Michael Buhlmann

Mathematik > Lineare Algebra > Grundlagen

Einleitung

Algebra ist die Mathematik einer auf der Mengenlehre basierenden Theorie von Strukturen und Verknüpfungen, also von Mengen und Elementen, von Verknüpfungen als Rechenoperationen zwischen den Elementen, von Gruppen, Ringen, Körpern sowie von Abbildungen zwischen Mengen, von Gleichungen; lineare Algebra ist die Algebra der Vektorräume, der linearen Gleichungssysteme und der analytischen Geometrie. Algebra und lineare Algebra ahmen so Sachverhalte der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen nach und verallgemeinern diese.

Mengenlehre

Als Menge M wird eine Zusammenfassung von Elementen xεM mit bestimmten Eigenschaften bezeichnet. Zusammenfassungen L von Teilen der zur Menge M gehörenden Elemente heißen (echte) Teilmengen, die leere Menge Ø, die kein Element enthält, ist immer Teilmenge einer Menge M. Die Potenzmenge P(M) ist die Menge aller Teilmengen von M einschließlich der leeren Menge und der Menge M selbst. Die Vereinigung K U L von zwei Mengen K und L enthält alle Elemente beider Mengen, der Durchschnitt K ∩ L die Elemente, die zugleich in beiden Mengen K und L enthalten sind; ist die Durchschnittsmenge leer, so heißen die Mengen K und L zueinander disjunkt. Das Komplement K^c der Menge K bei einer Grundmenge M enthält die Elemente xεM, die nicht Element der Menge K sind, also: x. Hinter den Mengen und Verknüpfungen von Mengen steht letzt-lich die mathematische Aussagenlogik (wahr-falsch, nicht-und-oder, Folgerungen; Elementeigenschaften), d.h.:

Mengen

M = {x | x genügt einer Aussage A}	K U L = {x | xεK *oder* xεL} (Vereinigung)
K M, wenn: xεK => xεM gilt	K ∩ L = {x | xεK *und* xεL} (Durchschnitt)
	K^c = {x | x} (Komplement)
	K\L = K ∩ L^c (Differenz)
	K Δ L = K\L U L\K (symmetrische Differenz)
	$(K^c)^c = K$
	(K U L)^c = $K^c \cap L^c$
	(K ∩ L)^c = K^c U L^c (de Morgansche Regeln)
	usw.

K × L = {(x,y) | xεK *und* yεL} (kartesisches Produkt)
P(M) = {K | K M} = {Ø, …, M} (Potenzmenge)
Die Mengenverknüpfungen können verallgemeinert werden auf eine endliche, abzählbar unendliche, überabzählbar unendliche Anzahl von Mengen.

Auf den Mengen lassen sich noch Abbildungen definieren derart, dass eine Abbildung f zwischen den Mengen K und L mit: f: K -> L jedem xεK genau ein f(x)εL zuweist. f(A) = {f(x)|xεA} L heißt dann Bildmenge einer Menge A K, f^{-1}(B) = {x|f(x)εB} K Urbildmenge einer Menge B L unter der Abbildung f. Die Abbildung f: K -> L heißt injektiv, wenn für je zwei verschiedene x_1, x_2εK auch f(x_1), f(x_2)εL verschieden sind. Sie heißt surjektiv, wenn jedes yεL sich als y = f(x) mit xεK darstellen lässt. Sie heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist; in dem Fall existiert eine Umkehrabbildung f^{-1}: L -> K. Werden Abbildungen f: K -> L und g: L -> M zusammengesetzt, so entsteht die zusammengesetzte Abbildung g o f: K -> M mit: g o f(x) = g(f(x)) für xεK, f(x)εL, g(f(x))εM.

Gruppen, Ringe, Körper

Sind G eine Menge und G × G das dazugehörige kartesische Produkt, so heißt die Abbildung *: G × G -> G eine (innere) Verknüpfung von Elementen aus G zu einem Element aus G. Menge und (verschiedene) Verknüpfung(en) können dann die algebraischen Strukturen von Gruppen, Ringen, Körpern bilden. Hinsichtlich der Gruppen gilt:

Gruppe

Ein Paar (G, *) aus Menge und Verknüpfung heißt Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

a) G ist eine Menge mit Elementen a, b, c, ... εG.
b) * ist eine Verknüpfung von Elementen a, b εG mit: *: (a, b) -> a*b εG.
c) Die Verknüpfung * ist assoziativ: (a*b)*c = a*(b*c) für alle a, b, c εG.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element eεG mit: e*a = a*e = a für alle aεG.
e) Für alle aεG gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element a^{-1}εG mit: $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ mit neutralem Element e.

Kommutative Gruppe

Ein Paar (G, *) aus Menge und Verknüpfung heißt zudem kommutative (abelsche) Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

a) G ist eine Menge mit Elementen a, b, c, ... εG.
b) * ist eine Verknüpfung mit: *: (a, b) -> a*b εG.
c) Die Verknüpfung * ist assoziativ: (a*b)*c = a*(b*c) für alle a, b, c εG.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element eεG mit: e*a = a*e = a für alle aεG.
e) Für alle aεG gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element a^{-1}εG mit: $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ mit neutralem Element e.
f) Die Verknüpfung * ist kommutativ: a*b = b*a für alle a, b εG.

