x=1 Steigung -48

II. <u>Eigenschaften</u>: Es gilt:

$f(2) = 0$	(Nullstelle bei *x*=2)
$f'(2) = 0$	(Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=2)
$f'(1) = -48$	(Steigung bei *x*=1)

III. <u>Aufstellen des linearen Gleichungssystems</u>

III. <u>Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms</u>: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen:

$$0 = f(2) = 16a + 4b + c$$
$$0 = f'(2) = 32a + 4b$$
$$-48 = f'(1) = 4a + 2b$$

IV. <u>Lösen des linearen Gleichungssystems</u>

IV. <u>Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms</u>: Wir haben das Gleichungssystem:

$$16a + 4b + c = 0$$
$$32a + 4b = 0$$
$$4a + 2b = -48$$

(Multiplikation der 3. Gleichung mit 2:)

$$16a + 4b + c = 0$$
$$32a + 4b = 0$$
$$8a + 4b = -96$$

(Subtraktion der 2. von der 3. Gleichung:)

$$16a + 4b + c = 0$$
$$32a + 4b = 0$$
$$-24a = -96$$

(Auflösen nach a:)

$$16a + 4b + c = 0$$
$$32a + 4b = 0$$
$$a = 4$$

(Multiplikation der 2. Gleichung mit 13:)

$$-a + b - c = 3$$
$$26a + 13b = 13$$
$$22a + 13b = 9$$

(Auflösen nach b und c:)

$$a = 4$$
$$128 + 4b = 0 \Rightarrow 4b = -128 \Rightarrow b = -32$$
$$64 - 128 + c = 0 \Rightarrow c = 64$$

	Die gesuchten Koeffizienten sind: a=4, b=-32, c=64.
V. Funktion	V. Die Funktion hat damit die Gleichung: $f(x) = 4x^4 - 32x^2 + 64$.
VI. Probe	VI. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(2) = 0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist: $f'(x) = 16x^3 - 64x$, $f'(x) = 48x^2 - 64$ und damit: $f''(2) = 192 - 64 = 128 > 0$ mit x=2 als Tiefpunkt. Die Funktion erfüllt alle Eigenschaften.
	▲ VII. Zeichnung

VI.6 Bestimmungsaufgaben für Polynome: a) Ein Polynom 3. Grades hat an der Nullstelle T(2|0) einen Tiefpunkt und bei x = $\frac{2}{3}$ einen Wendepunkt mit Steigung $-\frac{16}{3}$.

b) Ein Polynom 3. Grades hat bei x = 1 eine Nullstelle, hat in H(2|1) einen Hochpunkt und läuft durch den Punkt P(10|513).

VI.7 Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** (**N₀**) -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: n -> a_n oder $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, bei denen sich Folgenglieder auf vorhergehende Folgenglieder beziehen, heißen rekursiv und lassen sich mit Hilfe einer Funktion f darstellen als:

$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ mit vorgegebenem $a_1, a_2, \ldots a_k$ (rekursive Folge k-ter Ordnung)
$a_n = f(a_{n-1})$ mit vorgegebenem a_1 (rekursive Folge 1. Ordnung).

Rekursive Folgen vom Typ $a_n = a_{n-1} + p(n)$ mit dem Polynom k-ten Grades

$$p(n) = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0$$

lassen sich explizit darstellen als ein Polynom (k+1)-ten Grades, als:

$$a_n = a \cdot n^{k+1} + b \cdot n^k + c \cdot n^{k-1} + \ldots + xn^2 + yn + z$$

Die Koeffizienten a, b, c, … bestimmen sich aus den durch die rekursive Folgenvorschrift ermittelten Folgengliedern $a_1, a_2, \ldots a_{k+2}$ und aus dem dazugehörenden linearen Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Arithmetische Folgen $a_n = d(n-1) + a_1$ (in expliziter Darstellung) sind vom Typ $a_n = a_{n-1} + d$ mit p(n) = d und $a_1, d \in \mathbf{R}$.

