Michael Buhlmann

Analysis für Berufskolleg/ Fachhochschulreife

Daten- und Aufgabenblätter zur Mathematik

Version 4 (Analysis)

Essen 2019

Vorwort

Diese Sammlung aus Daten- und Aufgabenblättern geht aus einer jahrelangen Tätigkeit als Nachhilfelehrer für Oberstufenschüler und Erwachsene hervor. Die einzelnen Daten- und Aufgabenblätter wurden in einer sinnvollen Reihenfolge zusammengestellt. Zudem finden sich Rechenprogramme zu den behandelten Themen auf meiner Homepage

http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/index.htm.

Essen im Mai 2019, *Michael Buhlmann*

Impressum:

© 2014/19 Wissenschaftlicher Selbstverlag Michael Buhlmann
Sedanstr. 35, D-45138 Essen, Deutschland
www.michael-buhlmann.de, kontakt-hp@michael-buhlmann.de

Inhalt

Datenblatt: Reelle Zahlen, reelle Funktionen
Aufgabenblatt: Reelle Funktionen
Datenblatt: Maße und Umrechnungen
Datenblatt: Gleichungen
Aufgabenblatt: Gleichungen
Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme
Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme
Datenblatt: Geraden
Aufgabenblatt: Geraden
Datenblatt: Parabeln
Aufgabenblatt: Parabeln
Datenblatt: Mittlere, momentane Änderungsrate, Ableitung
Aufgabenblatt: Ableitungen
Datenblatt: Tangenten
Aufgabenblatt: Tangenten
Datenblatt: Symmetrie von Funktionen
Datenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Aufgabenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Datenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Aufgabenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Datenblatt: Exponentialfunktionen, Asymptoten, Wachstum
Aufgabenblatt: Exponentialfunktionen
Datenblatt: Trigonometrische Funktionen
Aufgabenblatt: Trigonometrische Funktionen
Datenblatt: Extremwertaufgaben
Aufgabenblatt: Extremwertaufgaben
Datenblatt: Integrale, Stammfunktionen, Flächen
Aufgabenblatt: Integrale, Stammfunktionen, Flächen
Datenblatt: Grafisches Auf- und Ableiten
Musteraufgaben
Anhang: Zusammenfassung Analysis

Datenblatt: Reelle Zahlen, reelle Funktionen

Die reellen Zahlen **R** ist Zahlenmenge aller abrechenden, periodischen und nichtperiodischen Dezimalzahlen. Auf den reellen Zahlen sind die Verknüpfungen + und * für Addition (Subtraktion) und Multiplikation (Division) definiert:

$$a+b,\ a-b,\ a*b,\ a/b\ (b\neq 0)$$

Die Verknüpfungen machen aus den reellen Zahlen einen (algebraischen) Körper mit positiven, negativen Zahlen sowie Zahl und Kehrzahl. Zudem wird mit ≤ eine Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen definiert, die Kleiner-gleich-Relation macht Zahlen vergleichbar. Mit -∞ und ∞ („unendlich“) sind Elemente gegeben, so dass:

$$-\infty < r < \infty$$

für jede reelle Zahl r gilt. Auf den reellen Zahlen lassen sich auf Grund der Ordnung (halb-) offene, geschlossene Intervalle (Teilmengen) definieren, und zwar:

$-\infty < r \leq a$: $(-\infty; a]$
$-\infty < r < a$: $(-\infty; a)$
$a \leq r \leq b$: $[a; b]$
$a < r \leq b$: $(a; b]$
$a \leq r < b$: $[a; b)$
$a < r < b$: $(a; b)$
$b \leq r < \infty$: $[b; \infty)$
$b < r < \infty$: $(b; \infty)$

mit reellen Zahlen a, b, a<b.

Terme sind mathematische Formeln, in die man gegebenenfalls Werte, Zahlen einsetzt. Mit Termen kann man daher auf dieselbe Weise rechnen wie mit Zahlen, d.h. es gelten für Zahlen a, b, c, d die Rechengesetze und Termumformungen (z.B. Punktrechnung vor Strichrechung, Klammerrechnung [Klammern auflösen, Ausklammern):

$a + 0 = a$, $a - a = 0$, $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$,
$1a = a$, $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
$+a = a$, $-1a = -a$, $+(+a) = a$, $+(-a) = -a$, $-(+a) = -a$, $-(-a) = a$
$+(a + b) = a + b$, $-(a + b) = -a - b$
$a\cdot a = a^2$, $a\cdot a\cdot a = a^3$, $a\cdot a\cdot a\cdot a = a^4$ …

Es gelten die binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (1. binomische Formel)}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (2. binomische Formel)}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ (3. binomische Formel)}$$

Es gelten die Bruchgesetze:

$$\frac{a}{1} = a,\quad \frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n},\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},\quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc},\quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$n\cdot\frac{a}{b} = \frac{na}{b},\quad 1\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b},\quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},\quad n\frac{a}{b} = n + \frac{a}{b}$$

Es gelten die Potenzgesetze:

$$a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^n \cdot a^m = a^{n+m},\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ \frac{1}{a^n} = a^{-n},\ (a^n)^m = a^{n\cdot m},\ (ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ 1^n = 1,\ (-1)^n = -1 \text{ (n ungerade)},\ (-1)^n = 1 \text{ (n gerade)}$$

Es gelten die Wurzelgesetze:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ \sqrt{a^2} = |a|,\ \sqrt{a}^2 = |a|$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{n^2 a_1} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1} \text{ (teilweises Wurzelziehen)},$$

auch für allgemeine Wurzeln:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Besondere Quadratwurzeln sind:

√1 = 1, √4 = 2, √9 = 3, √16 =4, √25 = 5, √36 = 6, √49 = 7, √64 = 8, √81 = 9, √100 = 10, √121 = 11, √144 = 12, √169 = 13, √196 = 14, √225 = 15, √256 = 16, √289 = 17, √324 = 18, √361 = 19, √400 = 20 …
√0,25 = 0,5, √2,25 = 1,5, √6,25 = 2,5, √12,25 = 3,5, √20,25 = 4,5, √30,25 = 5,5, √42,25 = 6,5, √56,25 = 7,5 ...

Es gelten die Potenzgesetze zur Eulerschen Zahl e = 2,7182818…:

$$e^0 = 1,\ e^1 = e,\ e^n \cdot e^m = e^{n+m},\ \frac{e^n}{e^m} = e^{n-m},\ \frac{1}{e^n} = e^{-n},\ e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e},\ (e^n)^m = e^{n\cdot m},$$

sowie die Logarithmengesetze des natürlichen Logarithmus:

$$\ln 1 = 0,\ \ln e = 1,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b,\ \ln(a^r) = r \cdot \ln a,\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$$

$$e^{\ln z} = z,\ \ln e^z = z$$

Auf den reellen Zahlen lassen sich Funktionen definieren. Analysis ist die Mathematik der Funktionen. Funktionen sind Abbildungen f: D_f -> **R** von reellen Zahlen in reelle Zahlen, d.h.: sie ordnen vermöge einer Zuordnung x -> f(x) = y (Funktionsterm) jedem reellen x des (maximalen) Definitionsbereichs D_f genau ein reelles y des Wertebereichs W_f zu. Funktionen können vervielfacht, addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert, verknüpft werden, d.h. es gilt: r·f(x), f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)·g(x), f(x)/g(x), $f(x)^{g(x)}$ und g(f(x)) sind reguläre Funktionsterme. Wir unterscheiden:

y = mx + c	Gerade
y = ax^2 + bx + c	Parabel (2. Grades)
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$	Polynom, ganz rationale Funktion (n. Grades)
$f(x) = ae^{bx+c} + d$	Exponentialfunktion
$f(x) = ax + b + ce^{dx}$	Exponentialfunktion mit linearem Anteil
$f(x) = a\sin(kx) + b$ $f(x) = a\cos(kx) + b$	Trigonometrische Funktion
$f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ $f(x) = a\cos(b(x-c)) + d$	Trigonometrische Funktion (Verschiebung auch entlang der x-Achse)

Für alle hier vorgestellten Funktionen gilt: D_f = **R**.

Aufgabenblatt: Reelle Funktionen

1. Bestimme die Funktionswerte der Funktionen f(x) an den Stellen x_0.

a) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = -1$, $x_0 = 5$, $x_0 = 10$

b) $f(x) = x^2 - 12x + 5$, $x_0 = -5$, $x_0 = 3$, $x_0 = 8$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3}(x-6)$, $x_0 = 0$, $x_0 = 3$, $x_0 = 6$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + 5$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$

e) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}x)$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 4$, $x_0 = 6$

f) $f(x) = 2\cos(x) - 3$, $x_0 = -\pi$, $x_0 = 0$, $x_0 = \pi/2$, $x_0 = \pi$

g) $f(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x) + 1$, $x_0 = -\pi/2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 2\pi$

h) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$, $x_0 = -\ln(2)$, $x_0 = 0$, $x_0 = \ln(4)$, $x_0 = 3$

i) $f(x) = x + 1 + e^x$, $x_0 = 0$, $x_0 = \ln(3)$, $x_0 = 2$

j) $f(x) = 4e^{-2x} + 3e^x - 5$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_0 = \ln(2)$

k) $f(x) = 2e^{-x} + \frac{1}{2}\cos(\pi x)$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 3/2$

2. Zeichne die folgenden Funktionen f(x):

a) $f(x) = x^2 + 5x - 6$

b) $f(x) = \frac{1}{8}x^2(x-4)$

c) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 5x^2 + 8$

d) $f(x) = 3\sin(2x) - 1$

e) $f(x) = x + \cos(\pi x)$

f) $f(x) = 2e^{-x} - 3$

g) $f(x) = -2x + 1 + \frac{1}{5}e^{-2x}$

<u>Lösungen</u>: 1. $f(x_0)$ = / 1a) 1, 13, 25 / 1b) 90, -22, -27 / 1c) 0, -27, 0 / 1d) 21, 8,25, 21 / 1e) $-\sqrt{2}/2$, 0, 0, -1 / 1f) -5, -1, -3, -5 / 1g) -2, -2, -2 / 1h) 5/4, 1,5, 3, $e^3/2+1$ / 1i) 2, 4+ln3, $3+e^2$ / 1j) $4e^2+3/e-5$, 2, 2 / 1k) 2,5, $2/e-0{,}5$, $2e^{-3/2}$.

Datenblatt: Maße und Umrechnungen

Länge:

Umrechnung	km	m	dm	cm	mm
km	·1	·1.000	·10.000	·100.000	·1.000.000
m	:1000	·1	·10	·100	·1.000
dm	:10000	:10	·1	·10	·100
cm	:100000	:100	:10	·1	·10
mm	:1000000	:1000	:100	:10	·1

Fläche:

Umrechnung	km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2
km^2	·1	·100	·10.000	·1.000.000	·100.000.000	·10.000.000.000
ha	:100	·1	·100	·10.000	·1.000.000	·100.000.000
a	:10000	:100	·1	·100	·10.000	·1.000.000
m^2	:1000000	:10000	:100	·1	·100	·10.000
dm^2	:100000000	:1000000	:10000	:100	·1	·100
cm^2	:10000000000	:100000000	:1000000	:10000	:100	·1

Volumen:

Umrechnung	km^3	m^3	dm^3 = l	cm^3 = ml
km^3	·1	·1.000.000.000	·1000.000.000.000	·1.000.000.000.000.000
m^3	:1000000000	·1	·1.000	·1.000.000
dm^3 = l	:1000000000000	:1000	·1	·1.000
cm^3 = ml	:1000000000000000	:1000000	:1000	·1

Gewicht:

Umrechnung	t	kg	g	mg
t	·1	·1.000	·1.000.000	·1.000.000.000
kg	:1000	·1	·1.000	·1.000.000
g	:1000000	:1000	·1	·1.000
mg	:1000000000	:1000000	:1000	·1

Zeit:

Umrechnung	Tag	h	min	sek
Tag	·1	·24	·1.440	·86.400
h	·0,0416667	·1	·60	·3.600
min	·0,000694444	·0,016667	·1	·60
sek	·0,0000115740	·0,00027777	·0,016667	·1

Datenblatt: Gleichungen

Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Gleichungen sind da definiert, wo beide Terme definiert sind (Definitionsbereich der Gleichung). Die Lösungsmenge einer Gleichung umfasst die Unbekannten, die die Gleichung lösen. Nach den in der Gleichung vorliegenden Termen werden Gleichungen linear, quadratisch, …, Potenz-, Exponentialgleichungen oder trigonometrische Gleichungen genannt (Typen von Gleichungen). Im Folgenden seien alle Unbekannten x und Koeffizienten reell.

Lineare Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$ax + b = 0$$

mit den Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für $a \neq 0$ dann:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Die lineare Gleichung ax + b = 0 entspricht damit grafisch der Nullstelle einer Geraden y = ax + b mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b.

Quadratische Gleichungen sind von der Form:

$ax^2 + bx + c = 0$			
$a \neq 0$, $b = 0$	$a \neq 0$, $c = 0$	$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$	$a = 1$, $b = p$, $c = q$
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (Mitternachtsformel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)
	Quadratische Gleichung hat die Form: $ax(x - x_1) = 0$ (bei 2 Lösungen $x = 0$, $x = x_1 = -\frac{b}{a}$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $a(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen (Gleichungen von ganz rationalen Funktionen) sind ganz rationale Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

mit den Zahlen a_0, … a_n, $n \varepsilon \mathbf{N}$, genügen. Die Lösung der Polynomgleichung ist meist nicht über eine Formel bestimmbar (es sei denn in den Fällen $n \leq 4$), sondern vielfach über numerische Verfahren (Newton-Verfahren). Es gilt aber: Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren $p_1(x)$, $p_2(x)$, … $p_m(x)$ zerlegen, so dass der Satz vom Nullprodukt greift: Ein Produkt aus (nicht notwendigerweise) ganz rationalen Faktoren ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist, also:

$$p_1(x)p_2(x)\ldots p_m(x) = 0 \Leftrightarrow p_1(x) = 0,\ p_2(x) = 0,\ \ldots,\ p_n(x) = 0$$

Komplexe Gleichungen lassen sich somit in mehrere einfache Gleichungen zerlegen. Allgemein stehen für das Lösen von Polynomgleichungen zur Verfügung:

a) Ausklammern: $ax^n+\ldots+bx^m = 0 \Leftrightarrow x^m(ax^{n-m}+\ldots+b) = 0 \Leftrightarrow x=0,\ ax^{n-m}+\ldots+b = 0$.

b) Substitution, etwa um aus biquadratischen Gleichungen quadratische zu erhalten:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$	| Substitution: $z=x^2$
$az^2 + bz+c =0$	
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	| (Rücksubstitution)
$x^2 = z_1,\ x^2 = z_2$	| $\sqrt{}$
$x = \pm\sqrt{z_1},\ x = \pm\sqrt{z_2}$	(falls z_1, $z_2 > 0$)

Potenzgleichungen sind vom Typ

$$x^n = a$$

o.ä. und durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen (n beliebige reelle Zahl, x meist ≥0).

Exponentialgleichungen sind dann durch Logarithmieren, Logarithmengleichungen durch Exponieren zu lösen. Es ergibt sich damit für eine Exponentialgleichung vom Typ:

$$ae^{bx+c} = d$$

die Lösung:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{d}{a}\right) - c}{b}$$

($a \neq 0$, $d/a>0$, $b \neq 0$).

Trigonometrische Gleichungen sind von der Form: $a \cdot \sin(kx)+b = y$ bzw. $a \cdot \cos(kx)+b = y$. Sie lassen sich u.a. zurückführen auf Gleichungen der Form:

Sinus:

$$\sin(kx) = 0 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\pi,\ kx = 0,\ kx = \pi,\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{\pi}{k},\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{k},\ \ldots$$

(Vielfache von π)

$$\sin(kx) = 1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\frac{3}{2}\pi,\ kx = \frac{\pi}{2},\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{3\pi}{2k},\ x = \frac{\pi}{2k},\ \ldots$$

(jedes zweite ungeradzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$)

$$\sin(kx) = -1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\frac{\pi}{2},\ kx = \frac{3\pi}{2},\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{\pi}{2k},\ x = \frac{3\pi}{2k},\ \ldots$$

(jedes zweite ungeradzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$)

Kosinus:

$$\cos(kx)=0 \Leftrightarrow \ldots,\ kx=-\frac{\pi}{2},\ kx=\frac{\pi}{2},\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x=-\frac{\pi}{2k},\ x=\frac{\pi}{2k},\ \ldots$$

(ungeradzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$)

$$\cos(kx)=1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx=-2\pi,\ kx=0,\ kx=2\pi,\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x=-\frac{2\pi}{k},\ x=0,\ x=\frac{2\pi}{k},\ \ldots$$

(geradzahlige Vielfache von π)

$$\cos(kx)=-1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx=-\pi,\ kx=\pi,\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x=-\frac{\pi}{k},\ x=\frac{\pi}{k},\ \ldots$$

(ungeradzahlige Vielfache von π)

Für besondere Werte von r in (*) ergeben sich bei den trigonometrischen Gleichungen auch besondere Lösungen. Die besonderen Werte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Funktion \ x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin*x bzw.* r	0	1	0	-1	0
cos*x bzw.* r	1	0	-1	0	1

Zusammenfassend und anhand von Beispielen erläutert gilt:

Regeln:	*Beispiele:*	
Lineare Gleichung: $ax+b=c \Leftrightarrow x=\frac{c-b}{a}$, a≠0	7x + 21 = 77 7x = 56 x = 8	| -21 | :7 Lösung: x=8
Quadratische Gleichung (normiert): $x^2+px+q=0 \Leftrightarrow$ $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	$4x^2 + 36x - 88 = 0$ $x^2 + 9x - 22 = 0$ $x=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+22}=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81+88}{4}}=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}}$ $x=-\frac{9}{2}\pm\frac{13}{2}$ x = -11 ∨ x = 2	| :4 (p=9, q=-22) Lösungen: x_1=-11, x_2=2
Quadratische Gleichung (allgemein): $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$2x^2 + 5x - 33 = 0$ $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-33)}}{2\cdot 2}\ \frac{-5\pm\sqrt{289}}{4}=\frac{-5\pm 17}{4}$ x_1 = -5,5 ∨ x_2 = 3	(a=2, b=5, c=-33) Lösungen: x_1=-5,5, x_2=3
Satz vom Nullprodukt (Faktoren eines Produktes gleich 0 setzen)	$(2x-3)(x^2-4) = 0$ $2x-3 = 0 \vee x^2 - 4 = 0$ $2x = 3 \vee x^2 = 4$ x = 1,5 ∨ x = ±2	(Satz vom Nullprodukt) | +3 bzw. | +4 | :2 bzw. | √ Lösungen: x_1=-2, x_2=1,5, x_3=2
Ausklammern (Potenzen x, x^2, x^3, … ausklammern, Satz vom Nullprodukt anwenden)	$x^3+3x^2-4x = 0$ $x(x^2+3x-4) = 0$ $x = 0 \vee x^2+3x-4 = 0$ $x = 0 \vee x = -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}$ x = 0 ∨ x = -4 ∨ x = 1	(Ausklammern) Lösungen: x=-4, x=0, x=1

<u>Biquadratische Gleichung</u> (Substitution: z = x^2)	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	(Substitution: z=x^2)
	$z^2 - 13z + 36 = 0$	(p-q-Formel)
	$z = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$	
	$z = 4 \vee z = 9$	(Rücksubstitution)
	$x^2 = 4 \vee x^2 = 9$	| √
	$x = \pm 2 \vee x = \pm 3$	Lösungen: x_1=-3, x_2=-2, x_3=2, x_4=3
<u>Gleichungen mit der Exponentialfunktion e^x</u> (Potenzgesetze, Auflösen nach e^x, Logarithmieren)	$e^{4x+3} = 78$	(Logarithmieren)
	$4x + 3 = \ln 78$	| -3
	$4x = \ln 78 - 3$	| :4
Potenzgesetze:	$x = \frac{\ln 78 - 3}{4}$	als Lösung
$x^r \cdot x^s = x^{r+s}$, $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$		
$(xy)^r = x^r \cdot y^r$, $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$	$e^{4x} - 3e^x = 0$	| :e^x
	$e^{3x} - 3 = 0$	| +3
$x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$	$e^{3x} = 3$	| ln
	$3x = \ln 3$	| :3
	$x = \frac{\ln 3}{3}$	
<u>Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen sin*x*, cos*x*</u> (Gesetzmäßigkeiten und Periodizität, Auflösen nach sin*x*, cos*x* usw., Umkehrfunktionen $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ usw.)	sin(x) = 0,5 x = π/6 + 2kπ, x = 5π/6 + 2kπ (k ganzzahlig)	
	10cos(3x) – 2 = 3	| +2
	10cos(3x) = 5	| :10
	cos(3x) = 0,5	
	3x = -π/3 + 2kπ, 3x = π/3 + 2kπ | :3	
	x = -π/9 + 2kπ/3, x = π/9 + 2kπ/3 (k ganzzahlig)	

Aufgabenblatt: Gleichungen

1. Löse die folgenden linearen Gleichungen:

a) $2x + 17 = 21$

b) $14 + 2x = 11 - 7x$

c) $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{3}{4}x - 6$

d) $61 - (5x + 2) + (x - 7) = 8x - 20$

e) $4x + 13 - 7x = 20 - 5x + 31$

f) $5(x+3) = 25 + 7(2-x)$

g) $4(x-1) - (2x+3) = 3(3x+1) - 38$

h) $15 - 2(x-8) = x + 7(17-2x)$

i) $\frac{1}{2}(x+3) = \frac{1}{4}(2-x) + \frac{1}{6}x$

2. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 = 729$

b) $16x^2 - 144 = 0$

c) $x^2 + 18x = 0$

d) $4x = 8x^2$

e) $x^2 + 8x - 33 = 0$

f) $x^2 - 33x + 272 = 0$

g) $x^2 - 3{,}6x + 1{,}28 = 0$

h) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

i) $\frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{20}x + \frac{2}{15} = 0$

j) $16x^2 + 120x + 221 = 0$

k) $5x^2 + 87x - 506 = 0$

l) $14 = 9x^2 - 15x$

m) $x(x-7) = \frac{1}{2}(7-x)$

n) $30x^2 - 41x = -13$

o) $0{,}3x^2 - 3x = -8$

3. Löse die folgenden Polynomgleichungen:

a) $x^3 - 16x = 0$

b) $16x^3 = 25x^2$

c) $4x^4 + x^3 - 3x^2 = 0$

d) $8x^5 - 64x^2 = 0$

e) $\frac{4}{3}x^4 - 8x^3 + 11x^2 = 0$

f) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + \frac{2}{15}x = 0$

g) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

h) $x^4 + 7x^2 = 8$

i) $-\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 6 = 0$

j) $(2x+3)(x^2-9) = 0$

k) $-\frac{1}{16}x^2(x-4)(3x+11) = 0$

l) $3(8-\frac{1}{2}x^2)(2x^3+16) = 0$

4. Löse die folgenden Exponentialgleichungen:

a) $5e^x = 10$

b) $2e^{-x} + 6 = 8$

c) $5e^{2x} + 7 = 2e^{2x} + 11$

d) $\frac{2}{3}e^{0,5x} = 5$

e) $\frac{2}{5}e^{2x} = 7$

f) $\frac{1}{3}e^{-0,5x} - \frac{1}{2} = 0$

g) $3e^{-x+1} - 5 = 4$

h) $8 - 2e^{-0,4x} = 6$

i) $10e^{2x} - 4e^x = 0$

j) $5e^x - 3e^{-x} = 0$

5. Löse die folgenden trigonometrischen Gleichungen ($0 \le x \le 2\pi$):

a) $\sin(x) = 0,4$

b) $\cos(2x) = -1$

c) $\cos(\frac{\pi}{2}x) = 0$

d) $\sin(\pi x) = 1$

e) $2\sin(x) - 3 = -2$

f) $0,5\cos(x) + 1 = 0,5$

g) $5\sin(\frac{\pi}{2}x) + 6 = 1$

h) $2\cos(4x) = 3$

<u>Lösungen</u>: Lösungen x =: 1a) 2 / 1b) -1/3 / 1c) Hauptnenner = 12 -> 8x+60=9x-72 -> 132 / 1d) 6 / 1e) 19 / 1f) 2 / 1g) 4 / 1h) 11 / 1i) Hauptnenner = 12 -> 6(x+3) = 3(2-x)+2x -> -12/7.
2a) -27; 27 / 2b) -3; 3 / 2c) -18; 0 / 2d) 0; 0,5 / 2e) -11; 3 / 2f) 16; 17 / 2g) 0,4; 3,2 / 2h) 0,5 / 2i) -2/3; -8/15 / 2j) -17/4; -13/4 / 2k) -22; 11,5 / 2l) -2/3; 7/3 2m) x^2-6,5x-3,5=0 -> -0,5; 7 / 2n) 0,5; 13/15 / 2o) keine Lösung.
3a) -2, 0, 2 / 3b) 0, 25/16 / 3c) -1, 0, 3/4 / 3d) 0, 2 / 3e) 0, 2,134, 3,866 / 3f) 0, 8/15, 2/3 / 3g) -2, -√2, √2, 2 / 3h) -1, 1 / 3i) -√6, -√2, √2, √6 / 3j) -3, -1,5, 3 / 3k) -11/3, 0, 4 / 3l) -4, -2, 4.
4a) ln2 / 4b) 0 / 4c) ln(4/3)/2 / 4d) 2ln(7,5) / 4e) ln(17,5)/2 / 4f) -2ln(1,5) / 4g) 1–ln3 / 4h) 0 / i) ln(0,4) / j) ln(0,6)/2.
5a) 0,412; 2,73 / 5b) π/2; 3π/2 / 5c) 1, 3 / 5d) 0,5; 2,5 / 5e) π/6; 5π/6 / 5f) π / 5g) 1,5; 3 / 5h) keine Lösung.

Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme I

Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (2)$$

mit den reellen Variablen x_1, x_2, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{22} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x_1 und x_2 gilt Folgendes:

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen (1) und (2) werden nach derselben Variablen aufgelöst, die zwei Ausdrücke gleichgesetzt, die daraus entstandene Gleichung nach der anderen Variablen aufgelöst, die Lösung in eine der nach der ersten Variablen aufgelösten Gleichung einsetzen, um die zweite Variable zu errechnen.

Einsetzungsverfahren: Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen, Variable in die andere Gleichung einsetzen, Lösung dieser Gleichung ermitteln, Lösung in die Gleichung für die aufgelöste Variable einsetzen.

Additionsverfahren: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

Beispiele (lineare Gleichungssysteme):

a) (Additionsverfahren:)

5x + 4 + 2y = 10 4x – 3 + 3y = -1	| -4 | +3
5x + 2y = 6 4x + 3y = 2	I | ·3 (Vorbereitung zur | ·(-2) Elimination von y)
15x + 6y = 18 -8x – 6y = -4	Ia (Ersetzen durch I) II (Addition I + II)
5x + 2y = 6 7x = 14	I | :7
5x + 2y = 6 x = 2	I II (Einsetzen von x in I)
5·2 + 2y = 6 x = 2	
2y = -4 x = 2	| :2
y = -2 x = 2	Lösung: x=2, y=-2 -> L = {(2;-2)}

b) (Einsetzungsverfahren:)

2x + 4y = 8 -x + 3y = 1	I II | -3y
2x + 4y = 8 -x = 1 - 3y	 | ·(-1)
2x + 4y = 8 x = -1 + 3y	I II (Einsetzen von x in I)
2·(-1+3y) + 4y = 8 x = -1 + 3y	I II
-2 + 6y + 4y = 8 x = -1 + 3y	| +2
10y = 10 x = -1 + 3y	| :10 II (Einsetzen von y in II)
y = 1 x = -1 + 3y	I (Einsetzen von y in II) II
y = 1 x = -1 +3·1 = 2	Lösung: x=2, y=1 -> L = {(2;1)}

Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme II

Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$a_{11}x_1 + b_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (m)$$

mit den reellen Variablen x_1, … x_n, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{mn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, … b_m. Sind alle Zahlen b_1, … $b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen (n > m) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen (n < m) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & \ldots \\ a_{mn} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Im Falle einer beliebigen Anzahl von m Gleichungen und n Unbekannten gilt hinsichtlich des Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems die folgende Vorgehensweise:

Lösen von linearen Gleichungssystemen (Gauß-Algorithmus)

1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; einer Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*)). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die entsprechende Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Diagonalgestalt gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy+dz = e \Leftrightarrow cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f \neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung: **L** = { }.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die dazugehörige rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z, dessen Diagonalelement =0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ **L** = {(l(r)|m(r)|…|t(r))| rε**R**} mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

Beispiele (lineare Gleichungssysteme, Gauß-Algorithmus):

a) (3 Unbekannte, 3 Gleichungen:)

Lineares Gleichungssystem:

$+ 2x + 1y - 1z = 0$
$+ 1x - 2y - 1z = 1$
$- 2x + 1y + 2z = 1$

Anfangstableau:

```
 2  1 -1 | 0
 1 -2 -1 | 1
-2  1  2 | 1
```

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 1*(*1*)

```
2  1 -1 | 0
0 -5 -1 | 2
0  2  1 | 1
```

2. Schritt: 5*(*3*) + 2*(*2*)

```
2  1 -1 | 0
0 -5 -1 | 2
0  0  3 | 9
```

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 2x + 1y - 1z = 0$
$- 5y - 1z = 2$
$+ 3z = 9$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$z = 3$
$y = -1$
$x = 2$

b) (4 Unbekannte, 4 Gleichungen:)

Lineares Gleichungssystem:

$+ 2a + 1b - 1c - 2d = -2$
$+ 4a - 2b + 2d = 4$
$- 2a + 1c + 1d = 1$
$+ 2a - 1b + 1c + 1d = -1$

Anfangstableau:

```
 2  1 -1 -2 | -2
 4 -2  0  2 |  4
-2  0  1  1 |  1
 2 -1  1  1 | -1
```

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) + 1*(*1*) / 1*(*4*) - 1*(*1*)

```
2  1 -1 -2 | -2
0 -4  2  6 |  8
0  1  0 -1 | -1
0 -2  2  3 |  1
```

2. Schritt: 4*(*3*) + 1*(*2*) / -2*(*4*) + 1*(*2*)

```
2  1 -1 -2 | -2
0 -4  2  6 |  8
0  0  2  2 |  4
0  0 -2  0 |  6
```

3. Schritt: 1*(*4*) + 1*(*3*)

```
2  1 -1 -2 |  -2
0 -4  2  6 |   8
0  0  2  2 |   4
0  0  0  2 | 10
```

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 2a + 1b - 1c - 2d = -2$
$- 4b + 2c + 6d = 8$
$+ 2c + 2d = 4$
$+ 2d = 10$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$d = 5$
$c = -3$
$b = 4$
$a = 0.5$

Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme

1. Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} -2x - 7y &= 6 \\ +10x + z &= 0 \\ +4y - z &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} +2x - 2y - z &= 5 \\ +5x + 10y + 2z &= -4 \\ -7x + 3y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} +3a + b - 2c &= -50 \\ -6a + 2b - 3c &= 60 \\ -8a + 3b - c &= 306 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} +2a - b + c + 4d &= 3 \\ +3a + 2b - c + 3d &= 2 \\ +4a + 3b - 3c + 6d &= 1 \\ -5a + 7b + 5c - d &= 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} +a - b + c + d &= 18 \\ +2a + b - 2c + d &= -50 \\ +4a + 3b + c - 2d &= 148 \\ +8a - 7b - 5c + 3d &= -6 \end{aligned}$$

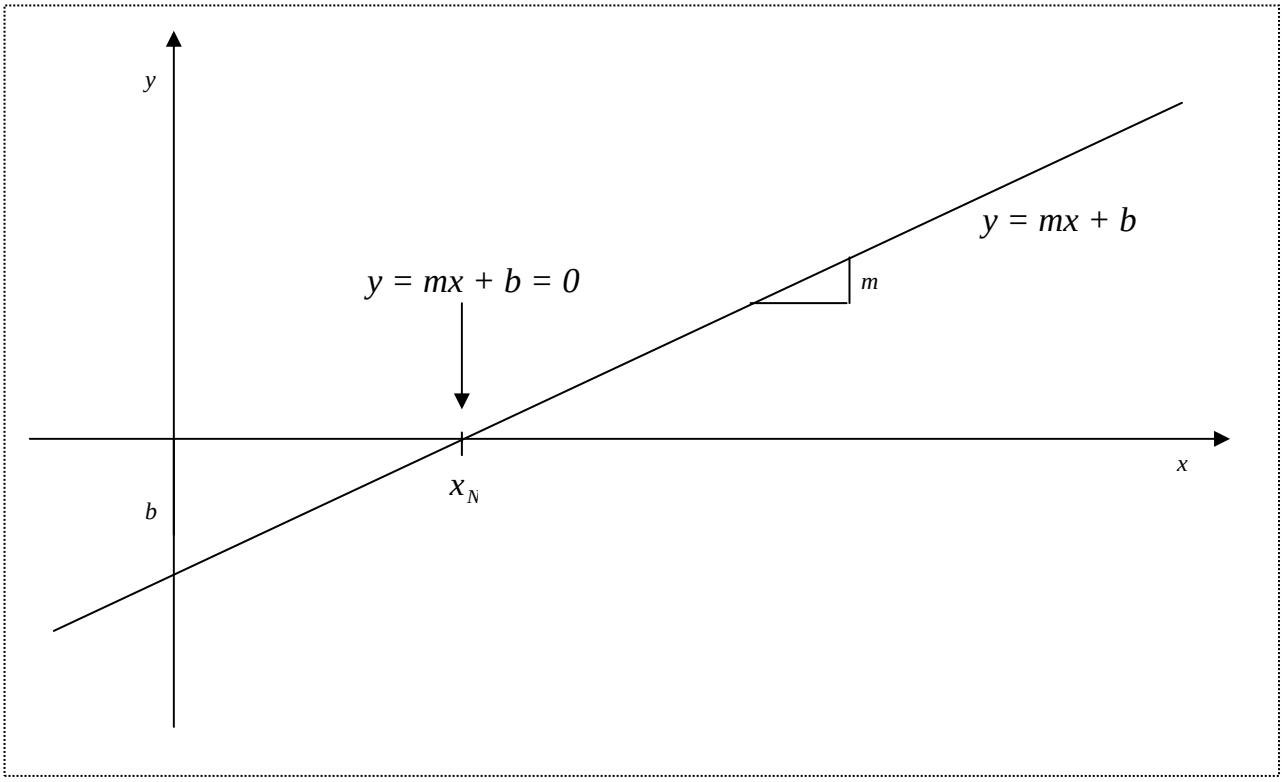
f)

$$\begin{aligned} +x - 2z &= 6 \\ +2x + 3y &= 8 \\ +3y + 4z &= -4 \end{aligned}$$

Lösungen: 1. x, y, z = bzw. a, b. c, d = 1a) 0,5; -1; -5 / 1b) 2; -2; 3 / 1c) -8; 102; 64 / 1d) 1; 0; 1; 0 / 1e) 20; -8; 24; -34 / f) x = 6+2t, y = -4(1+t)/3, z = t (unendliche viele Lösungen mit Parameter t).

Datenblatt: Geraden

Eine Gerade y = mx + b besitzt die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b, d.h.:



Es gilt: $S_y(0|b)$ ist y-Achsenabschnittspunkt der Gerade (Schnittpunkt mit der y-Achse), $N(x_N|0)$ Nullstelle der Geraden (Schnittpunkt mit der x-Achse) auf Grund von: $mx_N + b = 0$, d.h.:

$$x_N = \frac{-b}{m}$$

Die Steigung der Geraden errechnet sich mit zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Zu einer Geraden g: y = mx + b gehört der Steigungswinkel α mit:

$$\tan\alpha = m \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$$

Schneiden sich die Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$, so gibt es einen Schnittpunkt. Der Schnittpunkt S ist durch Gleichsetzen der Geraden zu ermitteln:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow S(x_S|y_S)$$

Geraden werden bestimmt durch zwei Punkte, die auf der Geraden liegen, oder durch einen auf der Gerade liegenden Punkt und die Geradensteigung. Es gilt also mit den Punkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ die Zweipunkteform der Geradengleichung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{oder} \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1$$

mit Geradensteigung als Steigung zwischen den Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Mit dem Punkt $P(x_1|y_1)$ und der Geradensteigung m ergibt sich die Punktsteigungsform der Gerad-

engleichung:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m \text{ oder } y=m(x-x_1)+y_1=mx-mx_1+y_1$$

Die <u>Bestimmung einer Geradengleichung</u> y = mx + b erfolgt auch über:

a) m, b gegeben -> y = mx +b
b) m, $P(x_1|y_1)$ gegeben -> $b = y_1 - mx_1$ -> y = mx +b
c) $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ gegeben -> lineares Gleichungssystem: $y_1=mx_1+b$, $y_2=mx_2+b$ -> m, b -> y = mx +b

---

Eine zu einer Geraden g: $y = mx + c_1$ <u>parallele Gerade</u> h: $y = mx + c_2$ durch einen Punkt $P(x_1|y_1)$ lautet:

$$y=m(x-x_1)+y_1=mx-mx_1+y_1$$

Die zu g: $y = m_1x + c_1$ <u>senkrechte Gerade</u> h: $y = m_2x + c_2$ durch einen Punkt $P(x_1|y_1)$ ergibt sich vermöge $m_2=-1/m_1$ zu:

$$y=m_2(x-x_1)+y_1=-\frac{1}{m_1}x+\frac{x_1}{m_1}+y_1.$$

<u>Beispiele</u> (Geraden):

a) Die Gerade g mit Steigung 2 und y-Achsenabschnitt -8 heißt: g: y = 2x – 8.

b) Die Gerade g durch den Punkt $S_y(0|7)$ und mit der Steigung -12 heißt: g: y = -12x + 7.

c) Die Gerade g durch den Punkt P(4|1) und mit der Steigung -4 heißt: g: y = -4x + 17 wegen:

$$\frac{y-1}{x-4}=-4 \Leftrightarrow y-1=-4(x-4) \Leftrightarrow y=-4x+17.$$

d) Die Gerade g durch die Punkte P(1|2) und Q(3|4) heißt: g: y = x + 1 wegen:

$$\frac{y-2}{x-1}=\frac{4-2}{3-1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{x-1}=1 \Leftrightarrow y-2=x-1 \Leftrightarrow y=x+1.$$

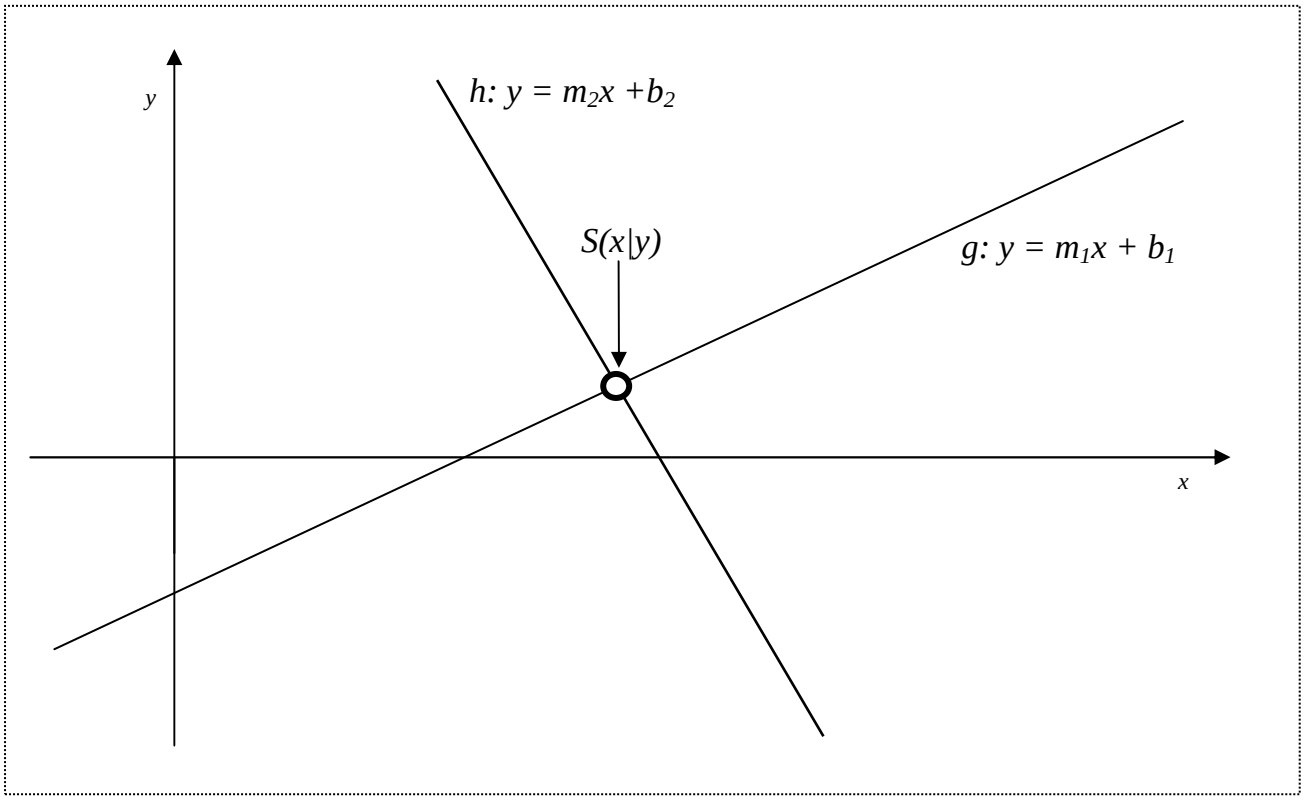
e) Die Gerade g: y = -2x + 5 hat als Achsenschnittpunkte: $S_y(0|5)$, N(2,5|0). Der Steigungswinkel der Geraden beträgt: $\alpha = \tan^{-1}(2) = 63{,}43°$.

f) Zu der Geraden g: y = 5x – 7 ist die Gerade h: y = 5x + 2 eine parallele Gerade durch den Punkt P(2|12), denn:

Ansatz: h: y = mx + b
Parallelität der Geraden g und h -> m = 5
-> y = 5x + b
P(2|12) liegt auf h -> 12 = 5·2 + b -> 12 = 10 + b -> 2 = b
-> y = 5x + 2

g) Gegeben ist die Gerade g: y = 0,25x + 3, gesucht ist eine zu g senkrechte Gerade h, die durch den Punkt P(-4|6) läuft. Die Gerade h hat die Steigung $m_h = -1/m_g = -4$, so dass sich mit dem Ansatz h: $y = m_hx + b$ zunächst y = 4x + b ergibt. Das Einsetzen von P(-4|6) in die Geradengleichung führt zu: 6 = -4·4 + b -> 6 = -16 + b -> 22 = b, also zu: y = 4x + 22.

Beispiele (Schnittpunkt von Geraden):



a) Für die Geraden g: y = 2x – 5 und h: y = -3x + 7 ergibt das Gleichsetzen:

2x – 5 = -3x + 7	| +3x
5x – 5 = 7	| +5
5x = 12	| :5
x = 2,4	

Einsetzen von x = 2,4 in die Gerade g führt auf: y = 2·2,4 – 5 = -0,2. Der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h lautet also: S(2,4|-0,2).

b) Für die Geraden g: y = 3x +2 und h: y = 4 + 3x ergibt das Gleichsetzen:

3x + 2 = 4 + 3x	| -3x
2 = 4	

und damit einen Widerspruch. Die Geraden schneiden sich nicht und sind damit parallel.

Aufgabenblatt: Geraden

1. Zeichne die folgenden Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

a) $y = 3x + 1$ b) $y = -2x + 5$ c) $y = 0{,}5x - 4$

d) $y = \frac{3}{4}x$ e) $y = -\frac{2}{5}x + 4$ f) $y = 7 - x$

2. Zeichne die folgenden Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Berechne die Schnittpunkte der jeweiligen Geraden mit den Achsen des Koordinatensystems.

a) $y = 4x - 3$ b) $y = \frac{3}{4}x + 1$ c) $y = -\frac{2}{5}x$

d) $y = -3x + 10$ e) $y = x + 2$ f) $y = 12 - 3x$

3. Bestimme die Geradengleichungen.

a) P(4|3), m = 2 b) P(-1|3), m = -0,5 c) P(-2|-4), $m = \frac{1}{4}$

d) P(2|-2), Q(6|8) e) P(-4|0), Q(2|1) f) P(2|5), Q(5|2)

4. Bestimme die parallelen Geraden durch den Punkt P.

a) $y = 3x + 2$, P(1|7) b) $y = -2x + 5$, P(-1|0) c) $y = -\frac{1}{3}x + 2$, P(4|5)

d) $y = 5 - x$, P(-2|3) e) $y = \frac{1}{5}x$, P(0|-4) f) $y = -\frac{5}{6}x + 3$, P(10|-1)

5. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g und h.

a) g: $y = 4x$, h: $y = 3x + 1$ b) g: $y = 10 - 2x$, h: $y = 4$

c) g: $y = x - 7$, h: $y = \frac{1}{10}x$ d) g: $y = 2x + 1$, h: $y = -2x + 7$

e) g: $y = \frac{1}{2}x + 2$, h: $y = \frac{1}{2}x + 1$ f) g: $y = \frac{1}{4}x + 5$, h: $y = -2x - 7$

g) g: $y = 3x - 5$, h: $y = -4x - 12$ h) g: $y = 5x + 4$, h: $y = 0{,}5x - 5$

Lösungen: 1. y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|b)$, Steigungsdreieck m an S_y -> Gerade y=mx+b.
2a) $S_y(0|-3)$, N(0,75|0) / 2b) $S_y(0|1)$, N(-4/3|0) / 2c) $S_y(0||0)$ = N(0|0) / 2d) $S_y(0|10)$, N(10/3|0) /
2e) $S_y(0|2)$, N(-2|0) / 2f) $S_y(0|12)$, N(4|0).
3a) y=2x-5 / 3b) y=-0,5x+2,5 / 3c) y=0,25x-3,5 / 3d) y=2,5x-7 / 3e) y=x/3+2/3 / 3f) y=-x+7.
4a) y=3x+4 / 4b) y=-2x-2 / 4c) y=-x/3+19/3 / 4d) y=-x+1 / 4e) y=0,2x+4 / 4f) y=-5x/6+22/3.
5a) S(1|4) / 5b) S(3|4) / 5c) S(70/9|7/9) / 5d) S(1,5|4) / 5e) g || h / 5f) S(-16/3|11/3) / 5g) S(-1|-8) / 5h) S(-2|-6).

Normalparabeln (mit dem Koeffizienten 1 vor dem x^2) sind von der Form:

$$y = x^2 + px + q \text{ (Normalform)}$$
$$y = (x-d)^2 + c \text{ (Scheitelform)}$$

mit den Zahlen p, q und dem Scheitelpunkt S(d|c).

Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}),$$

so dass gilt: $d = -\frac{p}{2}$ und $c = q - \frac{p^2}{4}$ und damit:

$$y = x^2 + px + q \Rightarrow S(-\frac{p}{2} \mid q - \frac{p^2}{4})$$

Umgekehrt kann aus jeder Scheitelform die Normalform der Parabel gebildet werden mittels der binomischen Formeln:

$$y = (x-d)^2 + c = x^2 - 2dx + d^2 + c = x^2 + px + q$$

mit: $p = -2d$, $q = d^2 + c$.

Nullstellen, d.h. Schnittpunkte der Normalparabel mit der x-Achse, sind Lösungen der Gleichung y = 0, also:

$$y = 0$$
$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$\Rightarrow N_1(x_1|0),\ N_2(x_2|0)$$

gemäß der p-q-Formel. Je nach Diskriminante ($D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, unter der Wurzel der p-q-Formel) gibt es keine (D<0), eine (D=0), zwei Nullstellen (D>0). Existieren die beiden Nullstellen der Normalparabel, so ergibt sich der Scheitelpunkt S(d|c) aus:

$$x_1, x_2 \text{ Nullstellen} \Rightarrow d = \frac{x_1 + x_2}{2},\ c = d^2 + pd + q,$$

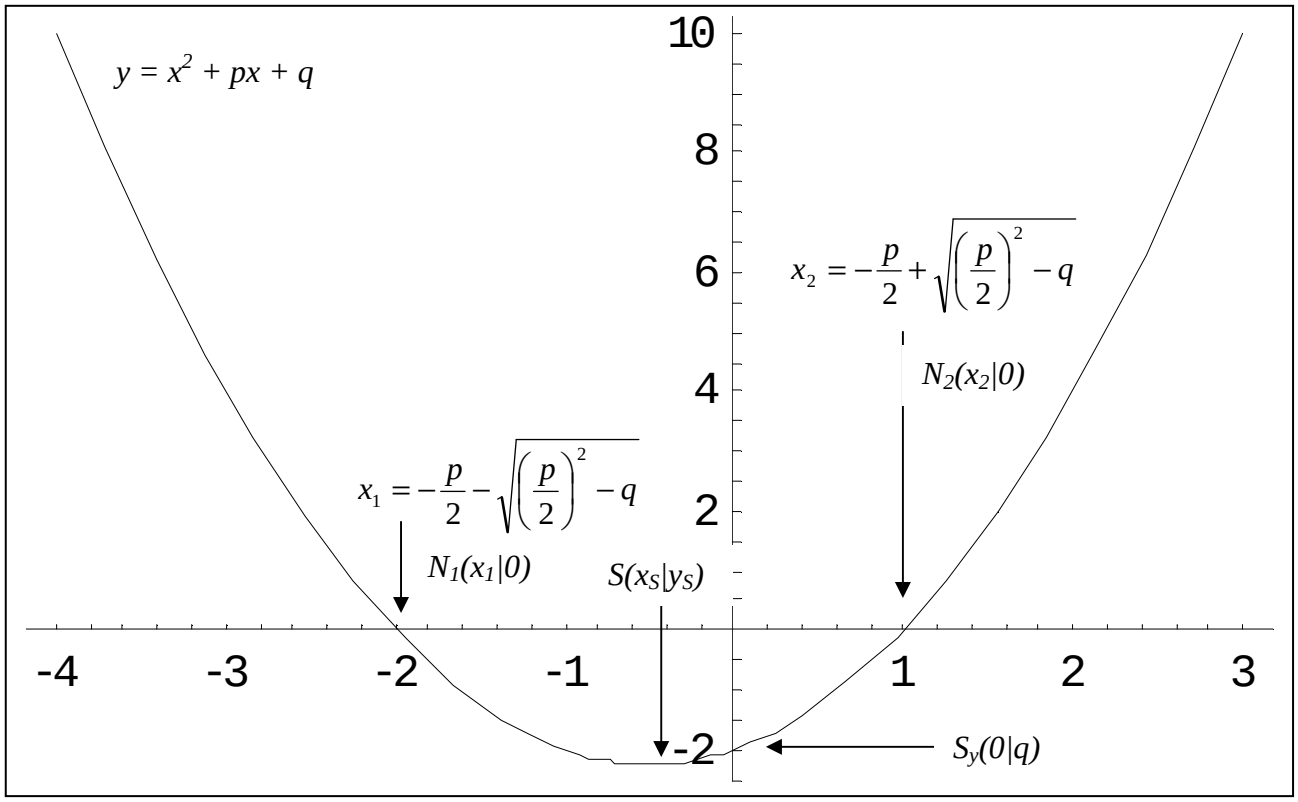
d.h.: der Scheitelpunkt liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen auf der Parabel.