Untergruppe

Ein Paar (H, *) heißt Untergruppe von (G, *), wenn gilt:

a) H G mit Elementen a, b, ... εH.
b) * verknüpft alle Elemente a, b εH zu: *: (a, b) -> a*b εH.
b) eεH ist das (eindeutig bestimmte) neutrale Element von (G, *).
c) Für alle aεH gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element a^{-1}εH mit: $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ mit neutralem Element e.

({e}, *) und (G, *) sind Untergruppen von (G, *). Ist die Gruppe (G, *) kommutativ (abelsch), so sind dies auch ihre Untergruppen.

Rechenregeln bei Gruppen

Ist (G, *) eine Gruppe, so gelten für alle a, b, c, x, y, ... εG noch die folgenden Rechenregeln:

a) Kürzungsregel: a*b = a*c => b = c.
b) Kürzungsregel: a*b = c*b => a = c.
c) Inverses Element zu inversem Element: $(a^{-1})^{-1} = a$.
d) Verknüpfung inverser Elemente: $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$.
e) Lösen einer Gleichung: $x*a = b \Rightarrow x = b*a^{-1}$.
f) Lösen einer Gleichung: $a*y = b \Rightarrow y = a^{-1}*b$.

Ringe sind algebraische Strukturen mit zwei Verknüpfungen, die üblicherweise Addition und Multiplikation heißen:

Ring

Ein Tripel (R, +, *) aus Menge und Verknüpfungen heißt Ring, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(R, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) R ist eine Menge mit Elementen a, b, c, ... εR.
b) + ist die Verknüpfung „Addition" von Elementen a, b εR mit: +: (a, b) -> a+b εR.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (a+b)+c = a+(b+c) für alle a, b, c εR.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εR mit: 0+a = a+0 = a für alle aεR.
e) Für alle aεR gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -aεR mit: a+(-a) = (-a)+a = 0 mit neutralem Element 0.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: a+b = b+a für alle a, b εR.

(R, *) erfüllt:
g) * ist die Verknüpfung „Multiplikation“ von Elementen a, b εR mit: *: (a, b) -> a*b εR.
h) Die Verknüpfung * ist assoziativ: (a*b)*c = a*(b*c) für alle a, b, c εR.

Es gelten die Distributivgesetze:
i) a*(b+c) = a*b + a*c für alle a, b, c εR.
j) (a+b)*c = a*c + b*c für alle a, b, c εR.

Kommutativer Ring

Ein Tripel (R, +, *) aus Menge und Verknüpfungen heißt Ring, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(R, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) R ist eine Menge mit Elementen a, b, c, ... εR.
b) + ist die Verknüpfung „Addition“ von Elementen a, b εR mit: +: (a, b) -> a+b εR.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (a+b)+c = a+(b+c) für alle a, b, c εR.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εR mit: 0+a = a+0 = a für alle aεR.
e) Für alle aεR gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -aεR mit: a+(-a) = (-a)+a = 0 mit neutralem Element 0.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: a+b = b+a für alle a, b εR.

(R, *) erfüllt:
g) * ist die Verknüpfung „Multiplikation“ von Elementen a, b εR mit: *: (a,b) -> a*b εR.
h) Die Verknüpfung * ist assoziativ: (a*b)*c = a*(b*c) für alle a, b, c εR.
i) Die Verknüpfung * ist kommutativ: a*b = b*a für alle a, b εR.

Es gelten die Distributivgesetze:
j) a*(b+c) = a*b + a*c für alle a, b, c εR.
k) (a+b)*c = a*c + b*c für alle a, b, c εR.

Kommutativer Ring mit Einselement

Ein Tripel (R, +, *) aus Menge und Verknüpfungen heißt Ring, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(R, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) R ist eine Menge mit Elementen a, b, c, ... εR.
b) + ist die Verknüpfung „Addition“ von Elementen a, b εR mit: +: (a, b) -> a+b εR.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (a+b)+c = a+(b+c) für alle a, b, c εR.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εR mit: 0+a = a+0 = a für alle aεR.
e) Für alle aεR gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -aεR mit: a+(-a) = (-a)+a = 0 mit neutralem Element 0.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: a+b = b+a für alle a, b εR.

(R, *) erfüllt:
g) * ist die Verknüpfung „Multiplikation“ von Elementen a, b εR mit: *: (a, b) -> a*b εR.
h) Die Verknüpfung * ist assoziativ: (a*b)*c = a*(b*c) für alle a, b, c εR.
i) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 1εR mit: 1*a = a*1 = a für alle aεR.
j) Die Verknüpfung * ist kommutativ: a*b = b*a für alle a, b εR.