VI.8 Beispiel: Gegeben ist die rekursive Folge $a_n = a_{n-1} + n$, $a_1 = 0$ mit: $a_2 = 0+2 = 2$, $a_3 = 2+3 = 5$, $a_4 = 5+4 = 9$, $a_5 = 9+5 = 14$, $a_6 = 14+6 = 20$ usw. Es liegt mit a_n die Summe der ersten n-1 natürlichen Zahlen vor. Gemäß dem Voranstehenden liegt eine rekursive Folge vom Typ $a_n = a_{n-1} + p(n)$ vor mit Polynom 1. Grades p(n) = n. Die Folge a_n lässt sich somit explizit darstellen als ein Polynom 2. Grades, d.h.:

$$a_n = an^2 + bn + c \quad (*)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten a, b, c. Wir setzen n = 1, 2, 4 in die Gleichung (*) ein und erhalten das lineare Gleichungssystem:

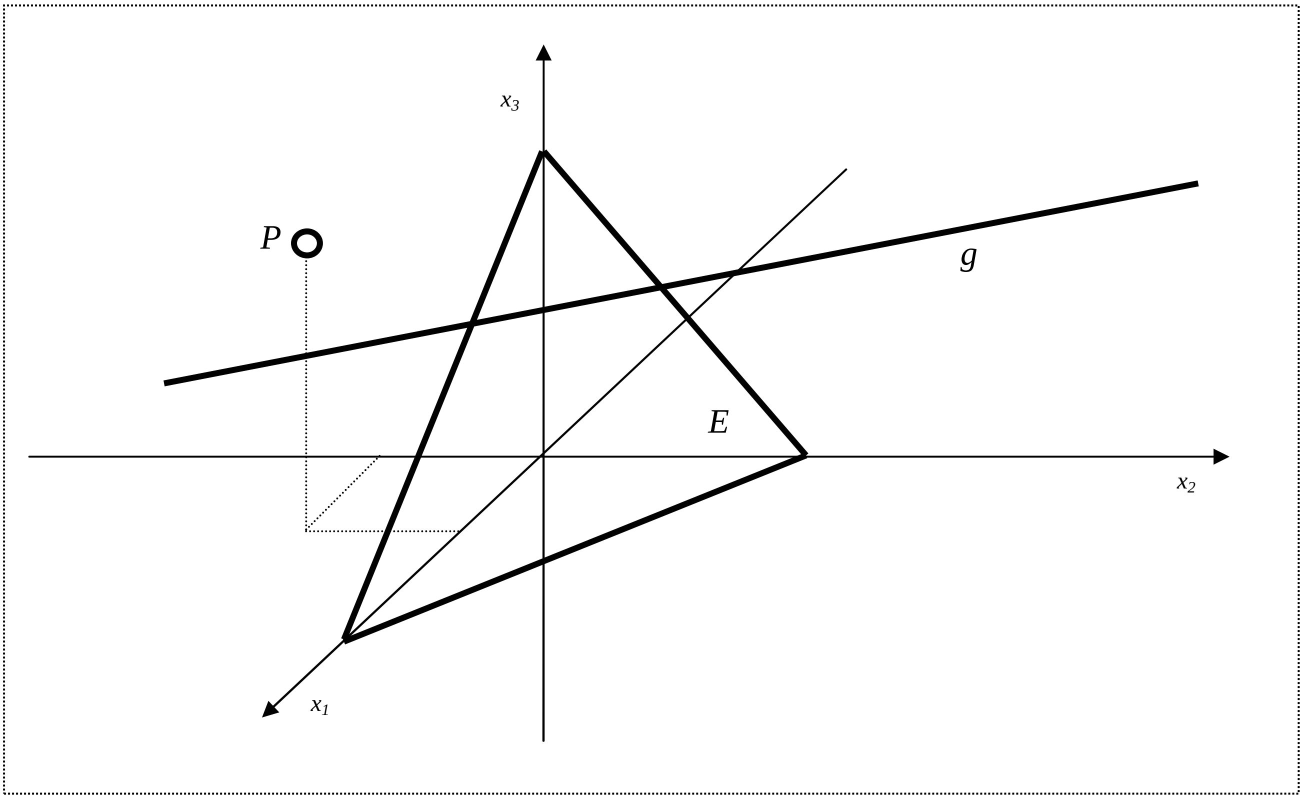
$$a_1 = 0 = a + b + c$$
$$a_2 = 2 = 4a + 2b + c$$
$$a_4 = 9 = 16a + 4b + c$$

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen wir das Gleichungssystem wie folgt:

a	*b*	*c*	*R.S.*	
1	1	1	0	
4	2	1	2	(*2*) – 4·(*1*)
16	4	1	9	(*3*) – 16·(*1*)
1	1	1	0	
0	-2	-3	2	
0	-12	-15	9	(*3*) – 6·(*2*)
1	1	1	0	
0	-2	-3	2	
0	0	3	-3	

Wir erhalten als Lösung: $3c = -3 \Leftrightarrow c = -1$; $-2b + 3 = 2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$; $a + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Die gesuchten Koeffizienten von a_n sind daher: *a = 0,5, b = 0,5, c = -1*. Die Folge a_n hat wegen (*) die explizite Darstellung: $a_n = 0{,}5 \cdot n^2 + 0{,}5 \cdot n - 1$.