Der y-Achsenabschnitt bzw. der y-Achsenabschnittspunkt, d.h. der Schnittpunkt der Normalparabel mit der y-Achse, folgt aus x = 0, also:

$$x = 0 \Rightarrow y = q \Rightarrow S_y(0|q)$$

Normalparabeln $y = (x-d)^2 + c$ ergeben sich aus der Grundparabel $y = x^2$ durch Verschiebung des Scheitelpunktes im Ursprung O(0|0) um d nach rechts (d>0) bzw. links (d<0) und nach oben (c>0) bzw. nach unten (c<0) zum Scheitelpunkt S(d|c).

Scheitelpunkt, Nullstellen, y-Achsenabschnitt einer Normalparabel sind dann:



Allgemeine Parabeln sind Funktionen von der Form:

$y = ax^2 + bx + c$ (Normalform) $y = a(x-x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform)

mit den Zahlen a, b, c, $a \neq 0$, und dem Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$. Die Parabel ist nach oben geöffnet, wenn $a>0$, nach unten geöffnet, wenn $a<0$; für $a=-1$ ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist $-1<a<1$, so ist die Parabel gestaucht, ist $a<-1$ oder $a>1$, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur Normalparabel.
Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Also gilt:

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow S(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac-b^2}{4a})$

Nullstellen errechnen sich aus:

$y = 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\Rightarrow N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$

Je nach Diskriminante (D = $b^2 - 4ac$, unter der Wurzel der a-b-c-Formel) gibt es keine (D<0), eine (D=0), zwei Nullstellen (D>0). Existieren die beiden Nullstellen der Parabel, so ergibt sich der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ aus:

x_1, x_2 Nullstellen => $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$

Der y-Achsenabschnitt, d.h. der Schnittpunkt der Normalparabel mit der <u>y-Achse</u>, folgt aus <u>x = 0</u>, also:

x = 0 => y = c => $S_y(0\|c)$

<u>Beispiele</u> (Parabeln):

a) Die Parabel $y = 2x^2 + 81$ kann geschrieben werden als $y = 2(x+0)^2 + 81$ und besitzt daher den Scheitelpunkt S(0|81).

b) Es ergibt die quadratische Ergänzung bei der nachstehenden Parabel

$$y = x^2 - x + 2 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{3}{4}$$

den Scheitelpunkt S(0,5|1,75).

c) Die Parabel $y = x^2 - 5x - 6$ hat den Scheitelpunkt S(2,5|-12,25), die Nullstellen N(-1|0), N(6|0), den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|-6)$.

d) Die Normalparabel mit Scheitelpunkt S(-4|3) lautet: $y = (x+4)^2 + 6 = x^2 + 8x + 19$.

e) Die Normalparabel $y = x^2 + px + q$ soll durch die Punkte P(-2|-15) und Q(3|-1) gehen. Zur Bestimmung der Parabel wird das folgende lineare Gleichungssystem aufgestellt:

P(-2|-15) => $-15 = (-2)^2 + p\cdot(-2) + q$ => $-2p + q = -19$
Q(3|-1) => $-1 = 3^2 + p\cdot 3 + q$ => $3p + q = -10$

Das Auflösen des linearen Gleichungssystems führt auf: p = 1,8; q = -15,4. Die Parabelgleichung lautet damit: $y = x^2 + 1{,}8x - 15{,}4$.

f) Die Gerade g: y = 2x – 5 und die nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt S(3|-2) schneiden sich in den Schnittpunkten $S_1(2|-1)$ und $S_2(6|7)$, denn Gleichsetzen von Parabel- und Geradengleichung ergibt mit der Parabelgleichung $y = (x-3)^2 - 2 = x^2-6x+9-2 = x^2-6x+7$:

$x^2 - 6x + 7 = 2x - 5$	| -2x
$x^2 - 8x + 7 = -5$	| +5
$x^2 - 8x + 12 = 0$	(p-q-Formel)
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 12} = 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2$	(Ausrechnen)
$x_1 = 2$, $x_2 = 6$	(Lösungen)

Einsetzen der x-Werte in die Geradengleichung ergibt: $y_1 = -1$, $y_2 = 7$ und damit die eben genannten Schnittpunkte. Der Abstand der Schnittpunkte voneinander ist dann:

$$\overline{S_1S_2} = \sqrt{(6-2)^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94 \text{ LE}$$

(Satz des Pythagoras: $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ ->

$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

als Abstand der Punkte P und Q).

g) Die Parabel $y = \frac{1}{6}x^2 - 6$ hat als Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-6)$, $N_1(-6|0)$, $N_2(6|0)$. Die drei Punkte bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit Fläche A = gh/2 = 12·6/2 = 36 FE (Grundseite g=12, Höhe h=6) und mit Umfang u = g + 2a = 28,97 (Schenkel a = $\overline{S_yN_2} = 8{,}49$).

Aufgabenblatt: Parabeln

1. Bestimme den Scheitelpunkt der folgenden Normalparabeln.

a) $y = x^2 + 4$ b) $y = x^2 + 3x – 4$ c) $y = (x+1,5)^2 – 4,5$ d) $y = x^2 – 2x + 12$

e) $y = (x–5)^2 + 3$ f) $y = (x+2,3)^2 – 1,8$ g) $y = x^2 + 9x + 1$ h) $y = x^2 – 14x + 49$

2. Für die gegebenen Parabeln sind der Scheitelpunkt, die Nullstellen und der Schnittpunkt mit der y-Achse zu bestimmen.

a) $y = x^2 – 10,24$ b) $y = -0,5x^2 + 8$ c) $y = (x+2,5)^2 + 2$ d) $y = (x–3)^2 – 4$

e) $y = x^2 – 5x + 6$ f) $y = x^2 + 0,5x – 5$ g) $y = \frac{8}{5}x^2 + 2$ h) $y = x^2 + 4x + 6$

3. Berechne die Schnittpunkte zwischen allgemeiner Parabel f(x) und Gerade y.

a) $f(x) = x^2+2x–3$, $y = 4x–3$ b) $f(x) = 3x^2–7x+12$, $y = -x+9$

c) $f(x) = -2x^2+5x$, $y = 2$ d) $f(x) = -0,5x^2+4x+3$, $y = x–5$

e) $f(x) = 0,5(x-2)^2–4,5$, $y = 10–2x$ f) $f(x) = -x^2+3x+5$, $y = -0,5x+12$

g) $f(x) = 0,25x(x+5)$, $y = x$ h) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2+8$, $y = 2,5x–10$

4. Berechne die Schnittpunkte zwischen den allgemeinen Parabeln f(x) und g(x).

a) $f(x) = -2x^2+5$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2–35$ b) $f(x) = x^2+3x+3$, $g(x) = x^2–4x+10$

c) $f(x) = x(x+5)$, $g(x) = 0,5x^2–2,5x$ d) $f(x) = 2x^2–5x+3$, $g(x) = -0.5x^2+5x–7$

e) $f(x) = 1,5x^2–6x+9$, $g(x) = -2x^2–4x+3$ f) $f(x) = \frac{1}{5}(x-4)^2 - 3$, $g(x) = x^2+1$

g) $f(x) = (x+2)^2–5$, $g(x) = 2x^2–4x$ h) $f(x) = 0,1x^2+3,9x–9$, $g(x) = -0,8x^2+0,8x–5$

5. Die allgemeine Parabel f(x) soll um x_V Längeneinheiten (LE) nach rechts bzw. links und um y_V Längeneinheiten nach oben bzw. unten verschoben werden. Wie lautet die Funktionsgleichung der verschobenen allgemeinen Parabel g(x) in Normalform?

a) $f(x) = (x+3)^2+5$; 4 LE nach rechts, 3 LE nach unten

b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-10)^2 - 4$; 6,5 LE nach links, 5 LE nach oben

c) $f(x) = x^2–7$; 4 LE nach rechts, 5,5 LE nach oben

d) $f(x) = x^2–7x–13$; 5 LE nach links, 25,25 LE nach oben

e) $f(x) = 10x^2–7x+5$; 2 LE nach rechts, 8 LE nach unten

Lösungen: 1. S = Scheitelpunkt: 1a) S(0|4) / 1b) S(-1,5|-6,25) / 1c) S(-1,5|-4,5) / 1d) S(1|11) / 1e) S(5|3) / 1f) S(-2,3|-1,8) / 1g) S(-4,5|-19,25) / 1h) S(7|0).
2. N = Nullstelle, S = Scheitelpunkt, S_y = y-Achsenabschnittspunkt: 2a) S(0|-10,24), N(-3,2|0), N(3,2|0), S_y(0|-10,24) / 2b) S(0|8), N(-4|0), N(4|0), S_y(0|8) / 2c) S(-2,5|2), S_y(0|8,25) / 2d) S(3|-4), N(1|0), N(5|0), S_y(0|5) / 2e) S(2,5|-0,25), N(2|0), N(3|0), S_y(0|6) / 2f) S(-0,25|-5,0625), N(-2,5|0), N(2|0), S_y(0|-5) / 2g) S(0|2), S_y(0|2) / 2h) S(-2|2), S_y(0|6).
3. P = Schnittpunkt: 3a) P_1(0|-3), P_2(2|5) / 3b) P(1|8); Gerade y ist Tangente an der Parabel f(x) / 3c) P_1(0,5|2), P_2(2|2) / 3d) P_1(-2|-7), P_2(8|3) / 3e) P_1(-5|20), P_2(5|0) / 3f) keine Schnittpunkte; Gerade ist Passante / 3g) y = x ist die 1. Winkelhalbierende; P_1(-1|-1), P_2(0|0) / 3h) P_1(-12|-40), P_2(4,5|1,25).
4. P = Schnittpunkt: 4a) P_1(-4|-27), P_2(4|-27) / 4b) P(1|7) (Schnittpunkt) / 4c) P_1(-15|150), P_2(0|0) /4d) P(2|1) (Berührpunkt) / 4e) keine Schnittpunkte / 4f) P(-1|2) (Berührpunkt) / 4g) P_1(-1|6), P_2(9|126) / 4h) P_1(-40/9|-24,358), P_2(1|-5).
5. g(x) =: 5a) $x^2–2x+3$ / 5b) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{33}{16}$ / 5c) $x^2–8x+14,5$ / 5d) $x^2+3x+2,25$ 5e) $10x^2–47x+51$.

Datenblatt: Mittlere, momentane Änderungsrate, Ableitung

Für zwei verschiedene Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ auf der Zahlenebene ergibt sich die Steigung m als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (Differenzenquotient)}$$

Der Steigung entspricht ein Steigungswinkel $\varphi = \tan^{-1}(m)$.

Liegen die Punkte P und Q auf einer Funktion f: D_f -> **R**, gilt also: $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$, so wird der Differenzenquotient zur mittleren (durchschnittlichen) Änderungsrate der Funktion auf dem Intervall $[x_1; x_2] \subset D_f$:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ (mittlere Änderungsrate)}$$

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f(x) auf einem vorgegebenen Intervall $[a; b] \subset D_f$ ist:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ (mittlere Änderungsrate)}$$

Haben für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ die Punkte P und Q die Form $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(x_0+h|f(x_0+h))$, so wird die mittlere Änderungsrate

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

beim Grenzübergang h -> 0 im Falle der Existenz des Grenzwerts zur momentanen Änderungsrate oder Ableitung der Funktion f im Punkt x_0:

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h->0]{} m_t = f'(x_0) \text{ (momentane Änderungsrate)}$$

mit m_t als Steigung der Tangente t im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an die Funktion f(x):

$$t: \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ (Tangente)}$$

Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung oder Tangentensteigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Höhere Ableitungen sind: f''(x) = (f'(x))', f'''(x) = (f''(x))' usw. Die Ermittlung der Ableitungsfunktionen f'(x) usw. erfolgt über die Ableitungsregeln (für Funktionen u(x), v(x) und reelle Zahlen k, r):

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x) \text{ (Summenregel)}$$

$$(u(x) + r)' = u'(x) \text{ (additive Konstante)}$$

$$(ku(x))' = ku'(x) \text{ (multiplikative Konstante, konstanter Faktor)}$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \text{ (Kettenregel: äußere Ableitung × innere Ableitung)}$$

Für <u>spezielle Funktionen</u> (mit reellen a, b, n, r) stellen sich die Ableitungsregeln wie folgt dar:

$$(r)' = 0\,,\ (x^n)' = nx^{n-1},\ ((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}$$ (Potenzregel)

$$(\sin x)' = \cos x\,,\ (\cos x)' = -\sin x\,,$$

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)\,,\ (\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$$

(trigonometrische Funktionen)

$$(e^x)' = e^x\,,\ (e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$$ (natürliche Exponentialfunktionen)

<u>Beispiele</u> (Ableitungen):

a) $f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 13$ => $f'(x) = 6x^2 - \frac{8}{3}x$ (Faktor-, Summen-, Potenzregel)

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^3(x + \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{10}x^5$ => $f'(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^4$ (Faktor-, Summen-, Potenzregel)

c) $f(x) = \frac{x^3}{7} + \frac{2}{5}x^2 + 4x$ => $f'(x) = \frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{5}x + 4$ (Faktor-, Summen-, Potenzregel)

d) $f(x) = x^2 - 5\sin x$ => $f'(x) = 2x - 5\cos x$ (Summen-, Potenzregel, trigonometrische Ableitung)

e) $f(x) = \frac{\cos x}{4} + \frac{\sin x}{3}$ => $f'(x) = -\frac{\sin x}{4} + \frac{\cos x}{3}$ (Summenregel, trigonometrische Ableitung)

f) $f(x) = \frac{5}{4}\cos(2x) - 1$ => $f'(x) = -\frac{5}{2}\sin(2x)$ (Summenregel, trigonometrische Ableitung)

g) $f(x) = 2x + 1 - 3\sin(\pi x)$ => $f'(x) = 2 - 3\pi\cos(\pi x)$ (Summenregel, trigonometrische Ableitung)

h) $f(x) = 2x + 3 - 10e^x$ => $f'(x) = 2 - 10e^x$ (Summenregel, exponentielle Ableitung)

i) $f(x) = 12 + 3e^x - 2e^{-x}$ => $f'(x) = 3e^x + 2e^{-x}$ (Summenregel, exponentielle Ableitung)

j) $f(x) = \frac{4}{3}e^{-2x+5}$ => $f'(x) = -\frac{8}{3}e^{-2x+5}$ (Faktorregel, exponentielle Ableitung, Kettenregel)

k) $f(x) = -x + 5 + \frac{1}{2}e^{-0,5x}$ => $f'(x) = -1 - \frac{1}{4}e^{-0,5x}$ (Summenregel, exponentielle Ableitung)

Aufgabenblatt: Ableitungen

1. Bilde die ersten beiden Ableitungen f‘(x), f‘‘(x) der nachstehenden Funktionen f(x):

a) $f(x) = 4x - 7$

b) $f(x) = 3x^2 - 7x + 11$

c) $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2$

d) $f(x) = \frac{x^2}{4}(2x + 3)$

e) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 + 2x^2 - 8$

f) $f(x) = \frac{10}{3}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$

g) $f(x) = 5 + 2\cos(4x)$

h) $f(x) = \frac{6}{5}\sin(\frac{\pi}{2}x) + 1$

i) $f(x) = 5x - 8 + 2\sin x$

j) $f(x) = -\frac{5}{4}e^x + 3$

k) $f(x) = \frac{2}{3}e^x + 6x - \frac{10}{7}$

l) $f(x) = 4e^{-2x} + \frac{11}{5}$

m) $f(x) = \frac{8}{5}e^{-0,5x+3}$

n) $f(x) = 4 + \frac{1}{2}e^{-1,5x} + \frac{1}{4}e^{2x}$

o) $f(x) = 4x + 1 - \frac{1}{10}e^{-3x}$

p) $f(x) = -2x - 4 + e^{2x}$

q) $f(x) = x^2 + 5x + e^{-2x}$

r) $f(x) = 4\sin x - 5e^{-x}$

s) $f(x) = \frac{e}{12}(x^3 - 5x + 2)$

t) $f(x) = \pi(x^2 + 4x - 5) + \cos(\pi x) + \frac{e^2}{2}$

2. Wie groß ist die Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0?

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = x(x^2 + 3x - 5)$, $x_0 = -3$

c) $f(x) = 6 + e^{-2x} + 3e^x$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = x + 2\sin(2x)$, $x_0 = \pi$

3. An welchen Punkten stimmt die Ableitung der Funktion f(x) mit der Steigung m überein?

a) $f(x)=\frac{8}{3}x^3-6x$, m = 2

b) $f(x)=2x-e^{-4x}$, m = 6

c) $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x$, m = 0,5, xϵ[0;2π]

4. An welchen Punkten hat die Funktion f(x) waagerechte Tangenten?

a) $f(x)=x^2+3x-4$

b) $f(x)=\frac{1}{8}x^3(x-4)$

c) $f(x)=x+\cos x$, xϵ[-π;3π]

d) $f(x)=4x+3-2e^{0,5x}$

5. An welchen Punkten hat die Funktion f(x) Tangenten, die parallel zur vorgegebenen Geraden sind?

a) $f(x)=3x^2-\frac{17}{4}x+2$, $y=-\frac{x}{4}$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3{,}5x$, $y=\frac{1}{2}x-3$

c) $f(x)=x+3e^x$, $y=10x$

6. An welchen Punkten hat die Funktion f(x) Tangenten, die senkrecht auf den vorgegebenen Geraden stehen?

a) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8$, $y=0{,}8x+5$

b) $f(x)=\frac{3}{2}x^2(x^2-8)$, $y=\frac{1}{32}x-\frac{5}{8}$

c) $f(x)=\cos(\pi x)+4$, $y=\frac{1}{\pi}x+\frac{\pi^2}{4}$, xϵ[0;1]

<u>Lösungen</u>: 1. f'(x) =, f''(x) =: 1a) 4, 0 / 1b) 6x-7, 6 / 1c) $-9x^2/4+2x$, -9x/2+2 / 1d) $3x^2/2+3x/2$, 3x+3/2 / 1e) $0{,}8x^3+4x$, $2{,}4x^2+4$ / 1f) $-\frac{10}{3}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$, $-\frac{10}{3}\cos x-\frac{3}{2}\sin x$ / 1g) -8sin(4x), -32cos(4x) / 1h) $\frac{3\pi}{5}\cos(\frac{\pi}{2}x)$, $-\frac{3\pi^2}{10}\sin(\frac{\pi}{2}x)$ / 1i) 5+2cos*x*, -2sin*x* / 1j) $-5e^x/4$, $-5e^x/4$ / 1k) $2e^x/3+6$, $2e^x/3$ / 1l) $-8e^{-2x}$, $16e^{-2x}$ / 1m) $-4e^{-0,5x+3}/5$, $2\,e^{-0,5x+3}/5$ / 1n) $-0{,}75e^{-1,5x}+0{,}5e^{2x}$, $0{,}375e^{-0,5x}+0{,}5e^{2x}$ / 1o) $4+0{,}3e^{-3x}$, $-0{,}9e^{-3x}$ / 1p) $-2+2e^{2x}$, $4e^{2x}$ / 1q) $2x+5-2e^{-2x}$, $2+4e^{-2x}$ / 1r) $4\cos x+5e^{-x}$, $-4\sin x-5e^{-x}$ / 1s) $e(3x^2-5)/12$, ex/2 / 1t) π(2x+4)–πsin(πx), $2\pi-\pi^2\cos(\pi x)$.
2. $f'(x_0)$ =: 2a) 2 / 2b) 4 / 2c) 1 / 2d) 5.
3. f'(x) = m / 3a) $P_1(-1|10/3)$, $P_2(1|-10/3)$ / 3b) P(0|-1) / 3c) $P_1(\pi/2|\pi/4-1)$, $P_2(3\pi/2|3\pi/4+1)$.
4. f'(x) = 0 / 4a) P(-1,5|-6,25) / 4b) $P_1(|0|0)$, $P_2(3|-27/8)$ / 4c) $P_1(\pi/2|\pi/2)$, $P_2(5\pi/2|5\pi/2)$ / 4d) P(2ln*4*|-5+8ln*4*).
5. f'(x) = y' / 5a) P(1,5|2,375) / 5b) $P_1(1|11/6)$, $P_2(3|1,5)$ / 5c) P(ln*3*|9+ln*3*).
6. f'(x) = -1/y' / 6a) - / 6b) P(2|-24) / 6c) P(0,5|4).

Datenblatt: Tangenten

Tangenten sind Geraden $t(x) = y = m_t x + c_t$ an eine Funktion f(x) in einem Punkt $B(x_0|f(x_0)) = B(u|f(u))$, dem sog. Berührpunkt. Im Berührpunkt stimmen Funktion und Tangente in Funktionswert und Steigung überein, d.h. es gilt:

$$f(x_0) = y(x_0) = t(x_0)$$
$$f'(x_0) = m_t$$

Möglichkeit 1	Möglichkeit 2	Möglichkeit 3
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Ansatz: y = mx + b als Tangentenformel	Ansatz: y = mx + c als Tangentenformel
Einsetzen in Tangentenformel	Steigung $m = f'(x_0)$	Steigung $m = f'(x_0)$
Tangente: t: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	y-Achsen-Abschnitt $b = f(x_0) - mx_0$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Tangente

Ein Berührpunkt $B(x_0|y_0)$ zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) hat die Eigenschaften:

$$f(x_0) = g(x_0) = y_o$$
$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

Zur Bestimmung von Berührpunkten ist zunächst die einfache der beiden Gleichungen nach x_0 aufzulösen und x_0 in die andere Gleichung zur Überprüfung der Gleichheit einzusetzen.

Schnittpunkte $S(x_0|y_0)$, in denen sich Funktionen f(x) und g(x) senkrecht schneiden, genügen den Eigenschaften:

$$f(x_0) = g(x_0) = y_o$$
$$g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Zur Bestimmung dieser Schnittpunkte ist zunächst die einfache der beiden Gleichungen nach x_0 aufzulösen und x_0 in die andere Gleichung zur Überprüfung der Gleichheit einzusetzen.

Nicht konstante Geraden (auch Tangenten, Normalen), die keine Ursprungsgeraden sind, bilden zusammen mit der x- und y-Achse Dreiecke mit dem Koordinatenursprung O(0|0), dem y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|y(0))$ und der Nullstelle $N(x_N|0)$ als Ecken. Dann gilt die Flächenformel: $A_\Delta = gh/2$ mit $g = |x_N|$ und $h = |y(0)|$.

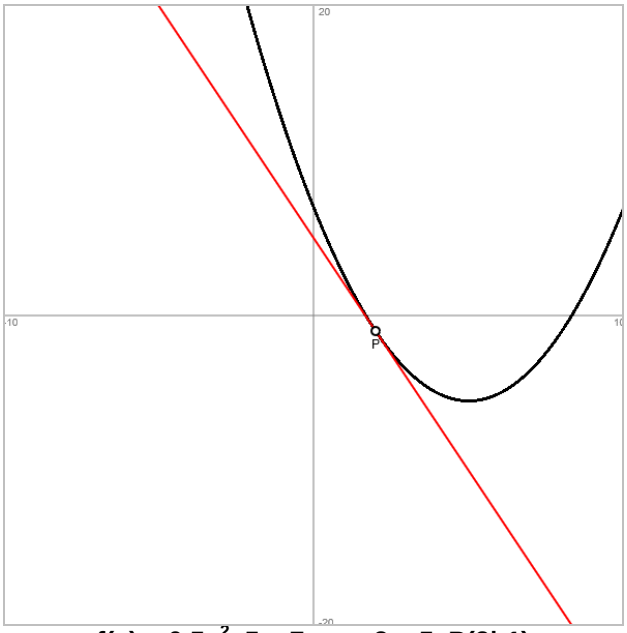
Beispiele (Tangenten):

a) Berechne die Gleichung der Tangente an die Parabelfunktion f(x) an der Stelle x_0 mit: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$, $x_0 = 2$.

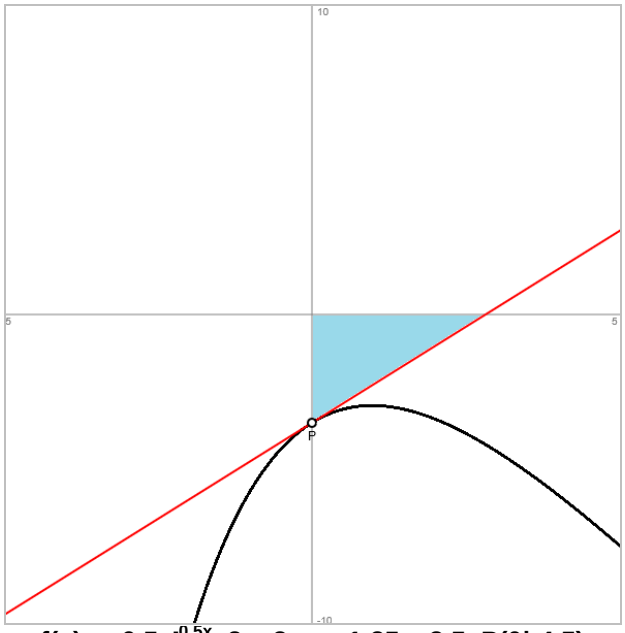
Lösung:

Allgemein gilt die Formel der Tangentengleichung: $t: y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ mit Funktion f(x), Ableitungsfunktion f'(x) und t als Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0. Wir berechnen daher aus Funktion

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+7$ und Ableitung $f'(x)=x-5$ die Werte $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2-5\cdot 2+7=2-10+7=-1$, $f'(2)=2-5=-3$ für x_0 = 2. Die Tangente an die Funktion an der Stelle x_0 = 2 lautet mittels Einsetzen von f(2) und f'(2) in die Tangentengleichung: t: y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) + (-1) = -3x + 6 – 1 = -3x + 5.



f(x) = 0,5x^2–5x+7, y = -3x+5, P(2|-1)



f(x) = -6,5e$^{-0,5x}$–2x+3, y = 1,25x–3,5, P(0|-4,5)

b) Bestimme die Tangente an die Funktion $f(x)=-\frac{13}{2}e^{-0,5x}-2x+3$ im Punkt P(0|f(0)). Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck zwischen Tangente und Achsen des Koordinatensystems?