Es gelten die Distributivgesetze:
k) a*(b+c) = a*b + a*c für alle a, b, c εR.
l) (a+b)*c = a*c + b*c für alle a, b, c εR.

Körper sind algebraische Strukturen der folgenden Art:

Körper

Ein Tripel (K, +, *) aus Menge und Verknüpfungen heißt Körper, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(K, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) K ist eine Menge mit Elementen a, b, c, ... εK.
b) + ist die Verknüpfung „Addition“ von Elementen a, b εK mit: +: (a, b) -> a+b εK.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (a+b)+c = a+(b+c) für alle a, b, c εK.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εK mit: 0+a = a+0 = a für alle aεK.
e) Für alle aεK gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -aεK mit: a+(-a) = (-a)+a = 0 mit neutralem Element 0.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: a+b = b+a für alle a, b εK.

(K\{0}, *) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
g) * ist die Verknüpfung „Multiplikation" von Elementen a, b εK mit: *: (a, b) -> a*b εK.
h) Die Verknüpfung * ist assoziativ: (a*b)*c = a*(b*c) für alle a, b, c εK.
i) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 1εK mit: 1 ≠ 0 und: 1*a = a*1 = a für alle aεK.
j) Für alle aεK mit a≠0 gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element a^{-1}εK mit: a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1 mit neutralem Element 1.
k) Die Verknüpfung * ist kommutativ: a*b = b*a für alle a, b εK.

Es gelten die Distributivgesetze:
l) a*(b+c) = a*b + a*c für alle a, b, c εK.
m) (a+b)*c = a*c + b*c für alle a, b, c εK.

Vektorräume

Die Vektorräume der linearen Algebra benötigen einen Körper K als „Unterlage":

Vektorraum

Ein Tripel (V, +, ·) aus Menge und Verknüpfungen heißt K-Vektorraum über dem Körper (K, +, ·), wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(V, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) V ist eine Menge von Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$, $c^{->}$, ... εV.
b) +: V × V -> V ist die Verknüpfung „Addition" von Vektoren $a^{->}$, $b^{->}$ εV mit: +: ($a^{->}$, $b^{->}$) -> $a^{->}$+$b^{->}$ εV.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: ($a^{->}$+$b^{->}$)+$c^{->}$ = $a^{->}$+($b^{->}$+$c^{->}$) für alle $a^{->}$, $b^{->}$, $c^{->}$ εV.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element $0^{->}$εV mit: $0^{->}$+$a^{->}$ = $a^{->}$+$0^{->}$ = $a^{->}$ für alle $a^{->}$εV.
e) Für alle $a^{->}$εV gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -$a^{->}$εV mit: $a^{->}$+(-$a^{->}$) = (-$a^{->}$)+$a^{->}$ = $0^{->}$ mit neutralem Element $0^{->}$.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: $a^{->}$+$b^{->}$ = $b^{->}$+$a^{->}$ für alle $a^{->}$, $b^{->}$ εV.

(V, ·) erfüllt:
g) ·: K × V -> V ist die Verknüpfung „skalare Multiplikation" für kεK, $a^{->}$εV mit: ·: (k, $a^{->}$) -> k$a^{->}$εV.
h) Die Verknüpfung · ist assoziativ: (kl)·$a^{->}$ = k(l$a^{->}$) für alle k, l εK, $a^{->}$εV.
i) Mit dem neutralen Element 1εK gilt: 1·$a^{->}$ = $a^{->}$ für alle $a^{->}$εV.

Es gelten die Distributivgesetze:
j) (k+l)·$a^{->}$ = k$a^{->}$ + l$a^{->}$ für alle k,l εK, $a^{->}$εV.
k) k·($a^{->}$+$b^{->}$) = k$a^{->}$ + k$b^{->}$ für alle kεK, $a^{->}$, $b^{->}$ εV.

Für den Körper (K, +, ·) gilt:

(K, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
l) K ist eine Menge mit Elementen k, l, m, ... εK.
m) + ist die Verknüpfung „Addition" von Elementen k, l εK mit: +: (k, l) -> k+l εK.
n) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (k+l)+m = k+(l+m) für alle k, l, m εK.
o) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εK mit: 0+k = k+0 = k für alle kεK.
p) Für alle kεK gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -kεK mit: k+(-k) = (-k)+k = 0 mit neutralem Element 0.
q) Die Verknüpfung + ist kommutativ: k+l = k+l für alle k, l εK.

K\{0}, ·) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
r) · ist die Verknüpfung „Multiplikation" von Elementen k, l εK mit: ·: (k, l) -> k·l εK.
s) Die Verknüpfung · ist assoziativ: (k·l)·m = k·(l·m) für alle k, l, m εK.
t) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 1εK mit: 1 ≠ 0 und: 1·k = k·1 = k für alle kεK.
u) Für alle kεK mit k≠0 gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element k^{-1}εK mit: k·k^{-1} = k^{-1}·k = 1 mit neutralem Element 1.
v) Die Verknüpfung · ist kommutativ: k*l = l*k für alle k, l εK.