VI.9 <u>Vektoren</u> im dreidimensionalen Vektorraum $\mathbf{R}^3$ sind innerhalb der Vektorgeometrie Zahlentripel der Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit den reellen Zahlen a_1, a_2, a_3 als Komponenten und den Vektorraumgesetzen bzgl. Addition und skalarer Multiplikation als Verknüpfungen und Operatoren. Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ sind <u>Ortsvektoren</u> $\vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ mit O(0|0|0) als Koordinatenursprung. <u>Geraden</u> im Raum definieren sich als g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{r}$ mit Stützvektor $\vec{a}$, Richtungsvektor $\vec{r}$ und reellem Parameter s. <u>Ebenen</u> im Raum lassen sich darstellen in Parameter- und in Koordinaten-/Normalform, d.h. es gilt für den dreidimensionalen Vektor

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, den Ortsvektor $\vec{a}$, die Richtungsvektoren $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ und die reellen Parameter t_1, t_2 sowie die reellen Zahlen a, b. c und d:

$$\text{E: } \vec{x} = \vec{a} + t_1 \vec{r_1} + t_2 \vec{r_2} \text{ (Parameterform)}$$

$$\text{E: } ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \text{ (Koordinaten-/Normal(en)form)}$$

VI.10 Wir beschäftigen uns zunächst mit den Vektoren. Die Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, … $\vec{a_k}$ heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn die auf den Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ führende <u>Linearkombination</u> dieser Vektoren, wenn also das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_k \vec{a_k} = \vec{o} \quad (*)$$

nur die (triviale) Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = … = \alpha_k = 0$ besitzt. Gibt es darüber hinaus α_i mit $\alpha_i \neq 0$ als Lösung des linearen Gleichungssystems (*), so sind die Vektoren <u>linear abhängig</u>, d.h. es gibt Vektoren $\vec{a_i}$ aus $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, … \vec{a_k}\}$, die sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lassen, also: $\vec{a_i} = \beta_1 \vec{a_1} + \beta_2 \vec{a_2} + ... + \beta_k \vec{a_k}$ mit einigen $\beta_i \neq 0$. Das lineare Gleichungssystem (*) ist ein homogenes Gleichungssystem, d.h. es besitzt immer und mindestens eine Lösung, nämlich die, die aus lauter Nullen besteht. Sind diese Nullen die einzige Lösung des Gleichungssystems (*), so sind die Vektoren linear unabhängig, gibt es darüber hinaus mehr Lösungen, so sind die Vektoren linear abhängig. Feststellbar ist Lösungsmenge eines Gleichungssystems (*) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Erzeugt man mit Letzterem im zu (*) gehörenden quadratischen Endtableau eine Matrix ohne Nullzeile, so liegt lineare Unabhängigkeit vor, andernfalls lineare Abhängigkeit.

VI.11 <u>Beispiele</u>: a) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig wegen:

$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇔ $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ⇔ $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

b) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig wegen:

$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\beta - \gamma = 0 \end{bmatrix}$ ▶

α	β	γ	rechte Seite	
1	-1	0	0	
1	1	2	0	*(2)* – *(1)*
2	-3	-1	0	*(3)* – 2·*(1)*
1	1	0	0	

0	2	2	0	
0	-1	-1	0	2·(*3*) + (*2*)
1	1	0	0	
0	2	2	0	
0	0	0	0	▶ Lineare Abhängigkeit

c) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, da vier Vektoren im dreidimensionalen Raum immer linear abhängig sind. Denn: Wir übertragen die Koordinaten der Vektoren direkt in das Anfangstableau des Gauß-Algorithmus und ergänzen dieses, um dieses quadratisch zu machen, mit einer Nullzeile:

α	β	γ	δ	rechte Seite	
0	-1	1	1	0	
1	1	0	-1	0	
-1	-1	-1	-1	0	
0	0	0	0	0	▶ Lineare Abhängigkeit

d) Die Vektoren $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ -21 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn Vektoren, unter denen sich der Nullvektor $\vec{o}$ befindet, sind immer linear abhängig. Wir verwenden dazu das Gauß-Verfahren:

α	β	rechte Seite	
0	9	0	
0	-10	0	9·(*2*) + 10·(*1*)
0	-21	0	9·(*3*) + 21·(*1*)
0	9	0	
0	0	0	
0	0	0	letzte Zeile streichen -> quadratisches Endtableau
0	9	0	
0	0	0	▶ Lineare Abhängigkeit