<u>Lösung</u>:

I. Als Gerade hat eine Tangente die Form y = mx+b, so dass mit Funktion $f(x)=-\frac{13}{2}e^{-0,5x}-2x+3$ und 1. Ableitung $f'(x)=\frac{13}{4}e^{-0,5x}-2$ gilt: $f(0)=-\frac{13}{2}-0+3=-3{,}5$, $f'(0)=\frac{13}{4}-2=\frac{5}{4}$. Mit x_0 = 0 folgt für den Punkt auf der Tangente: P(0|-3,5) und für die Tangentensteigung: m = 1,25. Einsetzen in den Term y = mx+b (y=-3,5; m=1,25; x=0) führt auf den Wert von b vermöge: -3,5 = 1,25·0+b ⇔ b = -3,5. Die Tangentengleichung lautet also mit m = 1,25 und b = -3,5: y = 1,25x – 3,5.

II. Um das Dreieck zwischen Tangente und x-, y-Achse des Koordinatensystem zu erfassen, erkennen wir, dass der y-Achsenabschnittspunkt der Tangente mit dem Punkt P(0|-3,5) übereinstimmt, so dass sich die Dreieckshöhe als h = 3,5 ergibt. Hinsichtlich der Grundseite des Dreiecks ist die Nullstelle der Tangente zu bestimmen mit: y = 1,25x–3,5 = 0 ⇔ 1,25x = 3,5 ⇔ x = 2,8. Dann ist die Grundseite g = 2,8. Der Flächeninhalt des gesuchten Dreiecks errechnet sich damit als: A_Δ = gh/2 = 2,8·3,5/2 = 4,9 FE.

Aufgabenblatt: Tangenten

1. Bestimme die Tangente an der Stelle x_0 an die Funktion f(x):

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$, $x_0 = 4$

b) $f(x)=(2x-3)(3x+5)$, $x_0 = 1$

c) $f(x)=4-2e^{-x}$, $x_0 = 0$

d) $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{6}\right)-\frac{1}{4}$, $x_0 = \pi$

2. Bestimme die Tangenten an den Nullstellen der Funktion f(x).

a) $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-4)(2x+1)$

b) $f(x)=6-e^{-0,2x}$

c) $f(x)=4\sin(\frac{\pi}{4}x)$, $0 \le x \le 8$

3. Zeige, dass an den angegebenen Stellen x_0 Schnittpunkte oder Berührpunkte zwischen den Funktionen f(x) und g(x) vorliegen.

a) $f(x)=x^3-12x-3$, $g(x)=36x-131$, $x_0 = 4$

b) $f(x)=x^3-4x^2$, $g(x)=x^2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 5$

c) $f(x)=2\sin x$, $g(x)=3\cos(4x)-1$, $x_0 = \pi/2$

d) $f(x)=10-2e^{-0,5x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x+8$, $x_0 = 0$

e) $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1$, $g(x)=-\frac{5\pi}{4}x-5\pi+1$, $x_0 = -4$

4. Ermittle die Berührpunkte zwischen den Funktionen f(x) und g(x).

a) $f(x)=-2x^2+5x-1$, $g(x)=-x+3{,}5$

b) $f(x)=x^2-4x+3$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x-10{,}5$

c) $f(x)=x^3-8x$, $g(x)=2x^2-8x$

5. Überprüfe, ob sich die Funktionen f(x) und g(x) an den Stellen x_0 senkrecht schneiden.

a) $f(x)=x^2+5x-3$, $g(x)=-\frac{x}{5}-3$, $x_0 = 0$

b) $f(x)=4-2\sin(x)$, $g(x)=0{,}25x^3+0{,}5x+4$, $x_0 = 0$

c) $f(x)=2e-\frac{3}{2}e^{0,5x}$, $g(x)=\frac{4}{3e}(x^2-3x+2)+\frac{e}{2}$, $x_0 = 2$

6. In welchem Punkt $S(x_0|y_0)$ schneiden sich die beiden Funktionen senkrecht?

a) $f(x)=\frac{x^3}{4}+8x-11$, $g(x)=-0{,}05x+37{,}2$

b) $f(x)=\frac{1}{8}x^2$, $g(x)=10-\frac{1}{2}x^2$

c) $f(x)=\frac{1}{16}x^3+x+2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2$

7. a) Wo schneidet die Tangente an die Funktion $f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x-14$ im Punkt P(-3|-4) die x-Achse?

b) In welchem Punkt schneidet die Tangente an die Funktion $f(x)=2e^{-2x}+5$ an der Stelle $x_0 = 0$ die Asymptote der Funktion?

c) Die Tangente an die Funktion $f(x)=-\frac{1}{5}x^4+\frac{3}{5}x^3-2x+3$ an der Stelle $x_0 = -1$ bildet zusammen mit den Achsen des Koordinatensystems ein Dreieck. Bestimme die Ecken dieses Dreiecks.

Lösungen: 1a) y = 6x-8 / 1b) y = 13x-21 /1c) y = 2x+2 / 1d) y = 0,2887x-0.1569.
2. Nullstellen, Tangente: a) x_0=-2: y = 5x+10, x_0=0,5: y = -1,875x+0,9375, x_0=2: y = 3x-6 / 2b) x_0=-5ln(6): y = 1,2x+10,75 / 2c) x_0=0: y = πx, x_0=4: y = -πx + 4π, x_0=8: y = πx-8π.
3. B = Berührpunkt, S = Schnittpunkt: 3a) B(4|13) / 3b) B(0|0), S(5|25) / 3c) B(π/2|2) / 3d) B(0|8) / 3e) B(-4|1)
4. B = Berührpunkt, S = Schnittpunkt: 4a) B(1,5|2) / 4b) B(3|0) / 4c) B(0|0), S(2|-8).
5a) S(0|-3) mit f(x) ⊥ g(x) / 5b) S(0|4) mit f(x) ⊥ g(x) / 5c) [S_1(-1,1|4,57),] S_2(2|e/2) mit f(x) ⊥ g(x).
6. Schnittpunkt $S(x_0|y_0)$: 6a) S(4|37) mit f(x) ⊥ g(x) / 6b) S_1(-4|2), S_2(4|2) / 6c) S(0|0) mit f(x) ⊥ g(x)
7. Tangente: 7a) t: y = 22x+22 = 0 -> x=-1 / 7b) t: y= -4x+7, y = 5 als waagerechte Asymptote -> -4x+7 = 5 -> x = 0,5 -> S(0,5|5) / 7c) t: y = 0,6x+4,8 -> N(-8|0), S_y(0|4,8), O(0|0) als Ecken des Dreiecks.

Datenblatt: Symmetrie von Funktionen

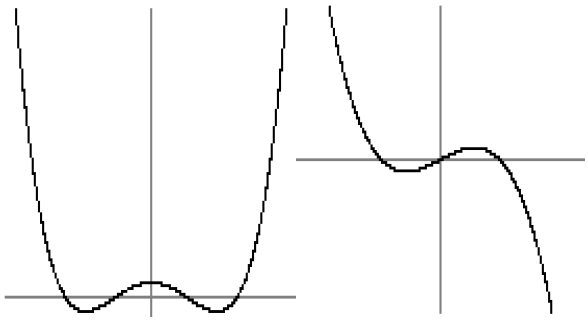
Definitionen: Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt (i.e.S.) achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \epsilon D_f$$

gilt. Sie heißt (i.e.S.) punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0), wenn

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \epsilon D_f$$

gilt.



Achsensymmetrische, punktsymmetrische Funktion

Es gilt u.a. für ganz rationale Funktionen:

a) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von geraden Hochzahlen (0, 2, 4, …) ist achsensymmetrisch. Konstante Funktionen sind achsensymmetrisch.
b) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von ungeraden Hochzahlen (1, 3, 5, …) ist punktsymmetrisch.
c) Für ganz rationale Funktionen mit Potenzen gleichzeitig von geraden und ungeraden Hochzahlen ist keine Symmetrie (i.e.S.) erkennbar.
d) Vielfache und Summen von achsensymmetrischen Funktionen sind achsensymmetrisch.
e) Vielfache und Summen von punktsymmetrischen Funktionen sind punktsymmetrisch.
f) Gemischte Summen aus achsensymmetrischen und punktsymmetrischen Funktionen sind weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

Weiter gilt für zwei Funktionen u(x) und v(x) und deren Produkt f(x) = u(x)·v(x):

a) u(x) achsensymmetrisch, v(x) achsensymmetrisch => f(x) achsensymmetrisch
b) u(x) punktsymmetrisch, v(x) achsensymmetrisch => f(x) punktsymmetrisch
c) u(x) achsensymmetrisch, v(x) punktsymmetrisch => f(x) punktsymmetrisch
d) u(x) punktsymmetrisch, v(x) punktsymmetrisch => f(x) achsensymmetrisch

Das durch die obigen mathematischen Gesetzmäßigkeiten formulierte Konzept der Ermittlung von Achsen- und Punktsymmetrie lässt sich damit auf Produkte von ganz rationalen Funktionen und auf gebrochen rationale Funktionen übertragen. Bei gebrochen rationalen Funktionen ist auf die „Symmetrie“ des maximalen Definitionsbereichs zu achten.

Für trigonometrische Funktionen gilt:

a) Die Sinusfunktion f(x) = sin(x) ist punktsymmetrisch.
b) Die Kosinusfunktion f(x) = cos(x) ist achsensymmetrisch.

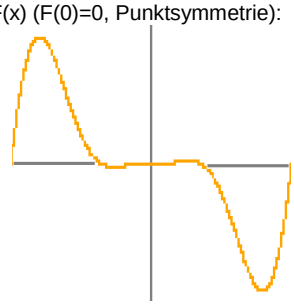
Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist selbst nicht symmetrisch, jedoch sind Exponentialfunktionen mit achsensymmetrischen Exponenten achsensymmetrisch und gewisse Summen von Exponentialfunktionen wie $f(x) = e^x + e^{-x}$ achsensymmetrisch oder wie $f(x) = e^x - e^{-x}$ punktsymmetrisch.

Symmetrieeigenschaften von Funktionen spielen auch bei Ab- und Aufleitungen eine Rolle. Es gilt:

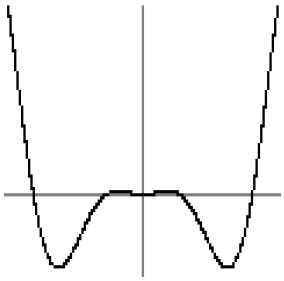
a) Die Ableitung f‘(x) einer achsensymmetrischen Funktion f(x) ist punktsymmetrisch.
b) Die Ableitung f‘(x) einer punktsymmetrischen Funktion f(x) ist achsensymmetrisch.
c) Für eine punktsymmetrische Funktion f(x) ist jede Stammfunktion F(x) achsensymmetrisch.
d) Für eine achsensymmetrische Funktion f(x) existiert eine punktsymmetrische Stammfunktion mit F(0) = 0.

Beispiel (Symmetrie):

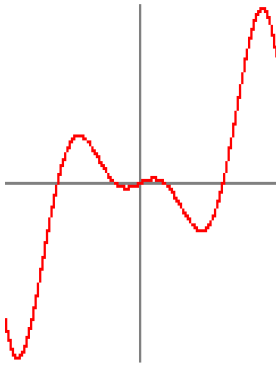
F(x) (F(0)=0, Punktsymmetrie):



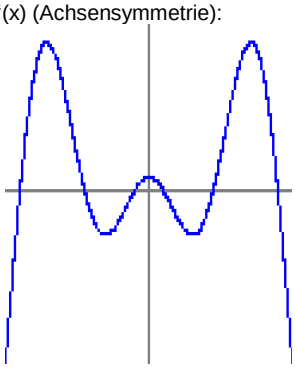
f(x) (Achsensymmetrie):



f‘(x) (Punktsymmetrie):



f‘‘(x) (Achsensymmetrie):



Funktion: $f(x) = x^2\cos(x)$

Datenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)

Eine <u>ganz rationale Funktion</u> (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion.

Die <u>Kurvendiskussion</u> (Funktionsuntersuchung) ermittelt die Besonderheiten der aus einer Funktion f(x) sich ergebenden Kurve im x-y-Koordinatensystem, des Graphen von f(x). Hinsichtlich einer ganz rationalen Funktion f(x) heißt das:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$ $f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n-3} + ... + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1} x^{n-4} + ... + 6a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0)
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0)
VII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade) c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw. f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):					
$a_n>0$	n ungerade	n gerade	$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

Beispiel (ganz rationale Funktionen):

Gegeben ist die ganz rationale Funktion 4. Grades $f(x)=\frac{x^3}{2}(8-x)$. – Kurvendiskussion:

I. Definitionsbereich D_f = **R**

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist für alle $x\in$ **R** definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar. – Neben der Darstellung der Funktion als Produkt verwenden wir durch Auflösen der Klammer die Darstellung:

$$f(x)=\frac{x^3}{2}(8-x)=\frac{x^3}{2}\cdot 8-\frac{x^3}{2}\cdot x=4x^3-\frac{1}{2}x^4.$$

Wegen den Potenzen x^3 und x^4 ist eine (gerade oder ungerade) Symmetrie nicht erkennbar.

II. Ableitungen *f'(x), f''(x), f'''(x)*

II. Ableitungen: Die letzte Form von *f* verwenden wir beim Ableiten:

$f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^4$	Funktion
$f'(x)=12x^2-2x^3$	1. Ableitung
$f''(x)=24x-6x^2$	2. Ableitung
$f'''(x)=24-12x$	3. Ableitung

III. Nullstellen des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x)=0$

III. Nullstellen: Es folgt aus der Darstellung der Funktion als Produkt:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{2}(8-x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{2}=0\vee 8-x=0\Leftrightarrow x^3=0\vee 8=x\Leftrightarrow x=0\vee x=8$$

Nullstellen der Funktion sind somit: *x*=0, *x*=8. Also: $N_1(0|0)$, $N_2(8|0)$.

IV. Extremwerte (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E)=0$: $f''(x_E)<0\Rightarrow x_E$ Hochpunkt $f''(x_E)>0\Rightarrow x_E$ Tiefpunkt

IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-2x^3=0\Leftrightarrow 2x^2(6-x)=0\Leftrightarrow 2x^2=0\vee 6-x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=6$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen Werte *x*=0 und *x*=6 in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(0)=0-0=0\Rightarrow x=0$ kann weder als Minimum noch Maximum erkannt werden (siehe dazu V.)

$f''(6)=144-216=-72<0\Rightarrow x=0$ als relatives Maximum

Bei *x*=6 liegt ein relatives Maximum (Hochpunkt). Somit lautet der diesbezügliche Kurvenpunkt wegen f(6) = $\frac{6^3}{2}(8-6)=6^3=216$: H(6|216).

V. Wendepunkte (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W)=0$: $f'''(x_W)\neq 0\Rightarrow x_W$ Wendepunkt

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Aus dem Nullsetzen der 2. Ableitung folgt:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 24x-6x^2=0\Leftrightarrow 2x(12-3x)=0\Leftrightarrow 2x=0\vee 12-3x=0\Leftrightarrow$$
$$x=0\vee 12=3x\Leftrightarrow x=0\vee x=4$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Koordinate der potenziellen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(0)=24-0=24\neq 0\Rightarrow x=0$ als Wendepunkt

$f'''(4)=24-48=-24\neq 0\Rightarrow x=4$ als Wendepunkt

Insbesondere liegt bei x=0 also kein Hoch- und Tiefpunkt (siehe IV.), sondern ein Wende-

punkt vor, und zwar ein Sattelpunkt mit Funktionssteigung f'(0) gleich 0. Die Wendepunkte lauten wegen f(0) = 0 und f(4) = $\frac{4^3}{2}(8-4)=128$: $W_1(0|0)$, $W_2(4|128)$.

VI. Verhalten gegen ±∞, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms $a_n x^n$ mit:
a_n<0, n ung.:
x->∞ → f(x)->-∞
x->-∞ → f(x)->∞
a_n<0, n gerade:
x->∞ → f(x)->-∞
x->-∞→ f(x)->-∞

VI. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^4 ist die höchste Potenz in der ganz rationalen Funktion $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^4$ und besitzt den negativen Koeffizienten $-\frac{1}{2}$. Damit gilt:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) = \ldots - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$$

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) = \ldots - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$$

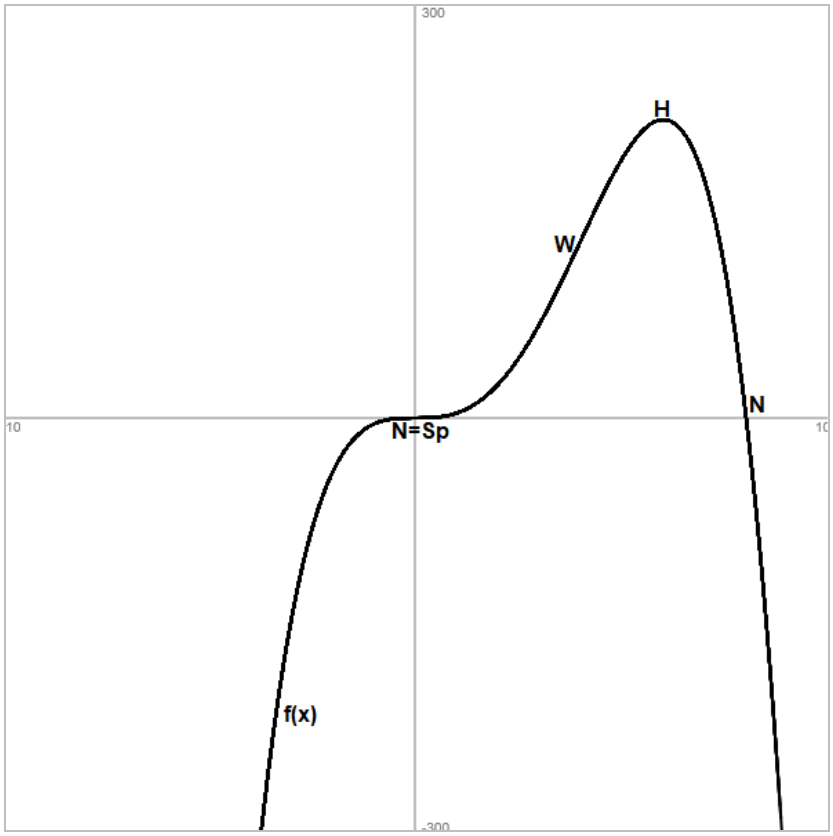
VII. Wertetabelle

VII. Wertetabelle:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4	6	8	10
y = f(x)	-384	-40	-4,5	0	3,5	24	128	216	0	-1000

VIII. Zeichnung im x-y-Koordinatensystem

VIII. Zeichnung:



Aufgabenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)

1. Bestimme die Nullstellen der Funktion f(x):

a) y = 5x – 2

b) $f(x) = -\frac{2}{5}x^4 + x^2 - 0{,}6$

c) $f(x) = \frac{1}{8}(x-1)^2(5x-12)$

d) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 - \frac{10}{3}x$

2. a) Berechne die Extrempunkte der Funktion: $f(x) = x^3 - x^2 + 5$.

b) Zeige, dass der Punkt H(1|$\frac{1}{4}$) ein Hochpunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ ist.

c) Besitzt die Funktion $f(x) = -2x^4 + 4x^3 + 14$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Extrempunkt?

3. a) Bestimme alle Wendepunkte der Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 + 6x - 11$.

b) Zeige, dass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 4$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Sattelpunkt besitzt. Wie lauten die Koordinaten des Sattelpunktes?

c) Bestimme Wendepunkt und Wendetangente zur Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 6x^2 + 15x - 7$.

4. Bestimme die Nullstellen, die Hoch-, Tief- und Sattelpunkte der Polynomfunktion (ganz rationalen Funktion) f(x). Wo ist f(x) monoton wachsend, wo monoton fallend, wo links, wo rechts gekrümmt? Was lässt über die Symmetrie von f(x) aussagen?

a) $f(x) = x^2 - 10x + 27$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 7$

d) $f(x) = x^4 + 8x^3$

5. Untersuche die folgenden Polynomfunktionen (ganz rationalen Funktionen) auf: Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte, Verhalten für betragsmäßig große x. Erstelle im x-y-Koordinatensystem eine Zeichnung des Graphen der Funktion.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$

b) $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$

c) $f(x) = \frac{21}{2}x(x+1)^2$

d) $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^4$

Lösungen: 1. N = Nullstellen: 1a) N(2,5|0) / 1b) Substitution $z=x^2$ -> $N_1(-\sqrt{1{,}5}|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(1|0)$, $N_4(\sqrt{1{,}5}|0)$ / 1c) Satz vom Nullprodukt -> $N_1(1|0)$ (doppelt), $N_2(12/5|0)$ / 1d) Ausklammern, Satz vom Nullprodukt -> $N_1(-1{,}25|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(2|0)$.
2a) Hochpunkt H(0|5), Tiefpunkt T(2|1) / 2b) f'(1)=0, f''(1)<0 -> Hochpunkt / 2c) f'(0)=0, f''(0)=0, f'''(0)≠0 -> Sattelpunkt.
3a) Wendepunkte W(1|-4/3), W(3|16) / 3b) f'(1)=0, f''(1)=0, f'''(1)≠0 -> Sattelpunkt Sp(1|11/3) / 3c) f''(x)=0 -> x_0=-4 -> W(-4|33), t: y = -9x-3.
4. H = Hochpunkt, N = Nullstelle, Sp = Sattelpunkt, S_y = Schnittpunkt mit y-Achse, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt:
4a) S_y(0|27), T(5|2) / 4b) N(0|0)=H(0|0), W(2|-16), T(4|-32), N(6|0) / 4c) N(-5,58|0), T(-4|-57), W(-2,3|-28,32), N(-0,95|0), H(0|7), N(0,95|0), W(2,3|-28,32), T(4|-57), N(5,58|0) / 4d) N(-8|0), T(-6|-432), W(-4|-256), N(0|0)=Sp(0|0).
5. H = Hochpunkt, N = Nullstelle, Sp = Sattelpunkt, S_y = Schnittpunkt mit y-Achse, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt:
5a) N(-1,23|0), H(-2/3|1,48), N(0|0)=S_y(0|0), W(2/3|-3,28), T(2|-8), N(3,24|0), / 5b) N(0|0)=T(0|0), W(2/3|2,19), Sp(2|5,33) / 5c) N(-1|0)=H(-1|0), W(-2/3|-0,77), T(-1/3|-1,56), N(0|0)=S_y(0|0) / 5d) N(-2|0), H(-1,5|0,84), W(-1|0,5), N(0|0)=Sp(0|0).

Datenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)

Eine <u>ganz rationale Funktion</u> (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Im Folgenden sei der Grad n ≤ 4.

Im Rahmen von <u>Bestimmungsaufgaben für ganz rationale Funktionen</u> werden die Koeffizienten des gesuchten Funktionsterms auf Grund gegebener Eigenschaften der Funktion ermittelt:

Geraden	
Funktion: y = mx + b (m als Steigung, b als y-Achsen-Abschnitt)	
Punkt $P(x_1\|y_1)$, Steigung m	Punkte $P(x_1\|y_1)$, $Q(x_2\|y_2)$
<u>Punktsteigungsform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$	<u>Zweipunkteform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Umstellen zu: $y = m(x-x_1) + y_1$	Umstellen zu: $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1$
	Steigung: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
<u>Ursprungsgerade</u> y = mx (durch den Ursprung): $y = \frac{y_1}{x_1}x$ mit: $m = \frac{y_1}{x_1}$	

Bestimmungsaufgabe für Geraden

Parabeln	
Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform), $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform)	
Scheitelpunkt $S(x_S\|y_S)$:	$f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$
Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = a(x_1-x_S)^2 + y_S = y_1$ -> $a = \frac{y_1-y_S}{(x_1-x_S)^2}$

Bestimmungsaufgabe für Parabeln (2. Grades, Scheitelform)

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
	Funktion und Ableitungen:	
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
	Lineare Gleichungen vom Typ:	
$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 + b + c = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 + 2b = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 3bx_1^3 + 2cx_2 + d = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 6bx_3 + 2c = y_3$
	für bestimmte x- und y-Werte	
Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Gleichungen mit Unbekannten a, b, … gemäß den Funktionseigenschaften: Punkt $P(x_1\|y_1)$: $f(x_1) = y_1$ Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$: $f(x_0) = 0$ Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt: $f(0) = 0$ y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$: $f(0) = y_0$ Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x): $f(x_1) = g(x_1)$		

Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_€$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->

Aufstellen der Funktionsgleichung:

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen

Lineare Gleichungen vom Typ:

$f(x_1) = ax_1^2 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + cx_1 = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + cx_1^2 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2cx_2 = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 2c = y_3$

für bestimmte x- und y-Werte

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

Gleichungen mit Unbekannten a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:

Punkt P(x_1|y_1):	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. N(x_0|0):	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	$f(0) = 0$
y-Achsenabschnittspunkt S_y(0|y_0):	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_€$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->		
	Aufstellen der Funktionsgleichung:	
$f(x) = ax^2 + c$	$f(x) = ax^3 + cx$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Bestimmungsaufgabe für symmetrische ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Beispiele (Bestimmungsaufgaben):

a) Eine ganz rationale Funktion 3. Grades f besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3, hat einen Tiefpunkt bei x=5/3 und schneidet die y-Achse bei y=-3.