Es gelten die Distributivgesetze:
w) k·(l+m) = k·l + k·m für alle k, l, m εK.
x) (k+l)·m = k·m + l·m für alle k, l, m εK.

Eine Teilmenge U des K-Vektorraums V ist ein K-Unter(vektor)raum von V, wenn U V gilt und U die Eigenschaften eines K-Vektorraums besitzt. Abbildungen zwischen zwei K-

Vektorräumen V und W sind insbesondere (K-) lineare Abbildungen oder (K-) Homomorphismen. Ein K-Homomorphismus beachtet die algebraische Struktur der K-Vektorräume wie folgt:

Homomorphismus

Sind V und W zwei K-Vektorräume, so heißt die Abbildung f: V -> W ein (linearer) K-Homomorphismus, wenn gilt:

a) $f(a^{->}+b^{->}) = f(a^{->}) + f(b^{->})$ für alle $a^{->}$, $b^{->}$ εV mit $f(a^{->})$, $f(b^{->})$ εW.
b) $f(ka^{->}) = kf(a^{->})$ für alle kεK und $a^{->}$εV.

oder (statt a) und b)):

c) $f(ka^{->}+lb^{->}) = kf(a^{->}) + lf(b^{->})$ für alle k, l εK und $a^{->}$, $b^{->}$ εV.

Eigenschaften von Homomorphismen

Für Homomorphismen f: V -> W gelten die folgenden Eigenschaften und Definitionen:

a) Es gilt: $f(0^{->}) = 0^{->}$.
b) Es gilt: $f(-a^{->}) = -f(a^{->})$ für alle $a^{->}$εV.
c) Der Kern der Abbildung f, d.h.: $ker(f) = f^{-1}(0^{->}) = \{a^{->}εV \mid f(a^{->}) = 0^{->}\}$ ist ein Unterraum von V. Ist zudem $ker(f) = \{0^{->}\}$, so ist die Abbildung injektiv, ein Monomorphismus.
d) Das Bild der Abbildung f, d.h.: $im(f) = f(V) = \{f(a^{->}) \mid a^{->}εV\}$ ist ein Unterraum von W. Ist f(V) = W, so ist die Abbildung surjektiv, ein Epimorphismus.
e) Ein injektiver und surjektiver (bijektiver) Homomorphismus f heißt Isomorphismus. Mit f ist auch f^{-1}: W -> V ein Isomorphismus.
f) Ist V = W, so heißt f ein Endomorphismus.
g) Ist V = W und f bijektiv, so heißt f ein Automorphismus.
h) Die Menge aller Homomorphismen $Hom_K(V, W)$ ist ein K-Vektorraum.

Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ in einem K-Vektorraum V heißen linear unabhängig, wenn die Linearkombination $k_1a_1^{->} + … k_na_n^{->} = 0^{->}$, k_1, … k_n εK, nur auf $k_1 = … = k_n = 0$ führt. Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig. Nun sollen die Vektoren in einem K-Vektorraum V von einer (endlichen) Basis $B = \{a_1^{->}, … a_n^{->}\}$, nε**N**, linear unabhängiger Vektoren (maximal linear unabhängiges System der Basisvektoren als minimales Erzeugendensystem mit V = <B>; Basisergänzungssatz, Basisaustauschsatz, Zornsches Lemma) erzeugt werden, d.h.: jeder Vektor $a^{->}$εV lässt sich als Linearkombination $a^{->} = k_1a_1^{->} + … k_na_n^{->}$, k_1, … k_n εK, der Basisvektoren (eindeutig) darstellen (mit den Koordinaten $a^{->} = (k_1, … k_n)$). Die Vektoren, die sich als Linearkombination von Vektoren einer Basis B darstellen lassen, gehören zum Erzeugendensystem der Basis <B>. Der Vektorraum ist in diesem Fall (einer endlichen Basis B aus n Vektoren) endlich-dimensional mit dim(V) = n. Dann gilt:

Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraums

Für einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V heißt eine Menge $B = \{a_1^{->}, … a_n^{->}\}$, nε**N**, eine Basis, wenn die Basisvektoren linear unabhängig sind und den Vektorraum V erzeugen, d.h. für jeden Vektor $a^{->}$εV gilt (in eindeutiger Weise): $a^{->} = k_1a_1^{->} + … k_na_n^{->}$, k_1, … k_n εK. Der Vektorraum V ist das Erzeugnis von B: V = <B> und besitzt die Dimension: dim(V) = n.