VI.12 <u>Aufgaben</u>: Untersuche auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ 21 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

VI.13 Es gelten dann zwischen Punkten, Geraden und Ebenen im $\mathbf{R}^3$ die folgenden <u>Lagebeziehungen</u>, bei denen lineare Gleichungssysteme eine wichtige Rolle spielen:

a) Punkt P – Gerade g bzw. Ebene E: Die <u>Punktprobe</u> führt bei Geraden und Ebenen in Parameterform auf lineare Gleichungssysteme:

$$\vec{OP} = \vec{a} + s\,\vec{r}\ ,\ \vec{OP} = \vec{a} + t_1\,\vec{r_1} + t_2\,\vec{r_2}\ ,$$

die im Falle der Lösbarkeit zur Aussage P∊g bzw. P∊E führen, im Falle der Nichtlösbarkeit zur Lage des Punktes außerhalb von Gerade bzw. Ebene. Ist die Ebene E in Koordinatenform gegeben, so lassen sich die Koordinaten des Punktes in E einsetzen, so dass bei einem Widerspruch der Punkt außerhalb der Ebene liegt.

b) Gerade g – Gerade h: Für zwei Geraden g: $\vec{x} = \vec{a_1} + s\,\vec{r_1}$ und h: $\vec{x} = \vec{a_2} + t\,\vec{r_2}$ ergibt die Gleichsetzung das lineare Gleichungssystem:

$$\vec{a_1} + s\,\vec{r_1} = \vec{a_2} + t\,\vec{r_2}\ ,$$

wobei Nichtlösbarkeit Parallelität oder Windschiefe der Geraden, eindeutige Lösbarkeit mit Lösung (s_0|t_0) die Existenz eines Schnittpunktes S mit $\vec{OS} = \vec{a_1} + s_0\,\vec{r_1} = \vec{a_2} + t_0\,\vec{r_2}$, mehrdeutige Lösbarkeit g = h bedeutet.

c) Gerade g – Ebene E: Im Falle einer Parametergleichung der Ebene E lassen sich Gerade und Ebene gleichsetzen. Das lineare Gleichungssystem

$$\vec{a} + s\,\vec{r} = \vec{a} + t_1\,\vec{r_1} + t_2\,\vec{r_2}$$

hat dann entweder keine Lösung, so dass Gerade und Ebene parallel liegen (g || E), eine eindeutige Lösung mit Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) S oder eine mehrdeutige Lösung, so dass die Gerade Teil der Ebene ist, also auf der Ebene liegt (g ⊂ E). Im Falle einer Koordinatengleichung von E ergibt sich durch Einsetzen der Geradenkoordinaten x_1, x_2, x_3 in E eine lineare Gleichung in s, die nicht, eindeutig oder mehrdeutig lösbar sein kann.

d) Ebene E – Ebene F: Im Falle zweier Parametergleichungen von E und F sind diese gleichzusetzen, das daraus resultierende lineare Gleichungssystem hat entweder keine Lösung – dann sind die Ebenen parallel (E || F) – oder eine mehrdeutige Lösung mit einem freien Parameter – die Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden g – oder mit zwei freien Parametern – die Ebenen sind identisch (E = F). Auch im Falle zweier Koordinatengleichungen entsteht ein lineares Gleichungssystem, nämlich mit zwei Gleichungen und den drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 sowie den entsprechenden Lösungsmengen. Bei einer Parameter- und einer Koordinatengleichung sind die Ebenenkoordinaten x_1, x_2, x_3 der Parametergleichung in die Koordinatengleichung der zweiten Ebene einzusetzen.

VI.14 Beispiele: a) Der Punkt P(4|-1|-5) liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, da die Punktprobe (das Gleichsetzen von Ortsvektor mit der Geraden) zu einer Lösung führt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s = 2$$

P liegt hingegen nicht auf der Ebene E: $3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$, da das Einsetzen der Koordinaten von P in E die falsche Aussage *(3·4 + 4·(-1) – 5 =) 3 = 12* liefert.

b) Wir setzen die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gleich und erhalten mit:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow s\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -7\\-2 & -1 & -1\\-2 & 0 & 2\end{array}\right)$$

ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen. Wir lösen auf:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -7\\-2 & -1 & -1\\-2 & 0 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\II+2I\\III+2I\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -7\\0 & -5 & -15\\0 & -4 & -12\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\5III-4II\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -7\\0 & -5 & -15\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

und streichen die dritte überzählige Gleichung 0 = 0, so dass wir ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten erhalten. Dies hat u.a. die Lösung t = 3, so dass sich als Schnittpunkt S wegen

$$\overset{->}{OS}=\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

S(1|5|1) ergibt.

c) Gegeben sind die zwei Ebenengleichungen E: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ und F: $x_1 + 2x_2 = 8$. Um die Lage der Ebenen zueinander zu bestimmen, bilden wir das lineare Gleichungssystem:

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$
$x_1 + 2x_2 = 8$

und lösen auf:

<u>Anfangstableau</u>:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*
1 1 1 | 10
1 2 0 | 8

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*)

1 1 1 | 10
0 1 -1 | -2

<u>2. Schritt</u>: 1*(*1*) - 1*(*2*)

1 0 2 | 12
0 1 -1 | -2

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

x_3 = t
x_1 = 12 - 2t
x_2 = -2 + t

Wir bilden: $\overset{->}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ und haben die Gleichung der Schnittgeraden g:

$$g:\ \overset{->}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-2t\\-2+t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

VI.15 Bei der Umformung der Ebenengleichungen von Parameter- in Koordinatenform und umgekehrt spielt der sog. Normalenvektor eine Rolle. Ist E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ die Ebene in Koordinatenform, so gilt mit Hilfe des Skalarprodukts, mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ als <u>Normalenvektor</u>: E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$. Mit der Parametergleichung E: $\vec{x} = \vec{a} + t_1 \vec{r_1} + t_2 \vec{r_2}$ folgt, dass der Normalenvektor $\vec{n}$ senkrecht zu den Richtungsvektoren $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ steht, so dass sich mit dem Skalarprodukt das unterbestimmte Gleichungssystem

$$\vec{n} \cdot \vec{r_1} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{r_2} = 0$$

ergibt. Das <u>Skalarprodukt</u> zweier Vektoren errechnet sich dabei als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

VI.16 Das nachstehende <u>Beispiel</u> zeigt die Umformung einer Ebenengleichung von der Koordinaten-/Normalen- zur Parameterform und von der Parameter- zur Koordinaten-/Normalenform. Gegeben ist:

E: $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18$ (Koordinaten-/Normal(en)form)

Die Koordinatengleichung ist eine lineare Gleichung mit drei Unbekannten, das „lineare Gleichungssystem" ist mehrdeutig lösbar, wenn wir $x_2 = r$ und $x_3 = s$ mit reellen Parametern r und s setzen sowie die Gleichung nach x_1 auflösen:

$2x_1 + 3r – 6s = 18$	| -3r, +6s
$2x_1 = 18 – 3r + 6s$	| :2
$x_1 = 9 – 1,5r + 3s$	(Lösung:) *$x_1 = 9 – 1,5r + 3s$, $x_2 = r$, $x_3 = s$*

Es ergibt sich daraus die Ebenengleichung in Parameterform:

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-1,5r+3s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (Parameterform)}$$

Umgekehrt bestimmt sich der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Ebene E in Parameterform aus den folgenden Gleichungen des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

was bedeutet:

$-1,5a + b = 0$, $3a + c = 0$.

Wir bringen dieses lineare homogene Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den drei Unbekannten a, b, c auf Dreiecksgestalt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) II+2I \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wir haben c = t als freien reellen Parameter und wählen c = -6, da wir nur einen Normalenvektor brauchen und alle Normalenvektoren jeweils Vielfache voneinander sind. Es ergibt sich mit c = -6: *2b – 6 = 0* ⇔ *2b = 6* ⇔ *b = 3* sowie mit b = 3: *-1,5a + 3 = 0* ⇔ *3 = 1,5a* ⇔ *a = 2*. Die Ebenengleichung lautet daher wie oben:

E: $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18$ (Koordinaten-/Normal(en)form)

VI.17 Aufgaben: a) Für die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Ebene E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll überprüft werden, ob die Punkte A(5|2|6) und B(3|-1|-3) auf g bzw. E liegen oder nicht.

b) Bestimme die Lage der beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zueinander.

c) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Stelle die Ebene E als Koordinatengleichung dar. Wo schneiden sich Gerade und Ebene?

d) Für die beiden Ebenen E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und F: $22x_1 - 16x_2 - x_3 = -4$ ist deren Lage zueinander zu bestimmen sowie im Falle, dass sich die Ebenen schneiden, die Schnittgerade.