Lösung:

I. Ansatz Polynom dritten Grades	I. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c,dε**R**.
II. Eigenschaften und Gleichungen a)/b) f besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3 c) f hat einen Tiefpunkt bei x=5/3 d) f schneidet die y-Achse bei y=-3.	II. Eigenschaften: Es gilt: $f(-1) = 0$ (Nullstelle bei *x*=-1) $f(3) = 0$ (Nullstelle bei *x*=3) $f'(\frac{5}{3}) = 0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=$\frac{5}{3}$) $f(0) = -3$ (Schnittpunkt mit der *y*-Achse im Punkt P(0|-3))
III. Aufstellen des linearen Gleichungssystems	III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen: $0 = f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d$ $0 = f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$ $0 = f'(\frac{5}{3}) = 3a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2b \cdot \frac{5}{3} + c$ $-3 = f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$ Also: $0 = -a + b - c + d$ $0 = 27a + 9b + 3c + d$ $0 = \frac{25}{3}a + \frac{10}{3}b + c$ $-3 = d$
IV. Lösen des linearen Gleichungssystems	IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wegen d=-3 erhalten wir (durch Subtraktion von d=-3 in den ersten beiden Gleichungen, Division mit 3 in der 2. Gleichung, Multiplikation mit 3 in der 3. Gleichung) das lineare Gleichungssystem mit den Umformungen gemäß dem Gauß-Algorithmus: Lineares Gleichungssystem: - 1*a* + 1*b* - 1*c* = 3 + 9*a* + 3*b* + 1*c* = 1 + 25*a* + 10*b* + 3*c* = 0 Anfangstableau: -1 1 -1 | 3 9 3 1 | 1 25 10 3 | 0

1. Schritt: 1*(*2*) + 9*(*1*) / 1*(*3*) + 25*(*1*)

-1	1	-1	|	3
0	12	-8	|	28
0	35	-22	|	75

2. Schritt: 12*(*3*) - 35*(*2*)

-1	1	-1	|	3
0	12	-8	|	28
0	0	16	|	-80

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

-	1*a*	+	1*b*	-	1*c*	=	3
		+	12*b*	-	8*c*	=	28
				+	16*c*	=	-80

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

c = -5
b = -1
a = 1

Die gesuchten Koeffizienten sind dann: a=1, b=-1, c=-5, d=-3.

V. Funktion

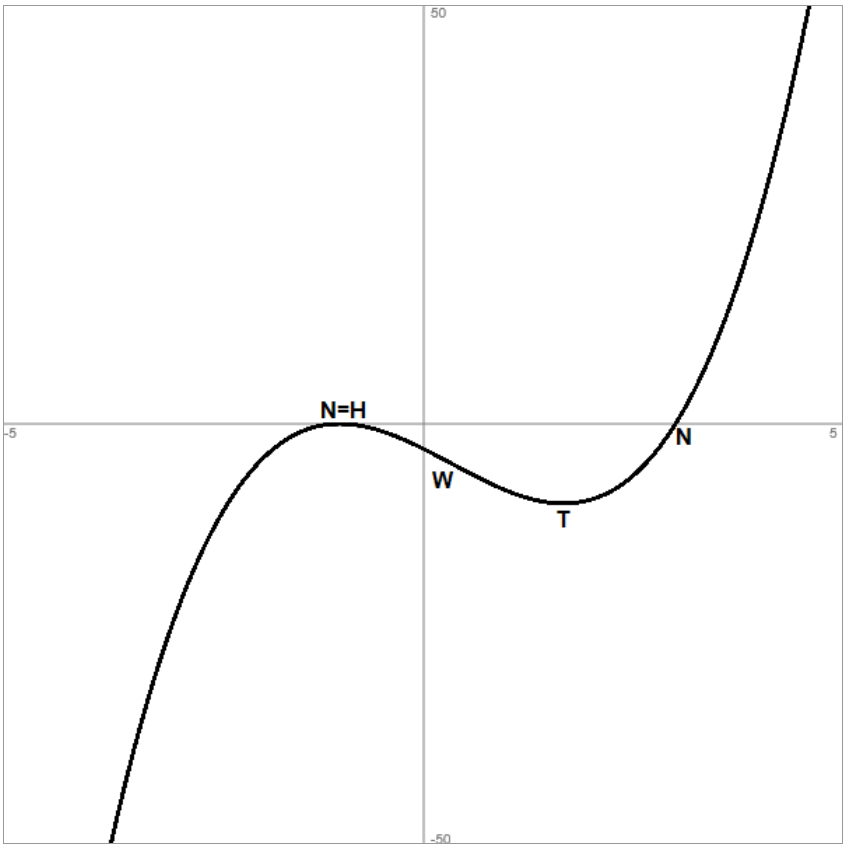
V. Die Funktion hat also die Gleichung: $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

VI. Probe

VI. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(\frac{5}{3}) = 0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$, $f''(x) = 6x - 2$ und damit: $f''(\frac{5}{3}) = 10 - 2 = 8 > 0$ mit $x = \frac{5}{3}$ als Tiefpunkt. Die Funktion erfüllt daher das Vorgegebene.

VII. Skizze

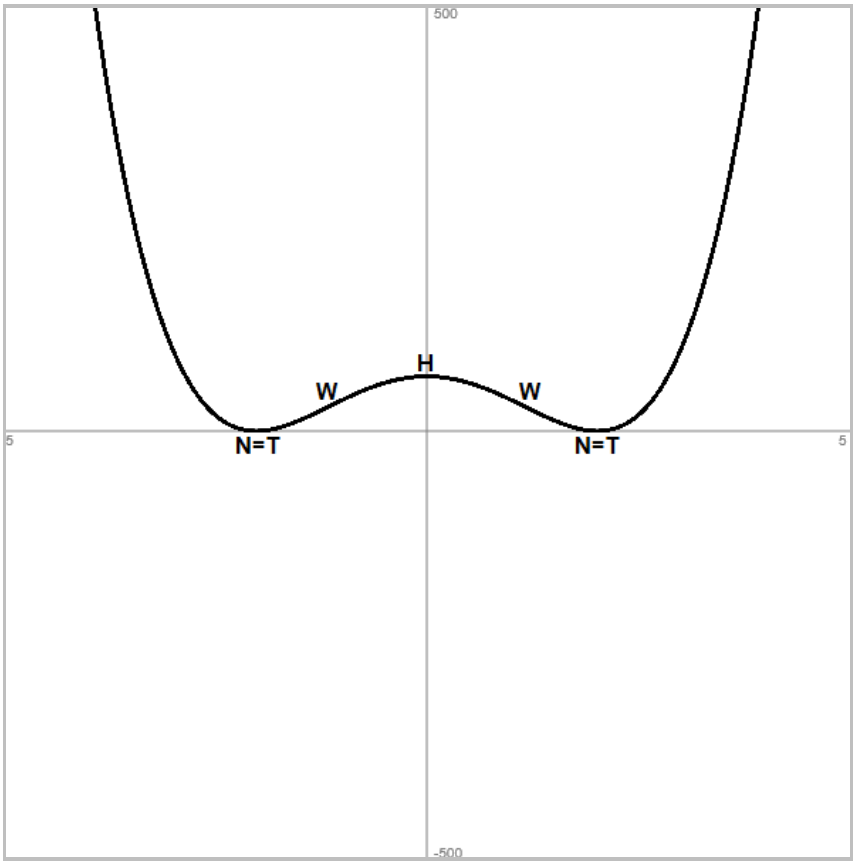
VII. Zeichnung:



b) Eine ganz rationale Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch, besitzt den Tiefpunkt T(2|0) und hat eine Steigung von -48 bei x=1.

Lösung:

I. Ansatz Achsensymmetrisches Polynom 4. Grades	I. Ansatz: Wegen der geforderten Achsensymmetrie der ganz rationalen Funktion gilt. $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ mit zu suchenden Koeffizienten a, c, eε**R**.
II. Eigenschaften und Gleichungen a) f hat einen Tiefpunkt bei T(2|0) b) f hat bei x=1 Steigung -48	II. Eigenschaften: Es gilt: $f(2) = 0$ (Nullstelle bei *x*=2) $f'(2) = 0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=2) $f'(1) = -48$ (Steigung bei *x*=1)
III. Aufstellen des linearen Gleichungssystems	III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen: $0 = f(2) = 16a + 4c + e$ $0 = f'(2) = 32a + 4c$ $-48 = f'(1) = 4a + 2c$
IV. Lösen des linearen Gleichungssystems	IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wir haben (nach Division der 2. Gleichung durch 4 und Division der 3. Gleichung durch 2) das Gleichungssystem und die Umformungen gemäß dem Gauß-Algorithmus: Lineares Gleichungssystem: $+16a + 4c + 1e = 0$ $+8a + 1c = 0$ $+2a + 1c = -24$ Anfangstableau: a c e | R.S. 16 4 1 | 0 8 1 0 | 0 2 1 0 | -24 1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 8*(*3*) - 1*(*1*) 16 4 1 | 0 0 -2 -1 | 0 0 4 -1 | -192 2. Schritt: 1*(*3*) + 2*(*2*) 16 4 1 | 0 0 -2 -1 | 0 0 0 -3 | -192 Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems: $+16a + 4c + 1e = 0$ $-2c - 1e = 0$ $-3e = -192$ Lösungen des linearen Gleichungssystems: *e* = 64 *c* = -32 *a* = 4 Die gesuchten Koeffizienten sind dann: a=4, c=-32, e=64.
V. Funktion	V. Die Funktion hat damit die Gleichung: $f(x) = 4x^4 - 32x^2 + 64$.

VI. Probe	VI. Die gefundene Funktion erfüllt alle Bedingungen.
VII. Skizze	VII. Zeichnung: 

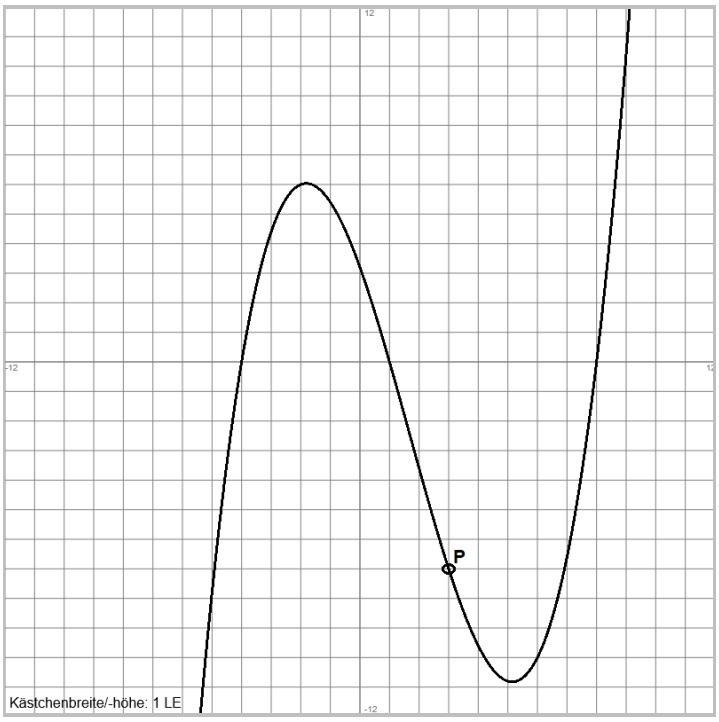
Aufgabenblatt: Bestimmungsaufgaben (ganz rationale Funktionen, Polynome)

1. Die Kurve einer Parabel 2. Grades läuft durch die Punkte $P_1(0|-12)$, $P_2(2|-16)$ und $P_3(6|0)$.

2. Gesucht ist eine Parabel 2. Grades, die in S(1|9) ihren Scheitelpunkt hat und durch den Punkt P(3|5) verläuft.

3. Die Kurve einer Parabel 2. Grades läuft durch die Punkte P(-2|-3), Q(1|1,5) und R(4|9).

4. Bestimme aus dem nachstehenden Schaubild eine ganz rationale Funktion 3. Grades.



5. Ein Polynom 3. Grades besitzt im Punkt x=0 die Wendetangente y = -2x-4 und schneidet die x-Achse bei x=2.

6. Bestimme die Gleichung einer ganz rationalen Funktion 3. Grades, die durch den Koordinatenursprung läuft, dort eine Tangente mit der Steigung 1 hat und den Hochpunkt H(2|32) besitzt.

7. Eine ganz rationale Funktion 3. Grades besitzt im Schnittpunkt mit der y-Achse die Tangente y = -3x+4 und hat mit T(1|1) einen Tiefpunkt. Bestimme die Funktion.

8. Die Kurve einer achsensymmetrischen ganz rationalen Funktion 4. Grades hat den Tiefpunkt T(-2|-8) und verläuft durch den Punkt P(3|4,5).

Lösungen: 1. $f(x) = ax^2+bx+c$; f(0)=-12 -> c=-12, f(2)=-16, f(6)=0 -> 2x2-LGS -> $f(x) = x^2–4x–12$.
2. S(1|9) -> $f(x) = a(x-1)^2+9$; P(3|5) -> $f(x) = -x^2+2x+8$.
3. $f(x) = ax^2+bx+c$; f(-2)=-3, f(1)=1,5, f(4)=9 -> 3x3-LGS -> $f(x) = 0,5x^2+x–3$.
4. Graph -> N(-4|0), N(1|0), N(8|0), P(3|-7) -> $f(x) = 0,1\cdot(x+4)(x-1)(x-8)$.
5. $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$; f(0)=-4 -> d=-4, f'(0)=-2 -> c=-2, f''(0)=0 -> b=0, f(2)=0 -> -> $f(x) = x^3–2x–4$.
6. $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$; f(0)=0 -> d=0, f'(0)=1 -> c=1; also: $f(x) = ax^3+bx^2+x$, f(2)=32, f'(2)=0 -> a=-7,5, b=22,5; also: $f(x) = -7,5x^3+22,5x^2+x$.
7. $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, f(0)=y(0)=4 -> d=4, f'(0)=y'=-3 -> c=-3; also: $f(x) = ax^3+bx^2–3x+4$, f(1)=1, f'(1)=0 -> 2x2-LGS -> a=3, b=-3; also: $f(x) = 3x^3–3x^2–3x+4$.
8. $f(x) = ax^4+cx^2+e$; f(-2)=-8, f'(-2)=0, f(3)=4,5 -> 3x3-LGS -> $f(x) = 0,5x^4–4x^2$.

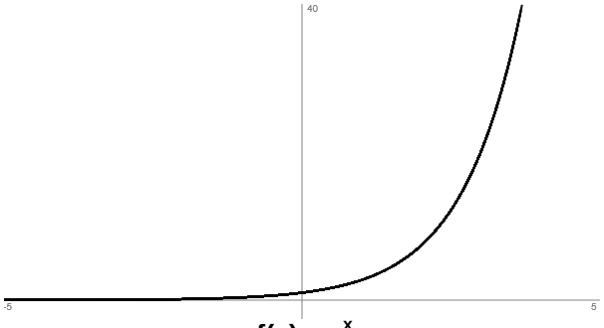
Datenblatt: Exponentialfunktionen, Asymptoten, Wachstum

Exponentialfunktionen sind reelle Funktionen vom Typ

$$f(x) = a^x,\ a>0,\ x \text{ reell.}$$

In der Differenzial- und Integralrechnung spielt insbesondere die natürliche Exponentialfunktion mit Basis a = e (= 2,71828… = Eulersche Zahl) eine Rolle. Sie ist vom Typ:

$$f(x) = e^{ax+b},\ a,b \text{ reell},\ a\neq 0.$$



f(x) = e^x

Die natürlichen Exponentialfunktionen haben die folgenden Eigenschaften (a, b reell, a≠0):

a) Besondere Werte:

$$e^{-\infty} = 0,\ e^0 = 1,\ e^1 = e,\ e^{\infty} = \infty$$

b) Ableitungen:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax+b})' = a\cdot e^{ax+b}$$

c) Aufleitungen:

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

Definition: Für eine Funktion f: D_f -> **R** heißt die Funktion y Grenzkurve (Asymptote) von f für x->∞, x->-∞ bzw. x->±∞, wenn

f(x) -> y für x->∞, x->-∞ bzw. x->±∞

gilt. Ist die Grenzkurve y eine Gerade, also y = mx + c, so heißt die Grenzkurve Asymptote. Ist hierbei m = 0, so ist y eine waagerechte Asymptote, für m ≠ 0 eine schiefe Asymptote.

Gemischte Funktionen mit linearem und Exponentialanteil sind von der Form:

$$f(x) = ax + b + ce^{kx}$$

mit reellen a, b, c, k. Dann gilt:

Funktion: $f(x) = ax + b + ce^{kx}$, Asymptote: y = ax+b
$f(x) = ax + b + ce^{kx}$ -> $f'(x) = a + cke^{kx}$, $f''(x) = ck^2e^{kx}$, $f'''(x) = ck^3e^{kx}$

Exponentielles Wachstum (Wachstum: k>0; Zerfall: k<0) genügt einer (monoton steigende, fallende) Exponentialfunktion vom Typ:

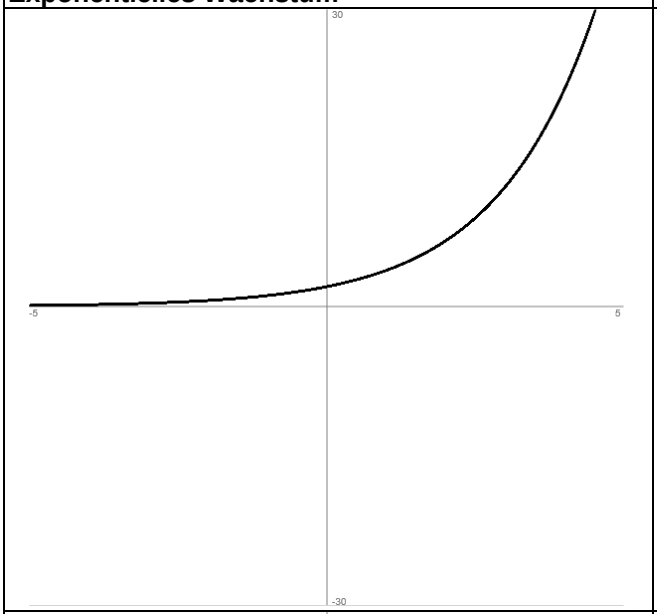
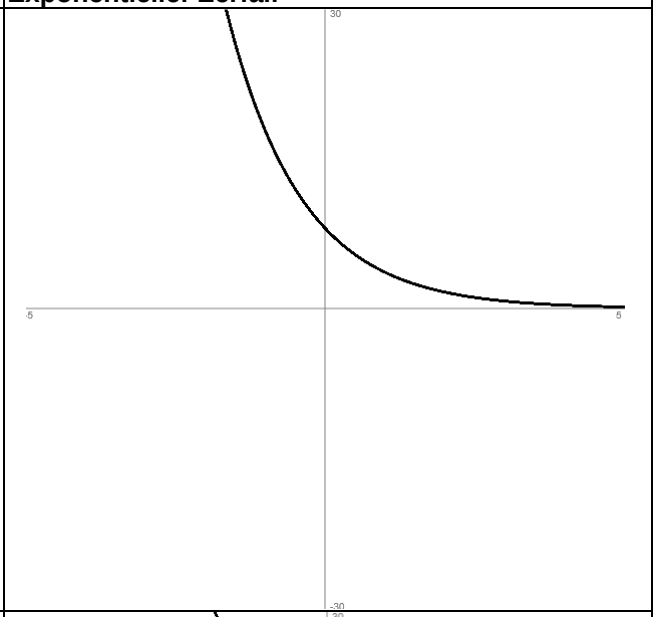
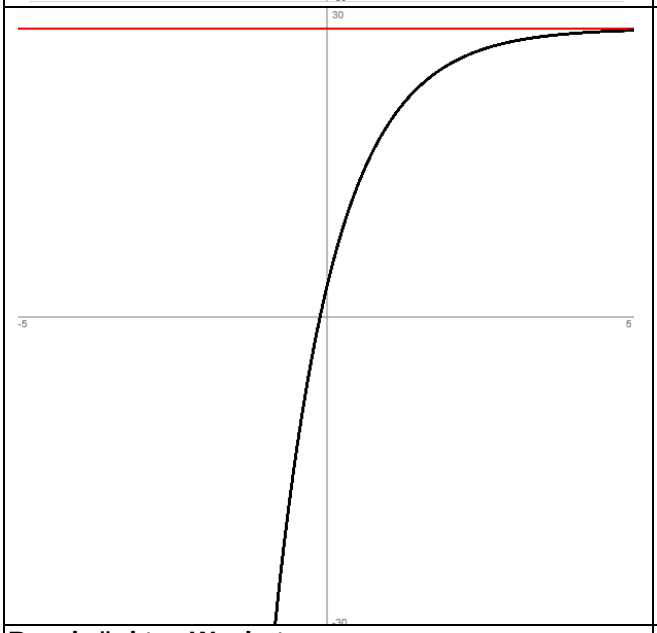
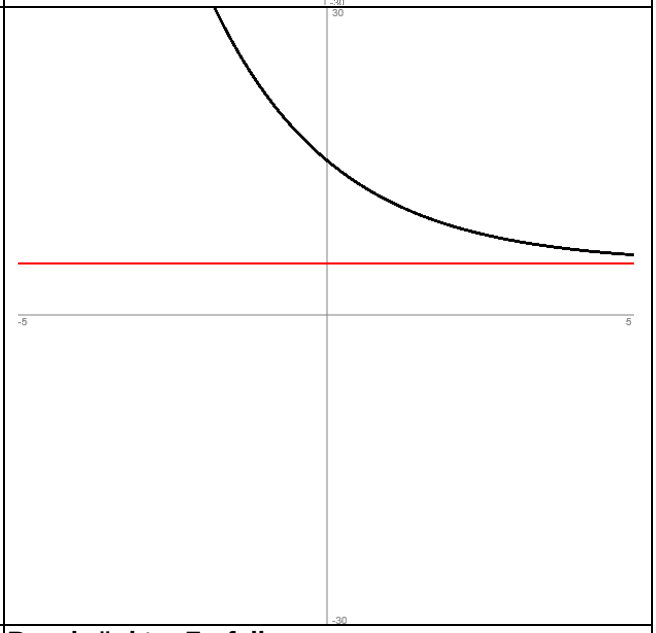
$$f(t) = a\cdot e^{kt}$$

mit Anfangsbedingung f(0) = a > 0 und Wachstumsfaktor (Proportionalitätsfaktor) kε**R** (Bestand: f(t), Änderungsrate: f'(t)). Es gilt: f(0) = a, $f'(t) = ka\cdot e^{kt}$, f'(0) = ka. Für k>0 ergibt sich als Verdopp-

lungszeit T_V: $T_V = \frac{\ln 2}{k}$, für k<0 als Halbwertszeit T_H: $T_H = \frac{-\ln 2}{k}$. Hinsichtlich der Bestimmung der Funktion $f(t) = a \cdot e^{kt}$ gilt:

Mit Anfangsbedingung	**Ohne Anfangsbedingung**
Ansatz: $f(t) = a \cdot e^{kt}$	Ansatz: $f(t) = a \cdot e^{kt}$
Anfangswert f(0) -> c = f(0) Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = a \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $k = \ln\left(\frac{y_2}{a}\right) \Big/ t_2$ (Umstellen nach k)	Punkt P(t_1|y_1) der Funktion: $f(t_1) = a \cdot e^{kt_1} = y_1$ Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = a \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $\frac{a \cdot e^{kt_1}}{a \cdot e^{kt_2}} = \frac{y_1}{y_2}$ (Division der Gleichungen) -> $k = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \Big/ (t_1 - t_2)$ (Umstellen nach k) -> $a = y_1 \cdot e^{-kt_1}$ (Umstellen nach a)
Ergebnis: $f(t) = a \cdot e^{kt}$	Ergebnis: $f(t) = a \cdot e^{kt}$

Bestimmung der exponentiellen Wachstumsfunktion

Exponentielles Wachstum	**Exponentieller Zerfall**
	
	
Beschränktes Wachstum	**Beschränkter Zerfall**

Beschränktes Wachstum (Wachstum: a>0; Zerfall: a<0: k<0) liegt vor, wenn sich das Wachstum mit kε**R** als Proportionalitätsfaktor einer (oberen oder unteren) Grenze (Schranke als waagerechte Asymptote) b annähert:

$f(t) = ae^{kt} + b$

Zur Bestandsfunktion f(t) ergibt sich als Änderungsrate: $f'(t) = ka \cdot e^{-kt}$, f'(0) = ka. Mit f(0) = 0 als Anfangsbestand gilt: a = -b. Hinsichtlich der Bestimmung der Funktion $f(t) = ae^{kt} + b$ gilt:

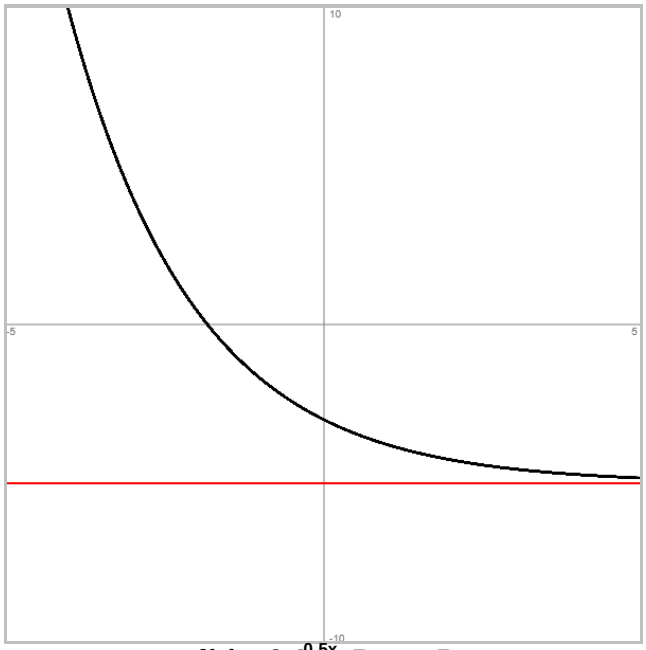
Ansatz: $f(t) = ae^{kt} + b$ mit vorgegebenem b als Schranke
Anfangswert f(0) -> a = f(0) – b
Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = a \cdot e^{kt_2} + b = y_2$ -> $a \cdot e^{kt_2} = y_2 - b$ -> $k = \ln\left(\frac{y_2 - b}{a}\right) \Big/ t_2$ (Umstellen nach k)
Ergebnis: $f(t) = ae^{kt} + b$

Bestimmung der beschränkten Wachstumsfunktion

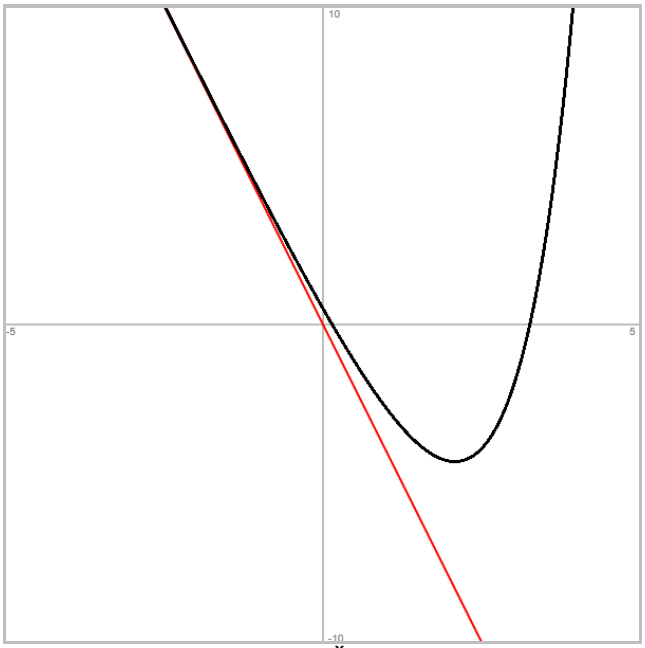
Auf Dauer stellt sich bei der Bestandsfunktion $f(t) = ae^{kt} + b$ der Wert b ein (t -> ∞: f(t) -> b als waagerechte Asymptote).