Es gilt weiter:

Eigenschaften von Homomorphismen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen

Für Homomorphismen f: V -> W zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V, W gelten die folgenden Eigenschaften:

a) Mit U V gilt: f(<U>) = <f(U)>.
b) Linear abhängige Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ εV werden durch die Abbildung f auf linear abhängige Vektoren $f(a_1^{->})$, … $f(a_n^{->})$ εW abgebildet. Die Umkehrung des Sachverhalts gilt im Fall der Injektivität von f.
c) Ist f injektiv, so sind im Fall, dass die Vektoren $f(a_1^{->})$, … $f(a_n^{->})$ εW linear unabhängig sind, auch die Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ εV linear unabhängig.
d) Zu vorgegebenen Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ εV, die eine Basis B bilden, und $b_1^{->}$, … $b_n^{->}$ εW gibt es genau einen Homomorphismus f mit: $f(a_1^{->}) = b_1^{->}$, …, $f(a_n^{->}) = b_n^{->}$.
e) Es gilt: dim(f(V)) ≤ dim(V).
f) Es gilt: dim(V) = dim(ker(f)) + dim(im(f)).

g) Gilt dim(V) = dim(W), so ist ein Monomorphismus auch ein Epimorphismus und ein Isomorphismus usw.
h) Gilt dim(V) = dim(W), so gibt es einen Isomorphismus f: V -> W.
i) Gilt dim(V) = n, so ist V isomorph zu K^n (als n-dimensionales kartesisches Produkt K × … × K des Körpers K).

Matrizen

Sind V und W zwei K-Vektorräume der Dimension dim(V) = n und dim(W) = m, m, nε**N**, so lassen sich alle lineare Abbildungen, d.h. alle Homomorphismen beschreiben als Matrizen, also als zweidimensionale Tabellen $A = (a_{ij})_{i=1,\dots m;\ j=1,\dots n}$ mit a_{ij}εK für i = 1, ... m; j = 1, … n. Die Menge aller solcherart definierten Matrizen A heißt $K^{m\times n}$ und ist ein K-Vektorraum, der zum Vektorraum K^{mn} isomorph ist. Da V mit K^n und W mit K^m zu identifizieren ist, gilt weiter für einen Homomorphismus f: V -> W, dass Vektoren $a_1^{->}$, … $a_n^{->}$ der Basis B_V von V auf die Vektoren $f(a_1^{->})$, … $f(a_n^{->})$ εW abgebildet werden und Letztere als $b_1^{->}$, … $b_n^{->}$ unter Basis B_W von W dargestellt werden derart, dass f somit unter den Basen B_V und B_W mit einer Matrix $A_f = (b_1^{->}, \dots b_n^{->})$ε$K^{m\times n}$ ausgedrückt werden kann. Die Menge der solcherart durch Homomorphismen erzeugten Matrizen bildet dann einen K-Vektorraum (Isomorphie zwischen $Hom_K(V, W)$ und $K^{m\times n}$).

Vektorraum der Matrizen

Das Tripel ($K^{m\times n}$, +, ·) der Menge der m×n-Matrizen und der Verknüpfungen „Matrizenaddition“ + und „skalare Multiplikation“ · ist ein K-Vektorraum mit:

($K^{m\times n}$, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) $K^{m\times n}$ ist eine Menge mit Matrizen A, B, C, ... ε$K^{m\times n}$.
b) +: $K^{m\times n}$ × $K^{m\times n}$ -> $K^{m\times n}$ ist die Verknüpfung „(komponentenweise) Addition“ von Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1,..m;\ j=1,\dots n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,\dots m;\ j=1,\dots n}$ ε $K^{m\times n}$ mit: +: (A, B) -> $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{i=1,\dots m;\ j=1,\dots n}$ ε$K^{m\times n}$.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (A+B)+C = A+(B+C) für alle A, B, C ε$K^{m\times n}$.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element $0 = (0)_{i=1,\dots m;\ j=1,\dots n}$ ε$K^{m\times n}$, die Nullmatrix, mit: 0+A = A+0 = A für alle Aε$K^{m\times n}$.
e) Für alle $A = (a_{ij})_{i=1,\dots m;\ j=1,\dots n}$ ε$K^{m\times n}$ gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element $-A = (-a_{ij})_{i=1,..m;\ j=1,\dots n}$ ε$K^{m\times n}$ mit: A+(-A) = (-A)+A = 0 mit neutralem Element 0.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: A+B = B+A für alle A, B ε$K^{m\times n}$.

($K^{m\times n}$, ·) erfüllt:
g) ·: K × $K^{m\times n}$ -> $K^{m\times n}$ ist die Verknüpfung „skalare Multiplikation“ für kεK, $A = (a_{ij})_{i=1,\dots m;\ j=1,\dots n}$ ε$K^{m\times n}$ mit: ·: (k, A) -> $(ka_{ij})_{i=1,\dots m;\ j=1,\dots n}$ ε $K^{m\times n}$.
h) Die Verknüpfung ist assoziativ: (kl)·A = k(lA) für alle k, l εK, Aε$K^{m\times n}$.
i) Mit dem neutralen Element 1εK gilt: 1·A = A für alle Aε$K^{m\times n}$.

Es gelten die Distributivgesetze:
j) (k+l)·A = kA + lA für alle k,l εK, Aε$K^{m\times n}$.
k) k·(A+B) = kA + kB für alle kεK, A, B ε$K^{m\times n}$.