VII. Gauß-Algorithmus: Lineare Gleichungssysteme mit Parameter

VII.1 Lineare Gleichungssysteme mit Parameter enthalten reelle Zahlen a, k, t o.ä., die bei den Koeffizienten und in der rechten Seite des linearen Gleichungssystems auftreten können, ist bei der Durchführung des Gauß-Algorithmus wie eine Zahl zu behandeln, algebraische Umformungen mit den Parametern vorausgesetzt. Im Endtableau des Gauß-Verfahrens sind die Lösbarkeitskriterien für Gleichungssysteme zu beachten, wobei die Koeffizientenausdrücke mit Parameter ins Gewicht fallen können. Denn die Division durch solche, vom Parameter abhängigen Koeffizienten kann dazu führen, dass man für gewisse Parameter durch 0 teilt, was natürlich nicht erlaubt ist.
Im Folgenden wird der Gauß-Algorithmus dazu verwendet, ein Gleichungssystem in Dreiecksgestalt zu erzeugen. Dieses reicht aus, um Fragen der vom Parameter abhängigen Lösbarkeit zu beantworten sowie weiter vom Parameter abhängige Lösungsmengen zu ermitteln.

VII.2 Beispiele: Wir gehen zunächst von einer Dreiecksgestalt der linearen Gleichungssysteme mit Parameter aus, verzichten mithin auf den Einsatz des Gauß-Algorithmus und untersuchen nur auf Lösbarkeit.

a) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit Parameter a in Dreiecksgestalt:

$2x_1 + 4x_2 + (a-1)x_3 = 5$
$(2a-4)x_2 + 4x_3 = 1$
$(a^2-9)x_3 = 2a+6$

Das Anfangs- und gleichzeitig Endtableau des linearen Gleichungssystems ist dann:

x_1	x_2	x_3	R.S.
2	4	a-1	5
0	2a-4	4	1
0	0	a^2-9	2a+6

Wir untersuchen nun die Sonderfälle, bei denen die vom Parameter a abhängigen Hauptdiagonalelemente – hier (von unten nach oben): a^2–9 und 2a–4 – Null werden, denn eine Division durch diese Diagonalelemente ist im Allgemeinen ja nicht möglich.

Fall 1: $a^2–9 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = -3, a = 3$
α) a = -3: Das Endtableau lautet, indem wir a=-3 einsetzen:

2	4	-4	5
0	-10	4	1
0	0	0	0

Damit liegen auf Grund der letzten Tableauzeile als Nullzeile im Fall a=-3 unendlich viele Lösungen vor.

β) a = 3: Das Endtableau lautet hier:

2	4	2	5
0	2	4	1
0	0	0	12

Die letzte Tableauzeile lautet: *0 = 12* und beinhaltet somit einen Widerspruch. Für den Parameter a=3 gibt es somit keine Lösung des linearen Gleichungssystems.

Fall 2: $2a–4 = 0 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow$ a = 2: Das Endtableau wird zu:

2	4	1	5
0	0	4	1
0	0	-5	12

Wir führen noch einen Gauß-Schritt durch: 4·(*3*) + 5·(*2*)

2	4	1	5
0	0	4	1
0	0	0	53

Auch hier führt die letzte Zeile auf einen Widerspruch, so dass es zu a=2 keine Lösung gibt.

Neben diesen Sonderfällen 1 und 2 ist noch der Fall der eindeutigen Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems zu betrachten, der dann gilt, wenn alle Diagonalelemente ≠ 0 sind. Also:

Fall 3: a ≠ -3, a ≠ 2, a ≠ 3: Das lineare Gleichungssystem besitzt für diese Werte des Parameters a eine eindeutige Lösung.

b) Wir geben hier das Endtableau eines linearen Gleichungssystems mit Parameter t an:

x_1 x_2 x_3 | R.S.
t 4 t | 2
0 t+4 4 | t+2
0 0 t^2+t-2 | t+1

Fall 1: $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 2} = 0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 0{,}5 \pm 1{,}5 \Leftrightarrow t = -1,\ t = 2$:

α) t = -1: Das Endtableau lautet, indem wir t=-1 einsetzen:

-1 4 -1 | 2
0 3 4 | 1
0 0 0 | 0

Die Nullzeile im Endtableau weist daraufhin, dass das lineare Gleichungssystem für t=-1 mehrdeutig lösbar ist.