Beispiele:

a) f(x) = $2e^{-0,5x}$–5 hat als waagerechte Asymptote die Gerade y = -5 und besitzt wegen f'(x) = $-e^{-0,5x}$ < 0 keine Extremstellen und wegen f''(x) = $0,5e^{-0,5x}$ > 0 keine Wendepunkte. Eine Nullstelle ist bei x = -2ln(2,5) ≈ -1,83 vorhanden auf Grund von: f(x) = 0 ⇔ $2e^{-0,5x}$–5 = 0 ⇔ $2e^{-0,5x}$ = 5 ⇔ $e^{-0,5x}$ = 2,5 ⇔ -0,5x = ln(2,5) ⇔ x = -2ln(2,5).



f(x) = $2e^{-0,5x}$–5, y = -5



f(x) = -4x + e^x/2, y = -4x

b) f(x) = -4x + e^x/2 besitzt die schiefe Asymptote y = -4x (Ursprungsgerade), die Nullstellen N_1(0,14|0), N_2(3,26|0) und den Tiefpunkt T(2,07|-4,32).

c) f(t) = $2,3e^{0,7t}$ ist eine exponentielle Wachstumsfunktion mit Wachstumsfaktor k = 0,7 und Anfangsbestand f(0) = 2,3. f'(t) = 1,61 $e^{0,7t}$ gibt die Änderungsrate des Wachstums an. Der Bestand verdoppelt sich jeweils in der Verdopplungszeit T_V = ln2/k = 0,99.

d) Eine Bakterienkultur kann sich unbeschränkt ausbreiten. Zu Anfang liegen 2000 Bakterien vor, das Wachstum pro Stunde genügt dem Proportionalitätsfaktor k = 0,15. Die Wachstumsfunktion ist: $f(t) = 2000e^{0,15t}$. Die Verdopplungszeit beträgt: $T_V = \ln 2/0,15 = 4,62$ Stunden.

e) Seerosen siedeln auf einem 600 m^2 großen Teich. Zu Anfang einer Vegetationsperiode bedecken die Seerosen eine Oberfläche von 20 m^2, nach einer Woche von 60 m^2. Es liegt damit beschränktes Wachstum vor, wobei f(0) = 20, f(1) = 60 bei b = 600 und a = 20–600 = -580 gilt. Wir haben also: $f(t) = 600 – 580e^{kt}$ und haben nun noch k zu bestimmen. Wegen f(1) = 60 folgt: $60 = 600 – 580e^{k} \Leftrightarrow 580e^{k} = 540 \Leftrightarrow e^{k} = 0,931 \Leftrightarrow k = \ln(0,931) \Leftrightarrow k = -0,0715$. Damit lautet die Wachstumsfunktion: $f(t) = 600 – 580e^{-0,0715t}$. Nach 10 Wochen ist wegen $f(10) = 600 – 580e^{-0,715}$ eine Oberfläche von 316,15 m^2 bedeckt, 500 m^2 Oberfläche sind bedeckt, wenn f(t) = 500 ist, also: $f(t) = 600 – 580e^{-0,0715t} = 500 \Leftrightarrow 580e^{-0,0715t} = 100 \Leftrightarrow e^{-0,0715t} = 0,1724 \Leftrightarrow -0,0715t = \ln(0,1724) \Leftrightarrow t = 24,59$ Wochen.

Aufgabenblatt: Exponentialfunktionen, Asymptoten, Wachstum

1. Untersuche die folgenden Funktionen auf Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Extremstellen.

a) $f(x) = 4 - 3e^{x}$

b) $f(x) = -5 + \frac{4}{3}e^{2x}$

c) $f(x) = -4 + e^{-2x}$

d) $f(x) = 2x - 4 + \frac{1}{2}e^{-2x}$

e) $f(x) = x + 5 + \frac{4}{5}e^{0,5x}$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2e^{-0,5x}$

2. Eine radioaktive Substanz zerfällt mit einer Halbwertzeit T_H = 20,88 Stunden (h). Zu Beobachtungsbeginn sind 80 mg der Substanz vorhanden. Bestimme das exponentielle Zerfallsgesetz.

a) Wie viel Masse ist nach 5 Stunden noch vorhanden?
b) Wie viel Masse ist nach 35 Stunden schon zerfallen?
c) Wann sind noch 60 mg der Substanz vorhanden?
d) Wie groß ist die Änderungsrate zum Zeitpunkt 2,6 Stunden?
e) Wann beträgt die Änderungsrate -2 mg/h?

3. Eine Flüssigkeit kühlt gemäß der Temperaturfunktion $T(t) = 20 + 75e^{-0,1t}$ ab (t in Minuten, t≥0, f(t) in °C). Wie hoch ist die Anfangstemperatur der Flüssigkeit? Um wie viel Grad ist die Flüssigkeit nach 10 Minuten abgekühlt, um wie viel kühlt sie zwischen der 8. und der 12. Minute ab, um wie viel nimmt die Temperatur durchschnittlich in der ersten Viertelstunde ab, um wie viel zwischen der 10. und 20. Minute?

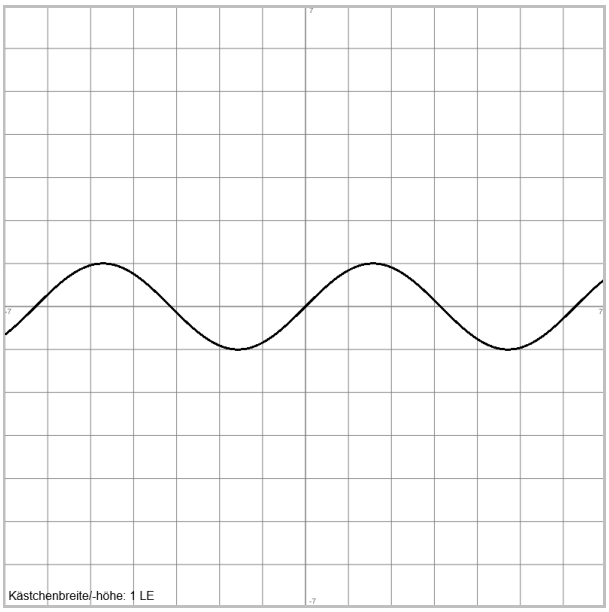
4. Ein Heißgetränk hat zu Beobachtungsbeginn eine Temperatur von 90° C, nach 10 Minuten von 65° C, die Zimmertemperatur beträgt 20° C. Bestimme die beschränkte Wachstumsfunktion der Temperaturabnahme.

a) Welche Temperatur hat das Getränk nach 20 Minuten?
b) Wann ist die Temperatur des Getränks 60° C?
c) Wann hat sich die Temperatur des Getränks halbiert?
d) Wann ist die Temperatur des Getränks nur noch ein Grad über der Zimmertemperatur?
e) Wie groß ist durchschnittliche Temperaturabnahme in der ersten Viertelstunde?
f) Wie groß ist die Temperaturabnahme nach 10 Minuten?
g) Ab wann sinkt die Temperaturabnahme pro Minute auf unter 1° C?

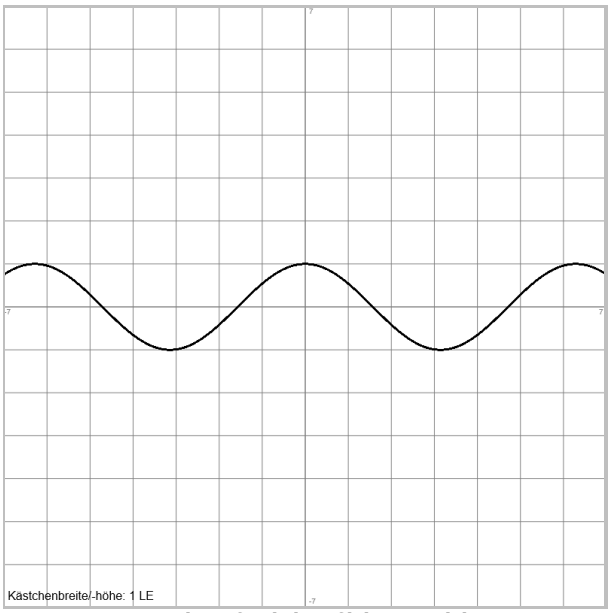
Lösungen: 1. y = Asymptote, S_y = y-Achsenabschnittspunkt, N = Nullstelle, H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt: 1a) y=4, S_y(0|1), N(0,28|0) / 1b) y=-5, S_y(0|-3,67), N(0,66|0) / 1c) y=-4, N(-0,7|0), S_y(0|-3) / 1d) y=2x–4, N(-1,29|0), T(-0,35|-3,69), S_y(0|-3,5), N(1,99|0) / 1e) y=x+5, N(-5,07|0), S_y(0|5,8) / 1f) y=0,5x, S_y(0|2), T(1,38|1,69).
2. f(t) = $80e^{-0,0332t}$ / 2a) f(5) = 67,76 / 2b) 80 – f(35) = 55 / 2c) f(t)=60 -> t = 8,67 / 2d) f'(2,6) = -2,43 / 2e) f'(t)=-2 -> t = 8,54.
3. T(0) = 95, T(0)–T(10) = 47,41, T(8)–T(12) = 11,11, m = -3,884, m = -1,744.
4. f(t) = $20+70e^{-0,0442t}$ / 4a) f(20) = 48,92 / 4b) f(t)=60 -> t = 12,66 / 4c) f(t)=45 -> t = 23,29 / 4d) f(t)=21 -> t = 96,12 / 4e) m = (f(15)-f(0))/(15-0) = -2,262 / 4f) f'(10) = -1,99 / 4g) f'(t)=-1 -> t = 25,55.

Datenblatt: Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Grundfunktion f(x) = sin*x* (Sinusfunktion) und f(x) = cos*x* (Kosinusfunktion) haben das folgende Aussehen:



Sinusfunktion f(x) = sin(x)



Kosinusfunktion f(x) = cos(x)

Sinus und Kosinus haben bei einer Periode von 2π die folgenden Grundwerte:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin*x*	0	1	0	-1	0
cos*x*	1	0	-1	0	1

Für Sinus und Cosinus gelten noch hinsichtlich Symmetrie, Komplementärwinkel, Periodizität (k ganzzahlig):

$$-1 \le \sin x \le 1,\ -1 \le \cos x \le 1$$
$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

Trigonometrische Funktionen sind auf Sinus und Cosinus aufbauende Funktionen u.a. vom Typ:

$$f(x) = a \cdot \sin(kx) + b$$
$$f(x) = a \cdot \cos(kx) + b$$

Dabei sind: a = Amplitude = maximale Auslenkung von der Mittellinie (a>0), Streckung bzw. Stauchung entlang der y-Achse; k = Periodenfaktor; b = Mittellinie = Verschiebung entlang der y-Achse. Der Wertebereich der trigonometrischen Funktionen ist: W_f = [b–a; b+a]. Für die Periode p der Funktionen f(x) gilt:

$$p = \frac{2\pi}{k} \text{ bzw. } k = \frac{2\pi}{p}$$

Die trigonometrischen Funktionen haben die Periode p, d.h. es gilt:

$$f(x+p) = a\sin(kx+p) + b = a\sin(kx) + b = f(x) \text{ bzw.}$$
$$f(x+p) = a\cos(kx+p) + b = a\cos(kx) + b = f(x)$$

Die Sinusfunktion ist für b = 0 punktsymmetrisch, d.h. es gilt:

$$f(-x) = a\sin(-kx) = -a\sin(kx) = -f(x)$$

Die Kosinusfunktion ist <u>achsensymmetrisch</u> mit:

$$f(-x) = a\cos(-kx) + b = a\cos(kx) + b = f(x)$$

Die trigonometrischen Funktionen besitzen abwechselnd <u>Hochpunkte</u> $H(x_H|y_H) = (x_H|a+b)$ und <u>Tiefpunkte</u> $T(x_T|y_T) = (x_T|a–b)$ mit:

Sinus:

$$\ldots,\ x_H = \frac{\pi}{2k} - p,\ x_H = \frac{\pi}{2k},\ x_H = \frac{\pi}{2k} + p,\ \ldots;\ y_H = a+b$$

$$\ldots,\ x_T = -\frac{\pi}{2k},\ x_H = \frac{3\pi}{2k},\ x_H = \frac{3\pi}{2k} + p,\ \ldots;\ y_T = b–a$$

Kosinus:

$$\ldots,\ x_H = -p,\ x_H = 0,\ x_H = p,\ \ldots;\ y_H = a+b$$

$$\ldots,\ x_T = \frac{\pi}{k} - p,\ x_T = \frac{\pi}{k},\ x_T = \frac{\pi}{k} + p,\ \ldots;\ y_T = b–a\ (a, k > 0)$$

Aus den obigen Formeln ergibt sich noch für die <u>Bestimmung</u> von a, b und k:

$$k = \frac{2\pi}{p},\ b = \frac{y_H + y_T}{2},\ a = \frac{y_H - y_T}{2} = y_H - b$$

Die Wendepunkte $W(x_W|y_W) = (x_W|b)$ liegen exakt zwischen je einem Hoch- und Tiefpunkt und auf der Mittellinie:

Sinus:

$$\ldots,\ x_W = -\frac{p}{2},\ x_W = 0,\ x_W = \frac{p}{2},\ \ldots;\ y_W = b$$

Kosinus:

$$\ldots,\ x_W = \frac{\pi}{2k} - \frac{p}{2},\ x_W = \frac{\pi}{2k},\ x_W = \frac{\pi}{2k} + \frac{p}{2},\ \ldots;\ y_H = b\ (a, k > 0)$$

Bzgl. des <u>Ab- und Aufleiten</u>s der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$f(x) = a \cdot \sin(kx) + b \text{ ->}$$

$$f'(x) = ak \cdot \cos(kx),\ f''(x) = -ak^2\sin(kx),\ f'''(x) = -ak^3\cos(kx) \text{ bzw.}$$

$$f(x) = a \cdot \cos(kx) + b \text{ ->}$$

$$f'(x) = -ak \cdot \sin(kx),\ f''(x) = -ak^2\cos(kx),\ f'''(x) = ak^3\sin(kx)$$

bzw.

$$f(x) = a \cdot \sin(kx) + b \text{ -> } F(x) = -\frac{a}{k} \cdot \cos(kx) + bx$$

$$f(x) = a \cdot \cos(kx) + b \text{ -> } F(x) = \frac{a}{k} \cdot \sin(kx) + bx$$

<u>Trigonometrische Funktionen</u> sind auch auf Sinus und Cosinus aufbauende Funktionen vom Typ:

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$$

$$f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$$

Dabei sind: a = Amplitude, b = Periodenfaktor, c = Verschiebung entlang der x-Achse, d = Mittellinie = Verschiebung entlang der y-Achse. Der Wertebereich ist: [d–a; d+a]. Für die <u>Periode</u> p der Funktion f(x) gilt: $p = \frac{2\pi}{b}$. Die Funktion f(x) schneidet im Abstand von p/2 die Mittellinie in den Wendepunkten $W(x_W|d)$ mit $x_W = c$, $x_W = c \pm p/2$, $x_W = c \pm p$, ... Die Funktion f(x) hat im Abstand von p Hochpunkte $H(x_H|d+a)$ bzw. Tiefpunkte $T(x_T|d–a)$ mit $x_H = c$, $x_H = c \pm p$, … bzw. $x_T = c + p/2$, $x_T = c + p/2 \pm p$, … (a>0).

Bzgl. des Ab- und Aufleitens der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d \;\text{ -> }\; f'(x) = ab \cdot \cos(b(x-c))$$
$$f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d \;\text{ -> }\; f'(x) = -ab \cdot \sin(b(x-c))$$

bzw.

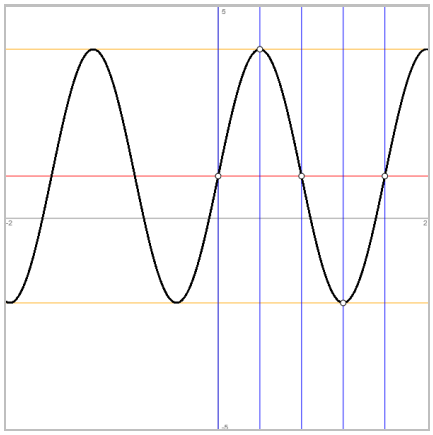
$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d \;\text{ -> }\; F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos(b(x-c)) + dx$$
$$f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d \;\text{ -> }\; F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin(b(x-c)) + dx$$

Hinsichtlich der Bestimmung von trigonometrischen Funktionen gelten die Regeln: Mittellinie $d = \frac{y_H + y_T}{2}$ (mit Hochpunkt $H(x_H|y_H)$, Tiefpunkt $T(x_T|y_T)$); Amplitude $a = \frac{y_H - y_T}{2} = y_H - d$ (mit Hochpunkt $H(x_H|y_H)$, Tiefpunkt $T(x_T|y_T)$, a>0); Periodenfaktor $b = \frac{2\pi}{p}$ (mit Periode p); Verschiebung entlang der x-Achse $c = x_W$ (mit erstem oder zweitem Wendepunkt $W(x_W|y_W)$ mit positivem x_W).

Beispiele (Sinus-, Kosinusfunktionen):

a) Z.B. kann die Sinuskurve f(x) = 3·sin(4x)+1 wie folgt in das x-y-Koordinatensystem eingezeichnet werden (a=3, b=4, c=0, d=1 bei f(x) = asin(b(x-c))+d):

Schritt 1: Zeichne die zur x-Achse parallele Mittellinie y = d = 1 der Sinusfunktion ein.
Schritt 2: Zeichne im Abstand |a| = 3 von der Mittellinie d = 1 die parallelen Geraden y = d - |a| = 4 und y = d + |a| = -2 ein. Die Sinusfunktion verläuft dann im Streifen zwischen diesen Parallelen; die Hochpunkte befinden sich auf der Geraden y = 4, die Tiefpunkte auf der Geraden y = -2.
Schritt 3: Die Periode der Sinusfunktion beträgt p = 2π/b = 1.5708. Innerhalb einer Periode, etwa zwischen x=0 und x=1.5708, verläuft die Sinuskurve von der Mittellinie (x=0, W) zum Hochpunkt (x=0.3927, H, 1. Periodenviertel), vom Hochpunkt zur Mittellinie (x=0.7854, W, 2. Periodenviertel), von der Mittellinie zum Tiefpunkt (x=1.1781, T, 3. Periodenviertel), vom Tiefpunkt zur Mittellinie (x=1.5708, W, 4. Periodenviertel).
Schritt 4: Verbinde die Hoch- (H), Tief- (T) und Mittellinien-/Wendepunkte (W) der Sinusfunktion zur Sinuskurve im x-y-Koordinatensystem.



f(x) = 3·sin(4x)+1
(waagerechte Geraden y=-2, y=1, y=4; senkrechte Geraden x=0, x=π/8, x=π/4, x=3π/8, x=π/2)

b) Die Sinusfunktion f(x) = 4·sin(2x) – 5 hat die Amplitude a=4, die Mittellinie b=-5, die Periode p = 2π/2 = π. U.a. auf Grund der Periode ergeben sich die Wendepunkte als: …, W(-π/2|-5), W(0|-5), W(π/2|-5), …, die Hochpunkte als: …, H(-3π/4|-1), H(π/4|-1), H(5π/4|-1), …, die Tiefpunkte als: …, T(-π/4|-9), T(3π/4|-9), …

c) Die Kosinusfunktion f(x) = 6·(cos(πx)+1) hat die Amplitude a=6, die Mittellinie b=6, die Periode p = 2. Die Nullstellen von f(x) sind die Tiefpunkte …, T(-3|0), T(-1|0), T(1|0), …, die Hochpunkte liegen bei …, H(-2|12), H(0|12), H(2|12), …, die Wendepunkte sind die Mittellinienpunkte …, W(-1,5|6), W(-0,5|6), W(0,5|6), …

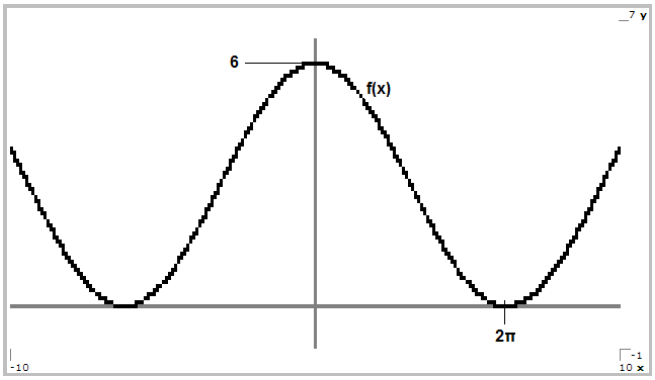
Aufgabenblatt: Trigonometrische Funktionen

1. Bestimme die trigonometrischen Funktionen vom Typ f(x) = a·sin(kx)+b bzw. f(x) = a·cos(kx)+b.

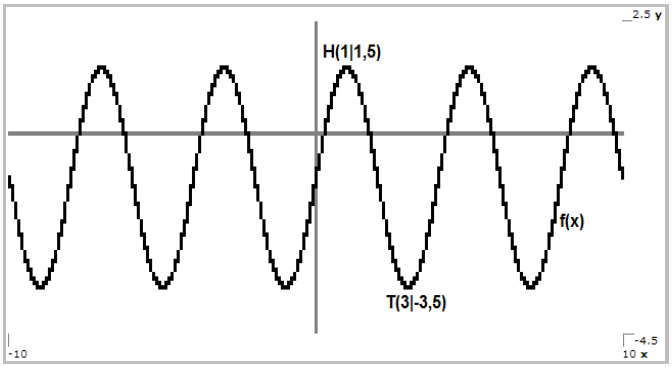
a) Eine Kosinusfunktion hat die Amplitude 4, einen Hochpunkt bei $x_H = 2\pi$, und ist gegenüber der Kosinusfunktion y = cos(x) um 2 nach oben verschoben.

b) Eine Sinuskurve besitzt den Hochpunkt H(2|5). Die y-Koordinate des Tiefpunkts ist $y_T = -1$.

c) Die trigonometrische Funktion hat folgendes Aussehen:



d) Die trigonometrische Funktion hat folgendes Aussehen:



2. Bestimme Nullstellen, Hoch-, Tiefpunkte und Wendepunkte der nachstehenden Funktion f(x) im angegebenen Bereich.

a) f(x) = 3·sin(2πx) + 2, 0≤x≤2

b) f(x) = 0,5·cos(x/2) +1, 0≤x≤4π

c) f(x) = 4 – 2·sin(x), [-π,π]

d) f(x) = -11·cos(πx/6) + 10, 0≤x≤12

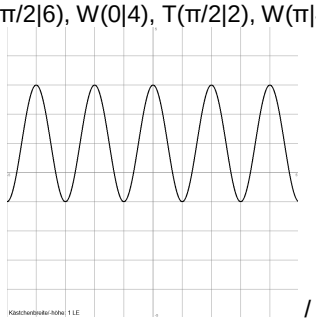
3. Skizziere die Graphen zu folgenden trigonometrischen Funktionen:

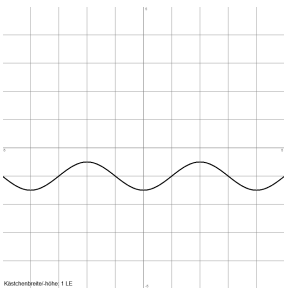
a) f(x) = 2·cos(πx)+1

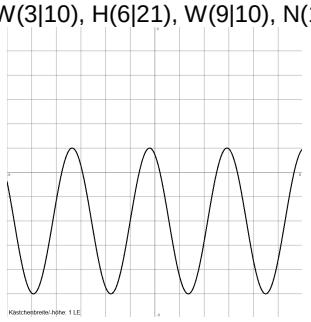
b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}(x-1)) - 1$

c) $f(x) = 3\sin(2(x+1)) - 2$

<u>Lösungen</u>: 1a) a=4, p=2π–0=2π, k=1, b=2 -> f(x) = 4cos(x)+2 / 1b) b = (5-1)/2 = 2, a=5-2=3, p=2·4=8, k=π/4 -> f(x)=3sin(πx/4)+2 / 1c) H(0|6), T(2π|0) -> a=3, b=3, p=2·2π=4π, k=1/2 -> f(x) = 3cos(x/2)+3 / 1d) a=2,5, b=-1, p=4, k=π/2 -> f(x) = 2,5sin(πx/2)–1.
2. H = Hochpunkt, N = Nullstelle, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt: 2a) p=1 -> W(0|2), H(0,25|5), W(0,5|2), N(0,62|0), T(0,75|-5), N(0,89|0), W(1|2) usw. / 2b) p=4π -> H(0|1,5), W(π|1), T(2π|0,5), W(3π|1), H(4π|1,5) / 2c) p=2π -> W(-π|4), H(-π/2|6), W(0|4), T(π/2|2), W(π|4) / 2d) p=12 -> T(0|-1), N(0,83|0), W(3|10), H(6|21), W(9|10), N(11,18|0), T(12|-1).