Für den Körper (K, +, ·) gilt:

(K, +) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
l) K ist eine Menge mit Elementen k, l, m, ... εK.
m) + ist die Verknüpfung „Addition“ von Elementen k, l εK mit: +: (k, l) -> k+l εK.
n) Die Verknüpfung + ist assoziativ: (k+l)+m = k+(l+m) für alle k, l, m εK.
o) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 0εK mit: 0+k = k+0 = k für alle kεK.
p) Für alle kεK gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element -kεK mit: k+(-k) = (-k)+k = 0 mit neutralem Element 0.
q) Die Verknüpfung + ist kommutativ: k+l = k+l für alle k, l εK.

K\{0}, ·) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
r) * ist die Verknüpfung „Multiplikation“ von Elementen k, l εK mit: ·: (k, l) -> k·l εK.
s) Die Verknüpfung · ist assoziativ: (k·l)·m = k·(l·m) für alle k, l, m εK.
t) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element 1εK mit: 1 ≠ 0 und: 1·k = k·1 = k für alle kεK.
u) Für alle kεK mit k≠0 gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element k^{-1}εK mit: $k\cdot k^{-1} = k^{-1}\cdot k = 1$ mit neutralem Element 1.

v) Die Verknüpfung $\cdot$ ist kommutativ: $k*l = l*k$ für alle $k, l \varepsilon K$.

Es gelten die Distributivgesetze:
w) $k\cdot(l+m) = k\cdot l + k\cdot m$ für alle $k, l, m \varepsilon K$.
x) $(k+l)\cdot m = k\cdot m + l\cdot m$ für alle $k, l, m \varepsilon K$.

Neben der skalaren Multiplikation $\cdot$ lässt sich noch eine Matrixmultiplikation $\cdot$ einrichten vermöge: $\cdot: K^{m\times n} \times K^{n\times p} \to K^{m\times p}$ mit: $A = (a_{ij})_{i=1,..n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times p}$ und $A\cdot B = C = (c_{ij})_{i=1,...m;\ j=1,...p}\ \varepsilon K^{m\times p}$ bei $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, $i = 1, \ldots m$; $j = 1, \ldots p$. Weiter gilt für Matrizen $A \varepsilon K^{m\times n}$ das Gaußsche Eliminationsverfahren (mit seinen Zeilenumformungen und der Matrix in Stufenform), um den Rang rg(A) der Matrix als maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten zu bestimmen. Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ und auch nicht nullteilerfrei, d.h. aus $A\cdot B = 0$ kann auch zugleich: $A\neq 0$ und $B\neq 0$ folgen.
Ist $A = (a_{ij})_{i=1,..n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{m\times n}$, so ist $A^T = (a_{ji})_{i=1,..n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times m}$ die transponierte (an der Matrixhauptdiagonalen „gespiegelte") Matrix.
Gilt $\dim(V) = \dim(W) = n$, sind die Vektorräume V und W als K^n also isomorph, so sind die Homomorphismen $f: V \to W$ (V) Endomorphismen, und es ergibt sich sogar der Ring der quadratischen Matrizen:

Ring quadratischer Matrizen mit Einselement

Das Tripel $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ der Menge der quadratischen $n\times n$-Matrizen und der Verknüpfungen „Matrizenaddition" + und „Matrizenmultiplikation" $\cdot$ ist ein Ring mit:

$(K^{n\times n}, +)$ ist eine kommutative (abelsche) Gruppe, d.h.:
a) $K^{n\times n}$ ist eine Menge mit Matrizen A, B, C, ... $\varepsilon K^{n\times n}$.
b) + ist die Verknüpfung „(komponentenweise) Addition" von Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times n}$ mit: $+: (A, B) \to A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times n}$.
c) Die Verknüpfung + ist assoziativ: $(A+B)+C = A+(B+C)$ für alle $A, B, C\ \varepsilon K^{n\times n}$.
d) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element $0 = (0)_{i=1,...n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times n}$, die Nullmatrix, mit: $0+A = A+0 = A$ für alle $A \varepsilon K^{n\times n}$.
e) Für alle $A \varepsilon K^{n\times n}$, $A = (a_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}$, gibt es ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element $-A \varepsilon K^{n\times n}$, $-A = (-a_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}$, mit: $A+(-A) = (-A)+A = 0$ mit neutralem Element 0.
f) Die Verknüpfung + ist kommutativ: $A+B = B+A$ für alle $A, B\ \varepsilon K^{n\times n}$.

$(K^{n\times n}, \cdot)$ erfüllt:
g) $\cdot$ ist die Verknüpfung „Multiplikation (bei Aufsummierung von Zeilen- und Spaltenelementen)" von Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times n}$ mit: $\cdot: (A, B) \to A\cdot B = C = (c_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times n}$ und $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, $i = 1, \ldots n$; $j = 1, \ldots n$.
h) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B C)$ für alle $A, B, C \varepsilon K^{n\times n}$.
i) Es gibt ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element $E = (\delta_{ij})_{i=1,...n;\ j=1,...n}\ \varepsilon K^{n\times n}$, die Einheitsmatrix, mit: $E\cdot A = A\cdot E = A$ für alle $A \varepsilon K^{n\times n}$ (Kroneckersymbol $\delta_{ij} = 1$ für $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ sonst).