β) t = 2: Das Endtableau ist hier:

2 4 2 | 2
0 6 4 | 4
0 0 0 | 3

Die letzte Tableauzeile lautet: $0 = 3$ und beinhaltet somit einen Widerspruch, so dass für t=2 das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

Fall 2: $t + 4 = 0 \Leftrightarrow$ t = -4: Das Endtableau hat die Form:

-4 4 -4 | 2
0 0 4 | -2
0 0 10 | -3

Der Gauß-Schritt 2·(*3*) – 5·(*2*) führt zu:

-4 4 -4 | 2
0 0 4 | -2
0 0 0 | 7

und damit zum Widerspruch und zur Nichtlösbarkeit des Gleichungssystem im Fall t=-4.

Fall 3: t = 0: Aus dem Endtableau

0 4 0 | 2
0 4 4 | 2
0 0 -2 | 1

folgt wegen der 1. Spalte als Nullspalte die Mehrdeutigkeit der Lösung im Fall t=0.

Nach den Sonderfällen haben wir noch:

Fall 4: $t \neq -1,\ t \neq 2,\ t \neq -4,\ t \neq 0$: Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist für diese Parameter t eindeutig.

VII.3 Beispiel: Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter $t \in \mathbf{R}$:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = t$
$-x_1 + 2x_2 + tx_3 = t^2-4$
$tx_1 - tx_3 = 2t-t^2$

Etwa für t = 2 wird das Gleichungssystem zu:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,\ 2x_1 - 2x_3 = 0$

Für t = -100 haben wir das lineare Gleichungssystem:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = -100$, $-x_1 + 2x_2 - 100x_3 = 9996$, $-100x_1 + 100x_3 = -10200$

Wir gehen nun systematisch vor und wenden zuerst den Gauß-Algorithmus zur Erzeugung eines Gleichungssystems in Dreiecksgestalt an. Anfangstableau und Gauß-Schritte sind:

x_1	x_2	x_3	rechte Seite	
1	2	1	t	
-1	2	t	t^2-4	(*2*) + (*1*)
t	0	-t	2t-t^2	(*3*) + t·(*1*)
1	2	1	t	
0	4	1+t	t^2+t-4	
0	-2t	-2t	2t-2t^2	2·(*3*) + t·(*2*)
1	2	1	t	
0	4	1+t	t^2+t-4	
0	0	t^2-3t	t^3-3t^2	Endtableau (*)

Schauen wir uns Gleichung (Zeile) (3) im Endtableau (*) an, so haben wir: $(t^2-3t)x_3 = t^3-3t^2$. Die Division mit t^2-3t führt auf die Fallunterscheidung $t^2-3t = 0$ und $t^2-3t \neq 0$:

<u>Fall 1</u>: *$t^2-3t = 0 \Leftrightarrow t(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 3$*

α) <u>t=0</u>: Wir erhalten aus (*) (t=0 einsetzen!) das Endtableau:

1	2	1	0	
0	4	1	-4	
0	0	0	0	mehrdeutige <u>Lösung</u>:

$x_3 = s$, $4x_2+s = -4 \Leftrightarrow 4x_2 = -4-s \Leftrightarrow x_2 = -1 - \frac{s}{4}$, $x_1 - 2 - \frac{s}{2} + s = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 - \frac{s}{2}$. Wir haben

als Lösungsmenge im Fall t=0: $L_{t=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

β) <u>t=3</u>: Das Endtableau (*) (t=3 einsetzen!) lautet in diesem Fall:

1	2	1	3	
0	4	4	8	
0	0	0	0	mehrdeutige <u>Lösung</u>:

$x_3 = s$, $4x_2+4s = 8 \Leftrightarrow 4x_2 = 8 - 4s \Leftrightarrow x_2 = 2 - s$, $x_1 + 2(2-s) + s = 3 \Leftrightarrow x_1 + 4 - 2s + s = 3 \Leftrightarrow$

$x_1 = -1 + s$. Als Lösungsmenge ergibt sich: $L_{t=3} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in R \right\}$.

Nach dem (Sonder-) Fall 1 (a) und b)) betrachten wir den <u>Fall 2</u>: <u>t ≠ 0, t ≠ 3</u>: Die eindeutige Lösung für diese t bestimmt sich unter Wiederholung des Endtableaus (*):

1	2	1	t	
0	4	1+t	t^2+t-4	
0	0	t^2-3t	t^3-3t^2	eindeutige <u>Lösung</u>:

Wir können in der Gleichung (3) des Endtableaus (*) nun durch $t^2-3t \neq 0$ dividieren und erhalten mittels der Faktorisierungen $t^2-3t = t(t-3)$ und $t^3-3t^2 = t^2(t-3)$:

$$x_3 = \frac{t^3 - 3t^2}{t^2 - 3t} = \frac{t^2(t-3)}{t(t-3)} = t .$$

Gemäß (*) ergibt sich weiter: $x_3 = t$, $4x_2 + (1+t)t = t^2+t-4 \Leftrightarrow 4x_2 + t + t^2 = t^2+t-4 \Leftrightarrow 4x_2 = -4$ $\Leftrightarrow x_2 = -1$, $x_1 + 2\cdot(-1) + t = t \Leftrightarrow x_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ und damit für jedes t≠0 und t≠3 die Lösungsmenge: $L_{t\neq 0, t\neq 3} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \right\}$.