3a)


/ 3b)


/ 3c)

Datenblatt: Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben sind Aufgaben zur Bestimmung von Minima oder Maxima in bestimmten mathematischen Modellen und Situationen. Eine von zwei Variablen abhängige Hauptbedingung H(x,y) ist dabei zu minimieren oder maximieren, eine Nebenbedingung verknüpft die beiden Variablen vermöge: y = N(x). So ist also H*(x) = H(x,N(x)) auf einem Intervall [a; b] zu minimieren oder maximieren, wobei H*'(x) = 0 zu setzen ist und die Lösungen x_0 der Gleichung in H*''(x) einzusetzen sind (H*''(x_0) > 0 -> Minimum, H*''(x_0) < 0 -> Maximum). Zu untersuchen sind gegebenenfalls die Randextrema H*(a), H*(b), um das globale Minimum bzw. Maximum zu ermitteln.

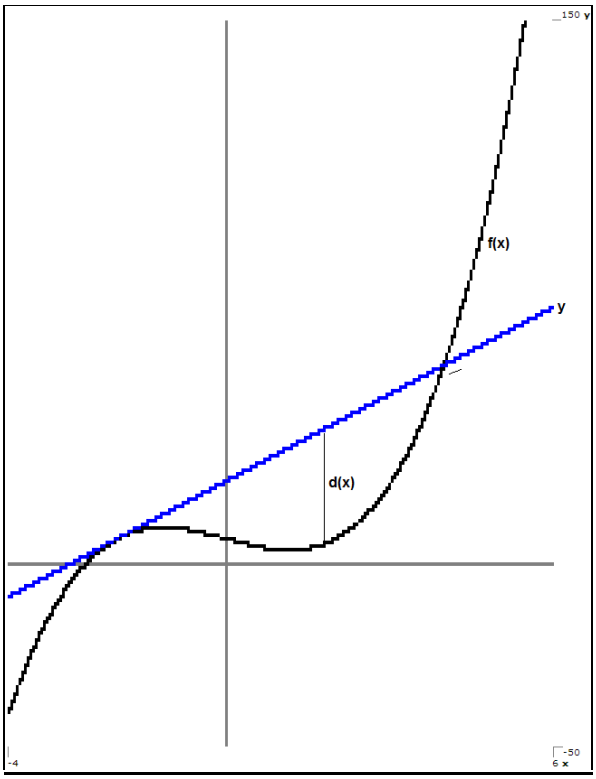
Extremwertaufgaben finden Anwendung bei folgenden Problemstellungen:

a) Eine Funktion f(x) und die x-Achse werden geschnitten von der senkrechten Geraden x = u in den Punkten R(u|f(u)) und Q(u|0). Zusammen mit einem Punkt P(x_0|y_0) ergibt sich dann das rechtwinklige Dreiecks PQR, dessen Flächeninhalt zu maximieren ist. Der geometrische Flächeninhalt A = gh/2 wird zur Flächeninhaltsfunktion: A(u) = |u–x_0|·|f(u)|/2, deren globales Maximum zu bestimmen ist (evtl.: A'(u)=0).

b) Die Abstandsfunktion zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) auf einem Intervall [a; b] ergibt sich als: d(x) = |f(x)–g(x)|, der maximale Abstand als globales Maximum von d(x).

Beispiele:

a) Zur Funktion f(x) = x^3 – 4x + 7 ergibt sich die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0=-2 als y = 8x + 23. Tangente und Funktion schneiden sich an den Stellen x=-2, x=4. Im Bereich zwischen den Schnittpunkten ist der Abstand zwischen Funktion und Tangente maximal, wenn das Maximum der Abstandsfunktion d(x) = y – f(x) (-2≤x≤4; hier: f(x)≤y) bestimmt wird. Die auf Extrema zu untersuchende Abstandsfunktion als Differenzfunktion lautet damit: d(x) = y(x) – f(x) = (8x+23) – (x^3-4x+7) = -x^3+12x+16. Zur Bestimmung des Maximums leiten wir ab: d'(x) = -3x^2 + 12. Nullsetzen der Ableitung ergibt: d'(x)=0 ⇔ -3x^2 + 12 = 0 ⇔ 12 = 3x^2 ⇔ 4 = x^2 ⇔ x = ±2. Der Punkt x=2 befindet sich im vorgegebenen Bereich [-2; 4]. Es gilt weiter: d''(x) = -6x und damit: d''(2) = -12 < 0, so dass bei x = 2 in der Tat ein Maximum vorliegt. Der Abstand berechnet sich als: d(2) = -8 + 24 + 16 = 32. Die Randextrema bei x=-2 und x=4 haben jeweils den Abstand d(-2) = d(4) = 0, so dass d(2) = 32 global ist.

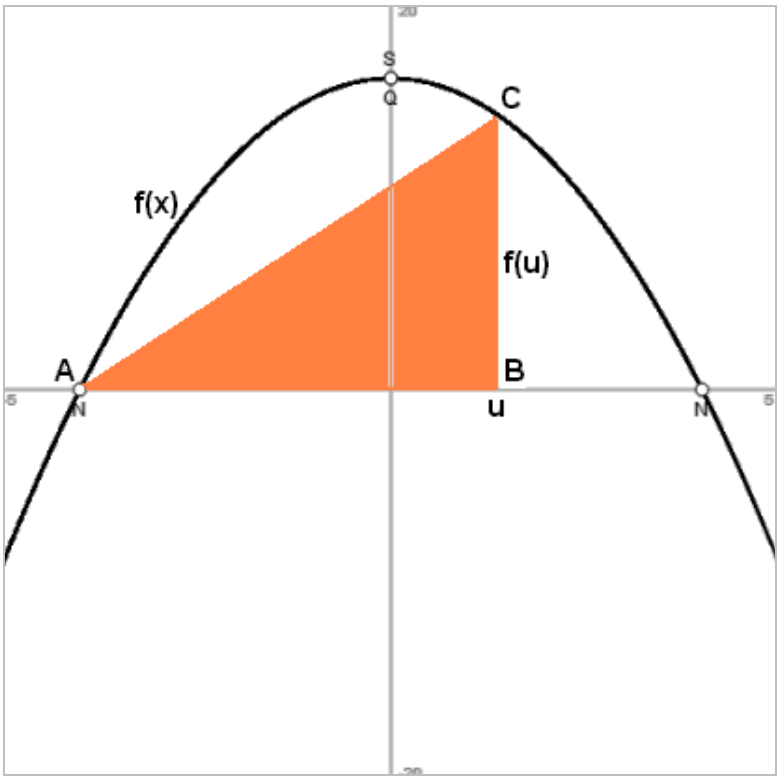


b) Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel f(x) = 16 – x^2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist der Eckpunkt A die negative Nullstelle der Funktion, der Eckpunkt C liegt auf der Funktion, der Eckpunkt B auf der x-Achse unterhalb von C. Bestimme die Eckpunkte A, B und C so, dass die Fläche des in die Funktion einbeschriebenen Dreiecks maximal wird. Wie groß ist die maximale Fläche?

Lösung:

I. Ausgangssituation

I. Ausgangssituation: Wir gehen aus von folgender Situation mit der Funktion f(x) = 16 – x^2 und dem Dreieck ΔABC:



Die Punkte A, B, C haben u.a. wegen: f(x) =0 ⇔ 16 – x^2 = 0 ⇔ 16 = x^2 ⇔ x = ±4 das Aussehen: A(-4|0), B(u|0), C(u|f(u)) mit -4 ≤ u ≤ 4.

II. Dreiecksfläche

II. Die Dreiecksfläche A = gh/2 mit Grundseite g und Höhe h errechnet sich auf Grund von:

g = u – (-4) = u+4 LE
h = f(u) = 16 – u^2 LE

als:

A(u) = (u+4)·(16–u^2)/2 = (-u^3–4u^2+16u+64)/2 = -0,5u^3 – 2u^2 + 8u + 32 FE.

III. Maximum

Das (lokale) Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(u) bestimmt sich zunächst mit:

A‘(u) = -1,5u^2 – 4u + 8 = 0 ⇔ $u = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1{,}5) \cdot 8}}{2 \cdot (-1{,}5)} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{-3} = \frac{4 \pm 8}{-3}$ ⇔ u = -4, u = $\frac{4}{3}$.

Wegen A‘‘(u) = -3u – 4 folgt:

A‘‘(-4) = -3·(-4) – 4 = 12 – 4 > 0 => relatives Minimum bei u = -4

A‘‘($\frac{4}{3}$) = $-3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = -4 - 4 = -8$ < 0 => relatives Maximum bei u = $\frac{4}{3}$.

Beim lokalen Maximum u = $\frac{4}{3}$ ergibt sich: A($\frac{4}{3}$) = $37\frac{25}{27}$ = 37,926 FE für den maximalen Flächeninhalt, während für die Randstellen des Intervalls [-4; 4] A(-4) = A(4) = 0 FE gilt. Die Ecken B und C des flächenmaximalen Dreiecks ΔABC bestimmen sich dann zu:

B($\frac{4}{3}$|0), C($\frac{4}{3}$|$\frac{128}{9}$),

so dass Grundseite g und Höhe h des Dreiecks ΔABC sich ergeben als:

g = 4+$\frac{4}{3}$ = $\frac{16}{3}$, h = $\frac{128}{9}$.

Aufgabenblatt: Extremwertaufgaben

1. Ein rechtwinkliges Dreieck maximaler Fläche soll zwischen x-Achse und Funktion $f(x) = 4x - x^2$ so einbeschrieben werden, dass eine Ecke des Dreiecks sich im O-Punkt befindet und der rechte Winkel an der x-Achse anliegt. Wie groß ist die maximale Fläche?

2. Die Funktionen $f(x) = x^3 - 8$ und die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0 = -1 schneiden sich bei x=-1 und x=2. Für das Intervall [-1; 2] ist die Stelle zu bestimmen, bei der die Differenz der Werte von Funktion und Tangente betragsmäßig am größten ist.

3. Gegeben ist die nach unten geöffnete Normalparabel f(x) = 9 – x^2, die achsensymmetrisch zur y-Achse des kartesischen x-y-Koordinatensystems ist. In die Kurve der Normalparabel sollen achsensymmetrische Rechtecke ABCD einbeschrieben werden, so dass die Ecken A, B auf der x-Achse, die Ecken C, D auf der Kurve liegen. Bestimme Ecken und Flächeninhalt des flächenmaximalen Rechtecks.

4. Für die Funktionen $f(x) = -0{,}5x + 1$ und $g(x) = 1 + e^{-x}$ gilt im Intervall [-2; 2]: f(x) < g(x). Bestimme Stelle und Abstand der Werte, bei denen die Differenz der Funktionswerte am kleinsten ist.

Lösungen: 1. x = u -> A(u) = u(4u-u^2)/2 -> Maximum bei u = 8/3, A(8/3) = 0,375 FE.
2. f(x), Tangente y=3x–6 -> Differenzfunktion d(x) = y–f(x) -> Maximum bei x = 1, d(1) = 4 LE /
3. C(u|f(u)) usw. -> Rechteck: a = 2u, b = f(u) -> Rechteckfläche A(u) = 2uf(u) = -2u^3+18u -> A‘(u) = 0 -> Maximum bei u = √3 mit A(√3) = 12√3 als globales Maximum -> A(-√3|0), B(√3|0), C(√3|6), D(-√3|6).
4. d(x) = g(x)–f(x) -> d‘(x) = 0 -> x = ln(2) als globales Minimum mit d(ln(2)) = 0,847 LE.

Datenblatt: Integrale, Stammfunktionen, Flächen

Für eine integrierbare Funktion f: D_f -> **R** ist $F(x)=\int f(x)dx+C$ eine Stammfunktion (unbestimmtes Integral) mit F'(x) = f(x) und Integrationskonstante C. Die Ermittlung der Stammfunktionen F(x) erfolgt über die Aufleitungs- oder Integrationsregeln (für Funktionen u(x), v(x) und reelle Zahl k):

$$\int (u(x)+v(x))dx=\int u(x)dx+\int v(x)dx \text{ (Summenregel)}$$
$$\int (ku(x))dx=k\int u(x)dx \text{ (konstanter Faktor)}$$

Daneben gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$F(x)=\int f(x)dx+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$

d.h.: für eine Funktion f(x) erlangt man durch Integrieren eine Stammfunktion F(x), die abgeleitet wieder f(x) ergibt.

Für spezielle Funktionen (mit reellen a, b, n, r) stellen sich die Integrationsregeln wie folgt dar:

$$\int dx=\int 1dx=x,\ \int rdx=rx,\ \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ \int (ax+b)^n dx=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}, \text{ (Potenzregel)}$$
$$\int \sin x dx=-\cos x,\ \int \cos x dx=\sin x,\ \int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b),\ \int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$$
(trigonometrische Funktionen)
$$\int e^x dx=e^x,\ \int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b} \text{ (natürliche Exponentialfunktionen)}$$

Zu einer Funktion f(x) ist die Menge der Stammfunktionen F(x) eine Schar paralleler Kurven, die sich durch eine Integrationskonstante C voneinander unterscheiden. Einer speziellen Stammfunktion F(x) durch einen Punkt $P(x_0|y_0)$ entspricht eine Integrationskonstante C, bestimmbar über $F(x_0) = y_0$ und mit $F_0(x)$ als schon errechneter Stammfunktion zu f(x), so dass $C = y_0–F_0(x_0)$ und $F(x) = F_0(x) + C$ gilt.

Für eine integrierbare Funktion f: D_f -> **R** ist $F(x)=\int f(x)dx+C$ eine Stammfunktion (unbestimmtes Integral) mit F'(x) = f(x) und Integrationskonstante C. Die Ermittlung der Stammfunktionen F(x) erfolgt über die Aufleitungs- oder Integrationsregeln. Ist F(x) eine Stammfunktion zu f(x), so ergibt sich als bestimmtes Integral mit den Integrationsgrenzen a,bε**R**:

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

gemäß:

Vorgehensweise
Bestimmung einer Stammfunktiion F(x) zu f(x)
Einsetzen der oberen und der unteren Grenze in die Stammfunktion
Stammfunktionswert der oberen Grenze minus Stammfunktionswert der unteren Grenze bilden

Bestimmtes Integral

Hinsichtlich der bestimmten Integrale und der Integrationsgrenzen gilt noch (für reelle a, b. c):

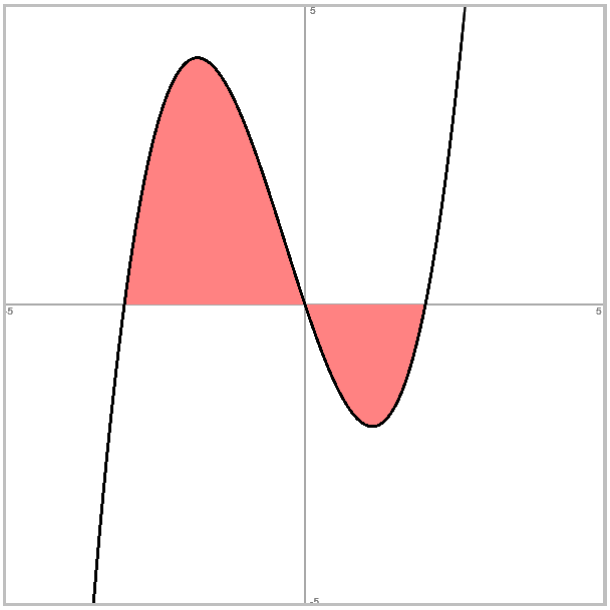
$$\int_a^a f(x)dx=0,\ \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx,\ \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

sowie weiter: $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

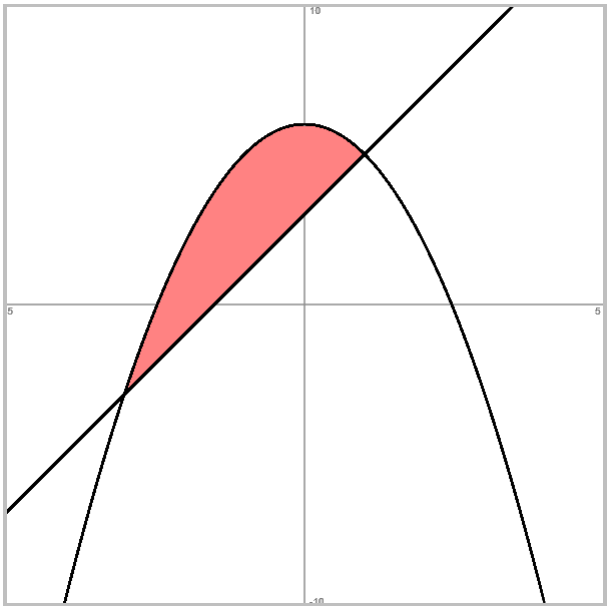
Unter bestimmten Voraussetzungen ist das bestimmte Integral der Wert einer <u>Fläche</u>, wobei für Flächen zwischen Funktion f(x) und x-Achse über die Funktion f(x) integriert wird, für Flächen zwischen Funktion f(x) und g(x) über die Differenzfunktion f(x) – g(x). Dabei gilt:

Vorgehensweise
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_{21}}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_2}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Fläche zwischen Funktion und x-Achse



Fläche(n) zwischen Funktion und x-Achse



Fläche zwischen zwei Funktionen

Vorgehensweise
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_{21}}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_2}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Fläche zwischen zwei Funktionen

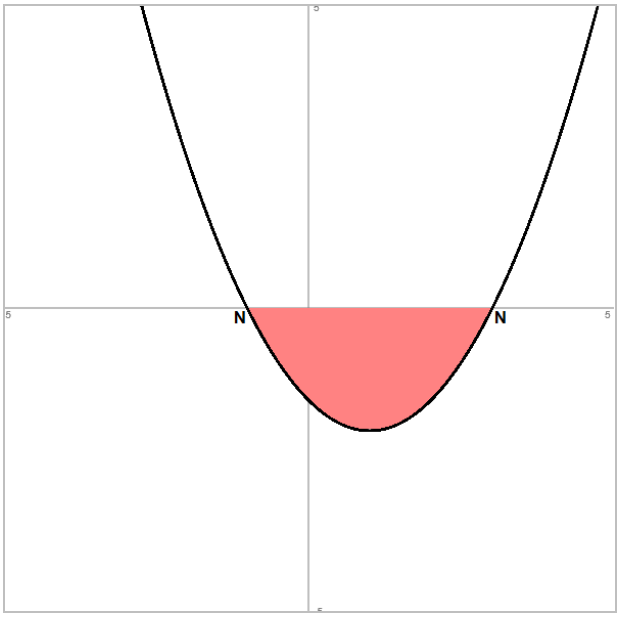
<u>Beispiele</u> (Flächeninhalte):

a) Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ und der x-Achse ist zu bestimmen. – <u>Lösung</u>:

I. <u>Nullstellen</u>

I. <u>Nullstellen</u>: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$ als Nullstel-

len der Funktion und damit als Integrationsgrenzen für das bestimmte Integral zum Flächeninhalt. Es ergibt sich grafisch die nach oben geöffnete Parabel mit Fläche unterhalb der x-Achse:



II. Stammfunktion

II. Stammfunktion: Aus $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ ergibt durch Integration nach Summen-, Faktor- und Potenzregel sich als eine Stammfunktion: $F(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$.

III. Flächeninhalt

III. Flächeninhalt: Das bestimmte Integral errechnet sich als:

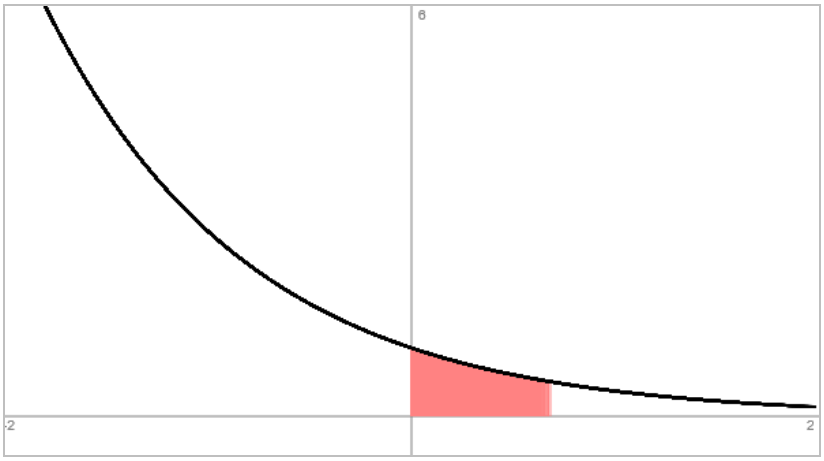
$$\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3}=\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=-\frac{16}{3},$$

so dass sich der gesuchte Flächeninhalt A bestimmt als:

A = $\frac{16}{3}$ FE.

b) Die Fläche zwischen der Funktion $f(x)=e^{-x}$ und der x-Achse auf dem Intervall [0; ln2] ist zu berechnen. – Lösung:

Die Funktion f(x) = e^{-x} liegt oberhalb der x-Achse und hat als Stammfunktion: F(x) = $-e^{-x}$. Daher gilt für den Flächeninhalt: $A=\int_0^{\ln 2}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=-e^{-\ln 2}-(-e^0)=\left(-e^{\ln\frac{1}{2}}\right)-(-1)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.