Es gelten die Distributivgesetze:
i) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ für alle $A, B, C \varepsilon K^{n\times n}$.
j) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ für alle $A, B, C \varepsilon K^{n\times n}$.

Im Ring der quadratischen Matrizen gibt es bzgl. der Matrixmultiplikation invertierbare Matrizen $A \varepsilon K^{n\times n}$ mit: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$; A^{-1} heißt dann inverse Matrix zu A und ist ebenfalls mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens zu bestimmen, falls $rg(A) = n$ gilt. Ist $rg(A) < n$, so ist die Matrix A nicht invertierbar.

Lineare Gleichungssysteme

Die Vektorräume V, W seien wieder endlich-dimensional der Dimension n bzw. m. Einspaltige Matrizen heißen Vektoren. Zusammen mit einer einen Homomorphismus $f: V \to W$ repräsentierenden Matrix $A \varepsilon K^{m\times n}$ bilden die Vektoren $\vec{x} \varepsilon K^n$ und $\vec{b} \varepsilon K^m$ ein lineares Gleichungssystem $A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ (*) mit der Lösung $\vec{x}$. Tabellarisch ergibt sich auf Grund von Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})_{i=1,...m;\ j=1,...n}$, Lösungsvektor $\vec{x} = (x_j)_{j=1,...n}$ und Ergebnisvektor $\vec{b} = (b_i)_{i=1,...m}$, $a_{ij}, b_i, x_j\ \varepsilon K$ ($i = 1, \ldots m$; $j = 1, \ldots n$):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & ... \\ a_{mn} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (**)$$

Um die (eventuell existierende) Lösung zu erhalten, wird mit Hilfe Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Stufenform der Matrix A erzeugt. Im Falle einer beliebigen Anzahl von m Gleichungen und n Unbekannten gilt hinsichtlich des Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems die folgende Vorgehensweise:

Lösen von linearen Gleichungssystemen (Gauß-Algorithmus)

1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben, d.h. es gilt die Tabelle (**); einer Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*)). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die entsprechende Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

<u>Fall I – eindeutige Lösung</u>: 3/I) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Diagonalgestalt gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement a≠0 und dem Element b der rechten Seite: az = b ⇔ z = b/a. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement c≠0, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: cy+dz = e ⇔ cy = e – db/a ⇔ y = e/c – db/(ac) / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: L = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

<u>Fall II – keine Lösung</u>: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element f≠0 ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: 0 = f ≠0 und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung: L = { }.

<u>Fall III – mehrdeutige Lösung</u>: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die dazugehörige rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z, dessen Diagonalelement =0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ L = {(l(r)|m(r)|…|t(r))| rεK} mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

Im Fall des (inhomogenen) linearen Gleichungssystems (*) bilden die Lösungen einen affinen Unterrraum L des Vektorraums V mit Dimension dim(L) = n – rg(A). L kann auch (im Fall der Nichtlösbarkeit des linearen Gleichungssystems) die leere Menge Ø sein.

Affiner Unterraum

V sei ein K-Vektorraum. Ist a^{->}εV und U ein Untervektorraum von V, dann heißt L = a^{->} + U = {a^{->}+u^{->} | u^{->}εU} ein <u>affiner Unterraum</u> im Vektorraum V. Für den affinen Unterraum gilt:
a) Mittels des Vektorunterraums U erklärt sich eine (reflexive, symmetrische und transitive) Relation ~ auf dem Vektorraum V durch: a^{->} ~ b^{->} ⇔ a^{->}–b^{->} εU. Die aus der Äquivalenzrelation „Kongruenz modulo U“ resultierenden Äquivalenzklassen sind u.a.: [a^{->}] = a^{->} + U, [b^{->}] = b^{->} + U mit: [a^{->}] = [b^{->}], wenn a^{->}–b^{->} εU.

b) V/U, die Menge der Restklassen modulo U, ist ein K-Vektorraum (V/U, +, ·) vermöge der Verknüpfungen „Addition (von Äquivalenzklassen)“ +: V/U × V/U -> V/U mit: $[a^{->}]+[b^{->}] = [a^{->}+b^{->}]$ und „skalare Multiplikation (mit Äquivalenzklassen)“ ·: K × V/U -> V/U mit: $k[a^{->}] = [ka^{->}]$.
c) Jeder affine Unterraum lässt sich darstellen als: L = Ø oder als: L = $\{a^{->}\}$ oder als: L = $\{a^{->} + k_1(a_1^{->}- a^{->})+\dots+k_p(a_p^{->}- a^{->}) \mid k_1, \dots k_p \,\varepsilon K\}$ mit p = dim(L) = dim(U), pε**N**.