Für t=2 erhalten wir, um zum Anfang der Betrachtung des Gleichungssystems zurückzukommen, als Lösungsmenge: $L_{t=2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, für t=-100 die Lösungsmenge: $L_{t=-100} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -100 \end{pmatrix} \right\}$.

VII.4 Aufgaben: Untersuche die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Parameter auf Lösbarkeit (keine, eindeutige, mehrdeutige Lösungen):

a) $\begin{aligned} +3x + y - 2z &= -5 \\ +ry + 4z &= 6 \\ +(r+6)z &= 0 \end{aligned}$	b) $\begin{aligned} +2tx_1 - 2x_2 - tx_3 &= 6 \\ +(t-1)x_2 + tx_3 &= t \\ +(t-2)z &= t^2-4 \end{aligned}$
c) $\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 3 & t & 2 & 0 \\ 6 & t & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 & 0 \end{array}$	d) $\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 4a & 2 & a & 5a \\ 8 & 3 & 2a & 8 \\ 6a & -3 & -2 & 6 \end{array}$

VII.5 Aufgabe: Gegeben sind die Matrix A_t und der Vektor $\overrightarrow{d_t}$, t reell, mit:

$$A_t = \begin{pmatrix} -2 & t-2 & t^2 \\ -1 & -1 & 3t \\ t & -t^2 & 5t+2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{d_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ -5t+2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne das lineare Gleichungssystem: $A_1 \vec{x} = \overrightarrow{d_1}$ mit dem Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

b) Für welche Werte von t ist das lineare Gleichungssystem $A_t \vec{x} = \overrightarrow{d_t}$ eindeutig lösbar, für welche vieldeutig lösbar, für welche unlösbar?

c) Für welche Werte von t ist $x_3 = 1$? Wie heißt in diesem Fall der Lösungsvektor?

VII.6 Aufgabe: Gegeben sind die Matrix A_t und der Ergebnisvektor $\overrightarrow{b_t}$, t reell, mit:

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & -2 & 3 \\ 2t & 3t & -4 \\ 0 & 8 & -2t \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{b_t} = \begin{pmatrix} 3t-3 \\ 2-t \\ 8-2t^2 \end{pmatrix}$$

a) Löse das lineare Gleichungssystem $A_0 \vec{x} = \overrightarrow{b_0}$.

b) Löse das lineare Gleichungssystem $A_{-2} \vec{x} = \overrightarrow{b_{-2}}$.

c) Bestimme für alle reellen t die Lösungsmenge des linearen homogenen Gleichungssystems $A_t \vec{x} = \vec{o}$ ($\vec{o}$ als Nullvektor).

d) Bestimme für alle reellen t die Lösungsmenge des linearen inhomogenen Gleichungssystems $A_t \vec{x} = \vec{b_t}$.

VII.7 Aufgaben: Bestimme zu den folgenden linearen Gleichungssystemen mit Parameter die vom Parameter abhängigen Lösungsmengen:

a) $\lambda x - y = \lambda^2 + 2\lambda$
$2x + \lambda y = 2\lambda - 2\lambda^2$

b) $x_1 + tx_2 = 2t^2$
$-x_1 - 2x_2 + t^2x_3 = -2t$
$x_1 - tx_2 + 2x_3 = 2$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5r & 3r \\ r & -1 & 2r & r^2 \\ 4 & r & r & 2r^2+5r \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 1 \\ 2a & -1 & a+1 & 1 \\ 4a & -3 & 2a & a^2+2a \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} t^2+1 & -1 & 0 & t^2 \\ 0 & t^2+4 & -1 & t^2 \\ -16 & -48 & t^2+16 & 4t^2 \end{array}\right)$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & -1 \\ -1 & 2a & a+1 & 2 \\ -3 & 4a & 2a & a^2+2a \end{array}\right)$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4r & -3 & 2r & r^2+2r \\ -r & 1 & 0 & -1 \\ 2r & -1 & r+1 & 1 \end{array}\right)$

Essen 2008