Es folgt noch: Bei homogenen linearen Gleichungssystemen mit $b^{->} = 0^{->}\varepsilon K^m$ ist die Lösungsmenge stets ein Unterraum des Vektorraums V, im Fall der Eindeutigkeit der Lösung ist: L = $\{0^{->}\}$.
Lineare Gleichungssysteme (*) mit quadratischer Matrix $A\varepsilon K^{n\times n}$ und mit Vektoren $x^{->}$, $b^{->}$ εK^n lassen sich auch mit Hilfe von Determinanten lösen. Es sei dazu auf Grund von $A = (a_{ij})_{i=1,\dots n;\, j=1,\dots n}$, $x^{->} = (x_j)_{j=1,\dots n}$, $b^{->} = (b_i)_{i=1,\dots n}$, a_{ij}, b_i, x_j εK (i, j = 1, … n) die tabellarische Form des linearen Gleichungssystems gegeben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \quad (***)$$

Dann gilt:

Determinanten

Determinanten sind Abbildungen, die quadratischen Matrizen $A\varepsilon K^{n\times n}$ genau ein Element det(A)εK des Körpers K zuordnen. Determinanten haben dann folgende Eigenschaften:

a) det(A) ist eine lineare Abbildung für jede Matrixzeile, sie ist multilinear für die gesamte Matrix A.
b) Mit rg(A) < n ist: det(A) = 0.
c) Ist $E\varepsilon K^{n\times n}$ die Einheitsmatrix, so ist: det(E) = 1.
d) Ist $A^T\varepsilon K^{n\times n}$ die transponierte Matrix zu A, dann gilt: $\det(A^T) = \det(A)$.
e) Existiert $A^{-1}\varepsilon K^{n\times n}$ als inverse Matrix zu A, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$. Ist umgekehrt det(A) ≠ 0, so existiert die inverse Matrix A^{-1} zu A.
f) Determinanten errechnen sich wie folgt:

n=1: $|a_{11}| = a_{11}$

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

n>3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-11}\dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(rekursiver Entwicklungssatz für Determinanten bei n>3).
g) Ist A eine Matrix in Diagonalform oder oberer Dreiecksform, so gilt: $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
h) Für zwei Matrizen A, B $\varepsilon K^{n\times n}$ gilt: det(A·B) = det(A)·det(B).
i) Für $A\varepsilon K^{n\times n}$ und kεK gilt: $\det(kA) = k^n\cdot\det(A)$

Einen Zusammenhang zwischen Determinanten und linearen Gleichungssystemen liefert die Cramersche Regel:

Determinanten und lineare Gleichungssysteme (Cramersche Regel)

Im Fall einer eindeutigen Lösbarkeit errechnet sich die Lösung des linearen Gleichungssystem (*) gemäß (***) mit Hilfe der Determinanten. Die Koeffizientenmatrix $A\varepsilon K^{n\times n}$ des linearen Gleichungssystems (*) ist dann regulär, d.h. für die dazugehörige Determinante gilt: det(A) ≠ 0. In dem Fall gilt für die Lösungen, den Lösungsvektor $x^{->}$ mit x_i (i = 1, … n) die Cramersche Regel. Die Lösungen x_i (i = 1, … n) bilden einen Bruch, in dessen Nenner die Determinante der Koeffizientenmatrix A steht, während der Zähler eine Determinante ist, die aus der Determinante der Koeffizientenmatrix durch Ersetzen der i-ten Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems $b^{->}$ (b_i, i = 1, … n) entsteht. Es ergibt sich damit die Form:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}},\ \ldots,\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & ... & b_3 \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ ... & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ausleitung

Wie einleitend bemerkt wurde, verallgemeinern Algebra und lineare Algebra algebraische Strukturen, die von vertrauten Zahlenmengen schon seit längerer Zeit bekannt sind. Verwiesen sei in diesem Zusammenhang auf den Ring der ganzen Zahlen (**Z**, +, ·) und die Körper der rationalen, reellen und komplexen Zahlen (**Q**, +, ·), (**R**, +, ·) und (**C**, +, ·) mit der üblichen Addition und Multiplikation zwischen den Zahlen. Hinzu kommen die z.B. reellen Vektorräume $\mathbf{R}^n$ mit ihrer zwei- und dreidimensionalen Ausprägung $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$. Eng mit Rechnen in Vektorräumen zusammenhängend, ist die Matrizenrechnung als Rechnen mit Abbildungen auf Vektorräumen. **N** sei schließlich die Menge der natürlichen Zahlen.

Literaturhinweise: BOSCH, S., Lineare Algebra, Berlin-Heidelberg ^{5}2014; GRÖBNER, W., Matrizenrechnung (= BI 103), Mannheim-Wien-Zürich o.J.; JÄNICH, K., Lineare Algebra. Ein Skriptum für das erste Semester, Berlin-Heidelberg-New York ^{2}1981; REIFFEN, H.-J., SCHEJA, G., VETTER, U., Algebra (= BI 110), Mannheim-Wien-Zürich 1984 (lineare Algebra)

www.michael-buhlmann.de / Michael Buhlmann, 12.2019