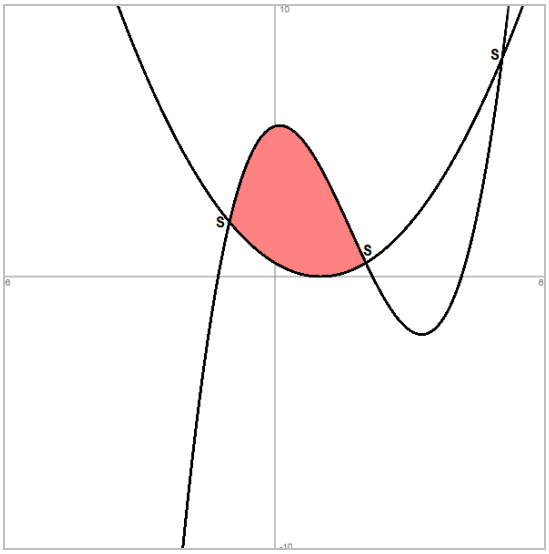
c) Die Fläche zwischen den beiden Funktionen $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ und $g(x)=\frac{1}{2}(x^3-5x^2+x+11)$ ist zu bestimmen. – Lösung:

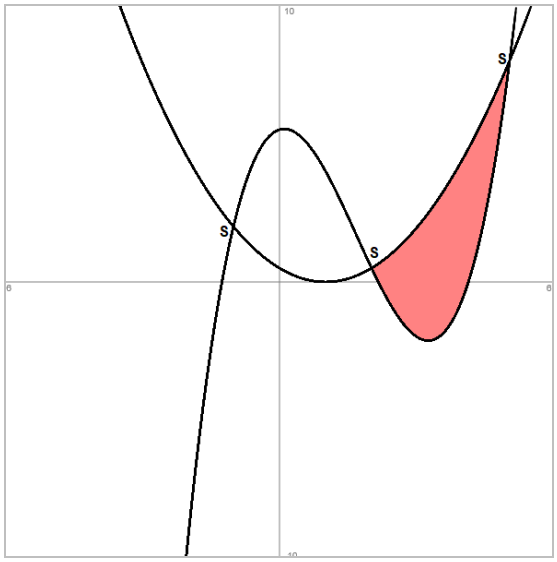
I. Schnittstellen

I. Schnittstellen: Gleichsetzen der zwei Funktionen führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x+1=x^3-5x^2+x+11 \Leftrightarrow x^3-6x^2+3x+10=0 \Leftrightarrow$$
$$(x+1)(x-2)(x-5)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2 \vee x=5$$

und damit auf die Schnittstellen: x_1=-1, x_2=2, x_3=5. Es ergeben sich wegen der drei Schnittstellen zwei Teilflächen zwischen den vorgegebenen Funktionen:





II. Stammfunktion

II. Stammfunktion: Integration der Funktionsdifferenz f(x)–g(x) ergibt:

$$\int (f(x)-g(x))dx=\frac{1}{2}\int\left[(x^2-2x+1)-(x^3-5x^2+x+11)\right]dx=$$
$$\frac{1}{2}\int\left[-x^3+6x^2-3x-10\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right].$$

III. Flächeninhalt

III. Zu den zwei Teilflächen bestimmen sich die (Teil-) Integrale:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(-x^3+6x^2-3x-10)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]_{-1}^{2}=$$
$$\frac{1}{2}(-4+16-6-10)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-2-\frac{3}{2}+10\right)=-\frac{81}{8}$$

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{5}(-x^3+6x^2-3x-10)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]_{2}^{5}=$$
$$\frac{1}{2}\left(-\frac{625}{4}+250-\frac{75}{2}-50\right)-\frac{1}{2}(-4+16-6-10)=\frac{81}{8}$$

und die Teilflächeninhalte als:

$A_1=\frac{81}{8}$, $A_2=\frac{81}{8}$,

so dass sich als Gesamtflächeninhalt ergibt:

$$A=A_1+A_2=\frac{81}{4}.$$

1. Bilde eine Stammfunktion F(x) zu den nachstehenden Funktionen f(x):

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{11}{5}$

b) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x + 1$

c) $f(x) = \frac{2}{5}x^2(x+12)$

d) $f(x) = 8x^2 + 2x - 17 + \cos 4x$

e) $f(x) = \frac{3}{4}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 2x$

f) $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + 2$

g) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{3}e^x$

h) $f(x) = 10 - 2e^{-2x}$

i) $f(x) = 3e^{-4x} + 4e^{3x}$

j) $f(x) = 3 + \frac{1}{5}e^{-0,5x}$

k) $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-0,2x+3}$

2. Bestimme die Stammfunktion F(x) mit $F(x_0) = y_0$.

a) $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2} - x\right)$, F(0) = 5

b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, F(π) = 2

c) $f(x) = 5 - 2e^{-3x}$, F(0) = 10

d) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x) - \cos(2\pi x)$, F(1) = $\frac{1}{\pi}$

3. Berechne die bestimmten Integrale.

a) $\int_1^4 (5x-3)dx$

b) $\int_{-1}^3 (8x^2 - 4x)dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \sin x)dx$

d) $\int_0^{\pi} (2\cos 3x - 3\sin 2x)dx$

e) $\int_0^1 (4 + e^{2x})dx$

f) $\int_{-2}^1 (\frac{1}{2}x + 1 + 4e^{-0,5x})dx$

4. Löse die Integralgleichungen.

a) $\int_1^u 3x^2 dx = \frac{57}{40}$

b) $\int_0^u 2x(x^2+1)dx = 12$

c) $\int_0^u (x^3+2x)dx = 3$

d) $\int_0^u 2e^{-0,5x} dx = 8-4e$

5. Berechne die Fläche zwischen Funktion und x-Achse.

a) $f(x) = 2x^2 - x^3$, Nullstellen
b) $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$, Nullstellen
c) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$, Nullstellen
d) $f(x) = 1+\sin(x)$, -π/2 ≤ x ≤ 3π/2
e) $f(x) = x + 2\cos(\frac{x}{2})$, 0≤x≤2π
f) $f(x) = 8 - 2\cdot e^{-0,2x}$, -5·ln4 ≤ x ≤0

6. Berechne die Fläche zwischen zwei Funktionen!

a) $f(x) = x^2 - 8$, $g(x) = 2x+7$
b) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 4$
c) $f(x) = 2x + \sin(x)$, $g(x) = 2x$, 0≤x≤π

7.a) Berechne die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^3 + 8$, der Tangente an der Funktion in x_0 = -2 und der y-Achse.
b) Berechne die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4$ und der Tangente im Hochpunkt.

Lösungen: 1. F(x) =: 1a) $-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{5}x$ / 1b) $\frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^2 + x$ / 1c) $\frac{1}{10}x^4 + \frac{8}{5}x^3$ /
1d) $\frac{8}{3}x^3 + x^2 - 17x + \frac{1}{4}\sin 4x$ / 1e) $\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{4}\cos 2x$ / 1f) $-\frac{12}{\pi}\cos(\frac{\pi}{4}x) + 2x$ / 1g) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}e^x$ /
1h) $10x + e^{-2x}$ / 1i) $-\frac{3}{4}e^{-4x} + \frac{4}{3}e^{3x}$ / 1j) $3x - \frac{2}{5}e^{-0,5x}$ / 1k) $\frac{20}{3}e^{-0,2x+3}$.
2. F(x) =: 2a) $x^3/6 - x^4/4 + 5$ / 2b) -0,25cos(2x)+2,25 / 2c) $5x + 2e^{-3x}/3 + 28/3$ / 2d) $-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + \frac{1}{2\pi}$.
3a) 28,5 / 3b) 58 2/3 / 3c) 20,67 / 3d) 0 / 3e) 7,1945 / 3f) 19,144.
4. u =: 4a) 1,5 / 4b) -2; 2 / 4c) √2 / d) -2ln(2).
5a) Nullstellen x_1=0, x_2=2 -> A = 4/3 / 5b) Nullstellen x_1=-1, x_2=2, x_3=4 -> A_1 = 15,75, A_2 = 16/3 -> A = 253/12.
5c) Nullstellen x_1=-3, x_2=-2, x_3=2, x_4=3 -> A = 95,75 / 5d) A = 2π / 5e) A = 19,73 / 5f) A = 25,4 FE.
6a) a=-3, b=5 -> A = 85,33 / 6b) a=-1, b=2 -> A = 92 / 6c) a=0, b=π -> A = 2 FE.
7a) Tangente y = 12x+24, A = 12 FE / 7b) Hochpunkt H(0|-4), Tangente y = -4 -> Schnittstellen: x = ±3 -> A = 64,8 FE.

Bzgl. der Null-, Extrem- und Wende-stellen sowie der Monotonie und Krümmung ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Funktionen f(x), Ableitungen f'(x), f''(x) und Stammfunktionen F(x) und bei asymptotischem Verhalten:

Stammfkt. F(x)	**Funktion f(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x
x -> ±∞: F(x) -> ax + C	x -> ±∞: f(x) -> a
x -> ±∞: F(x) -> C	x -> ±∞: f(x) -> 0

Funktion f(x)	**Ableitung f'(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f'(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f'(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x, [$f''(x) \geq 0$]
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x, [$f''(x) \leq 0$]
x -> ±∞: f(x) -> ax + C	x -> ±∞: f'(x) -> a
x -> ±∞: f(x) -> C	x -> ±∞: f'(x) -> 0

Es gilt also im Allgemeinen beim Ableiten:

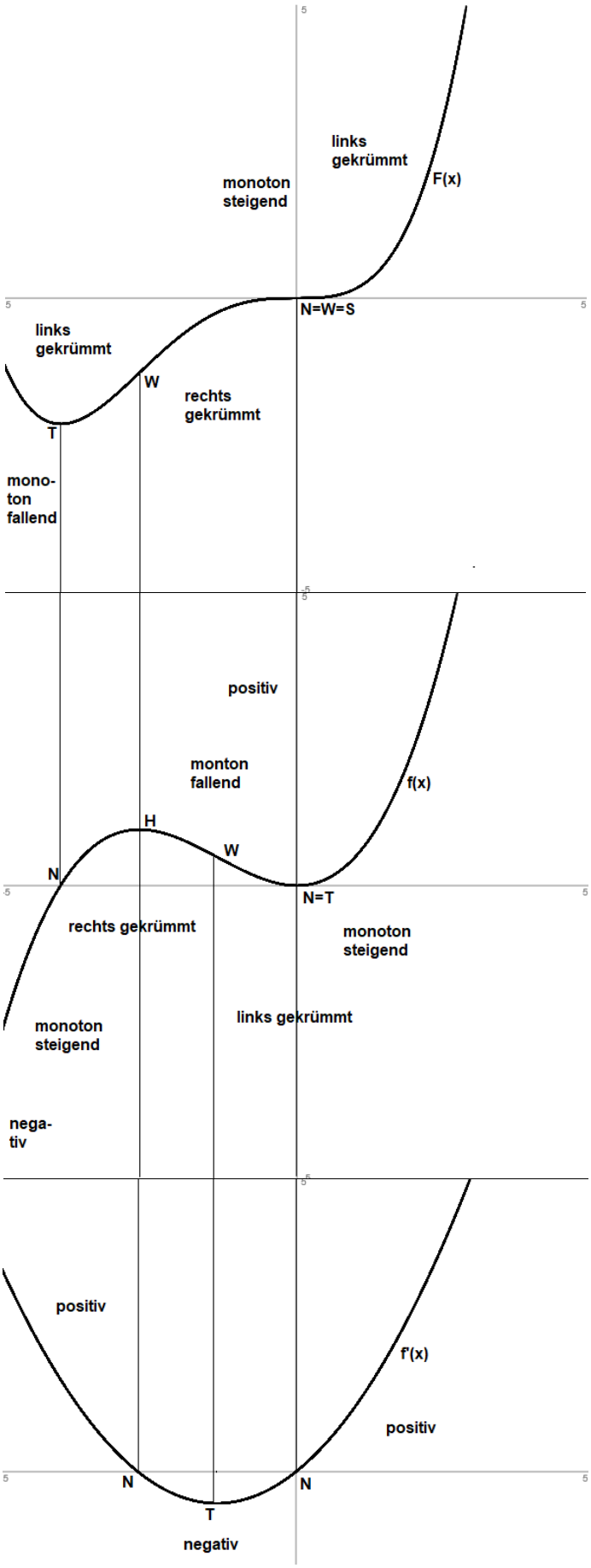
$$Wendestelle \xrightarrow{'} Extremstelle \xrightarrow{'} Nullstelle\,,$$

beim Aufleiten:

$$Nullstelle \xrightarrow{\int} Extremstelle \xrightarrow{\int} Wendestelle$$

oder die NEW-Regel:

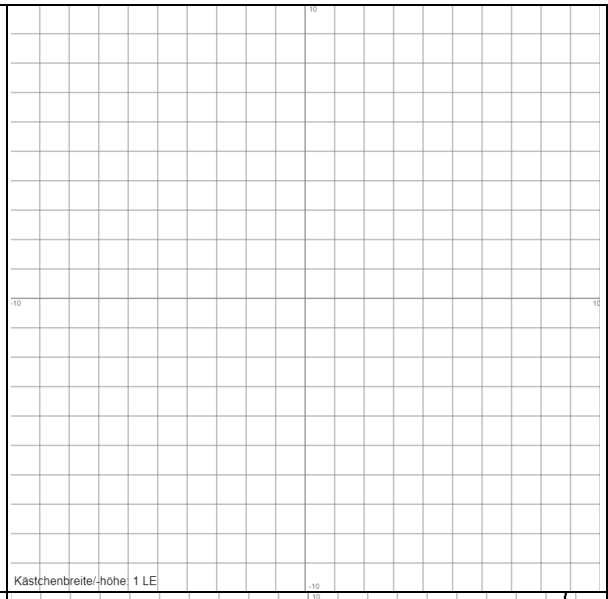
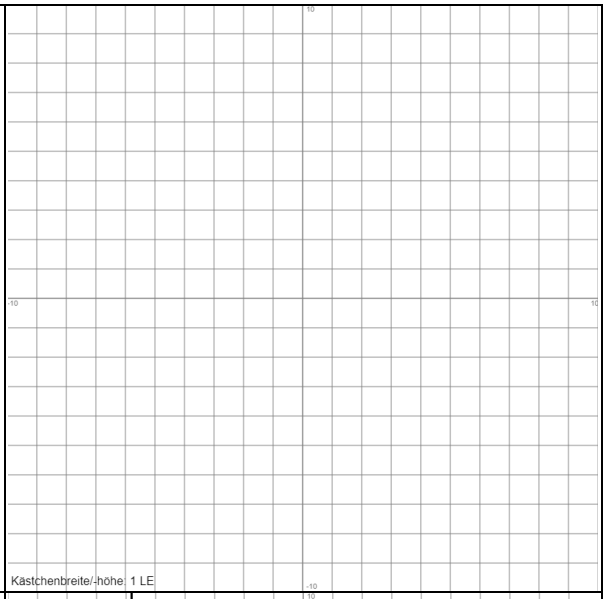
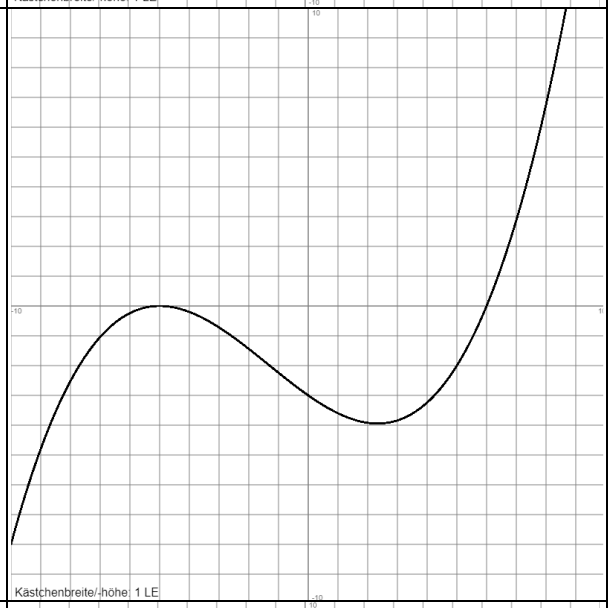
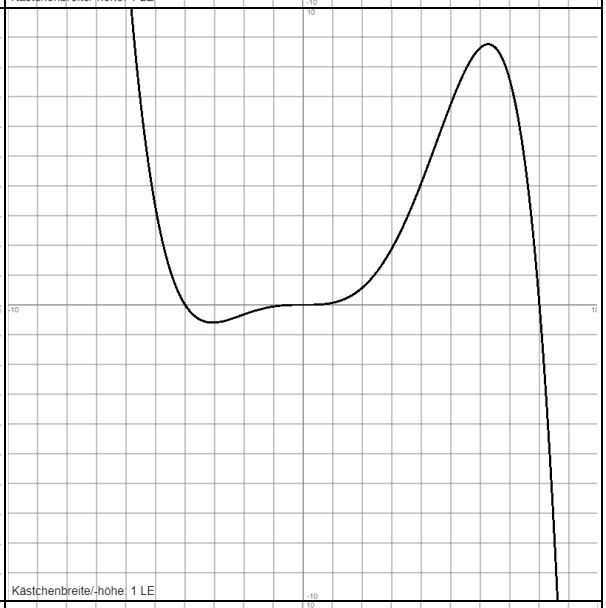
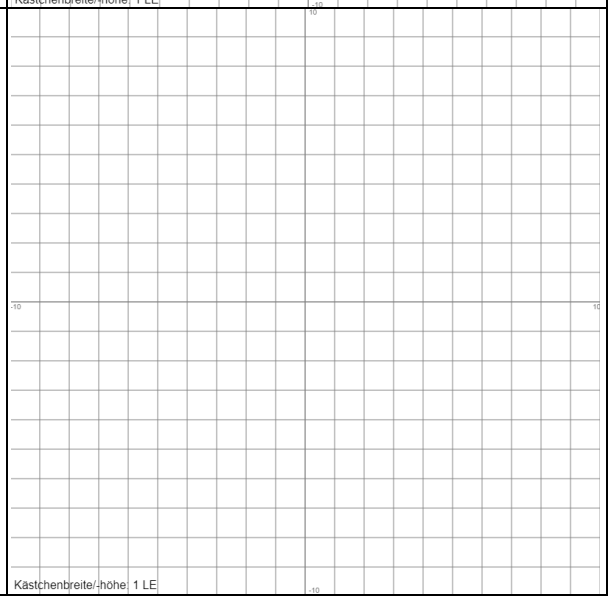
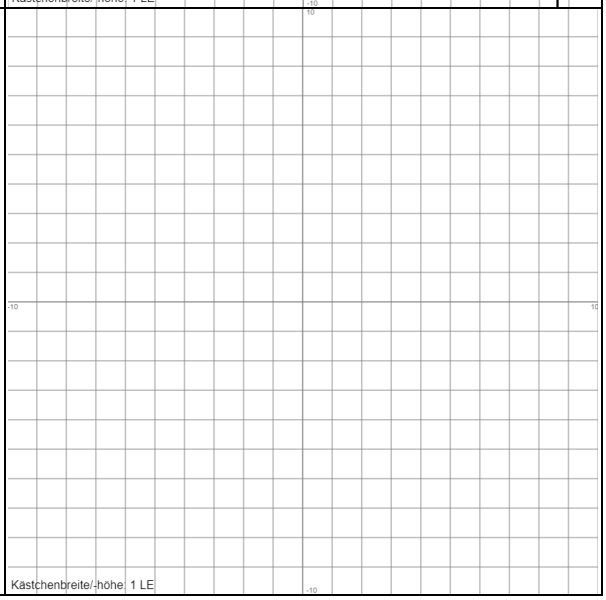
```
F(x)    N E W
f(x)      N E W
f'(x)       N E W
```

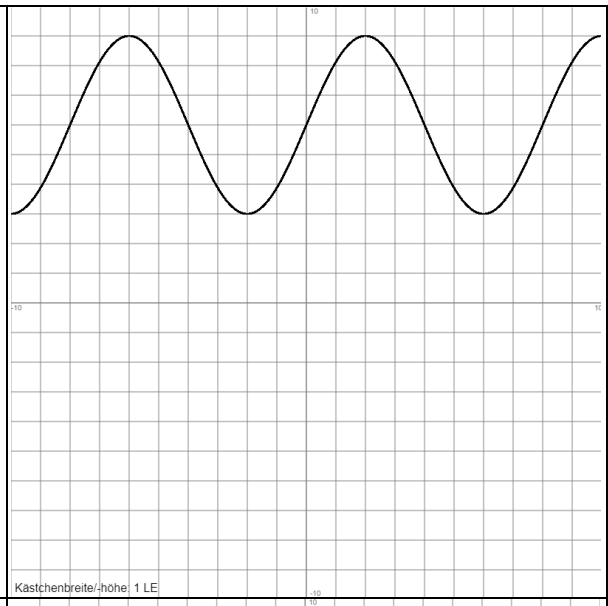
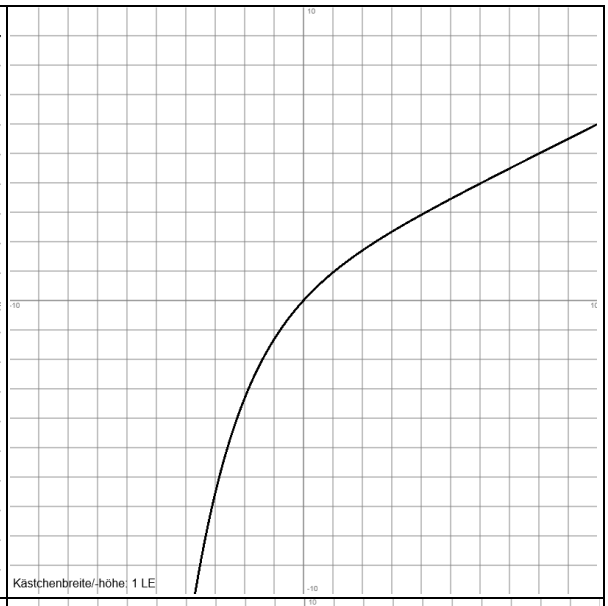
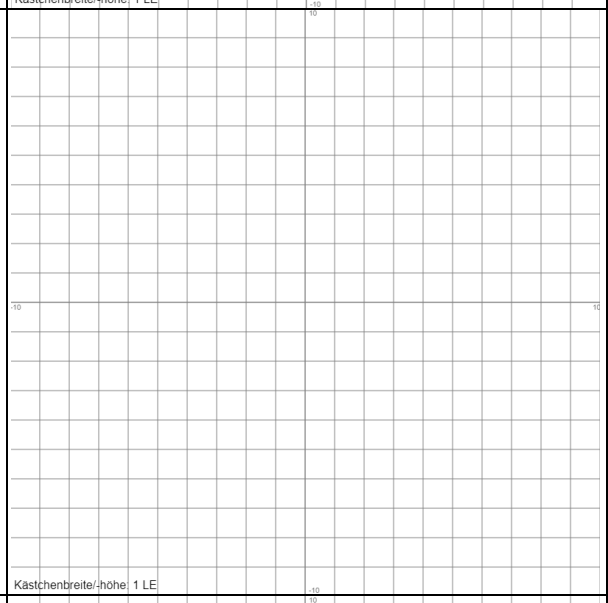
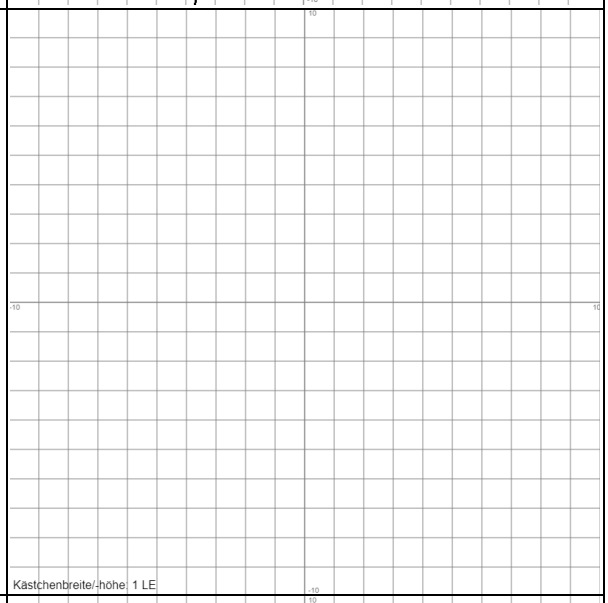
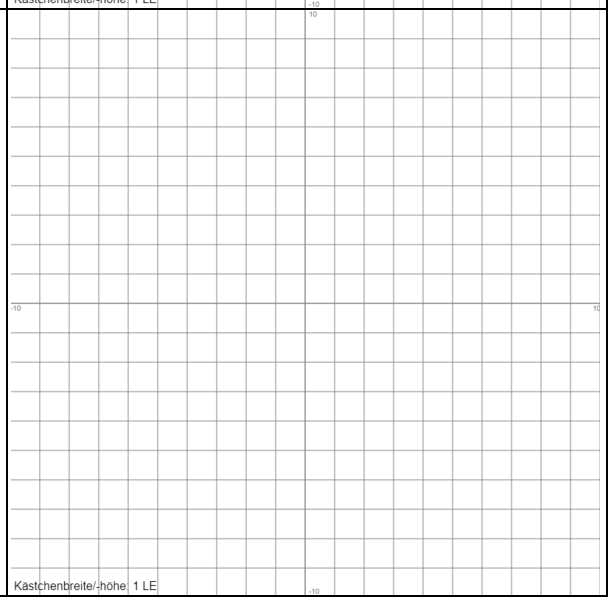
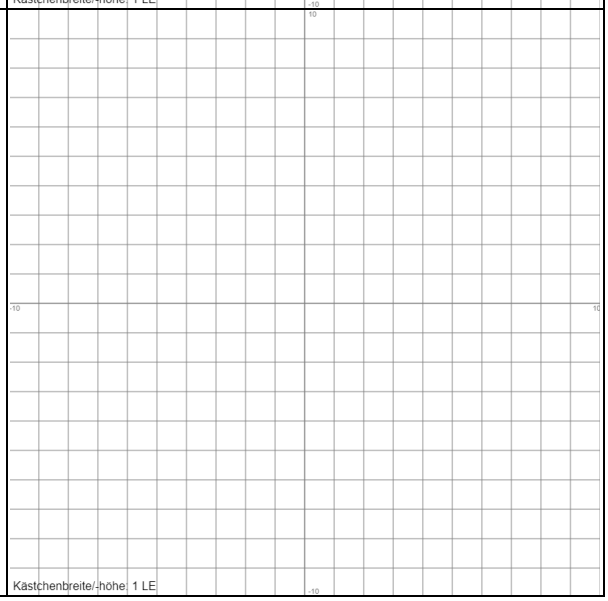


H = Hochpunkt, N = Nullstelle, S = Sattelpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt

Aufgabenblatt: Grafisches Auf- und Ableiten

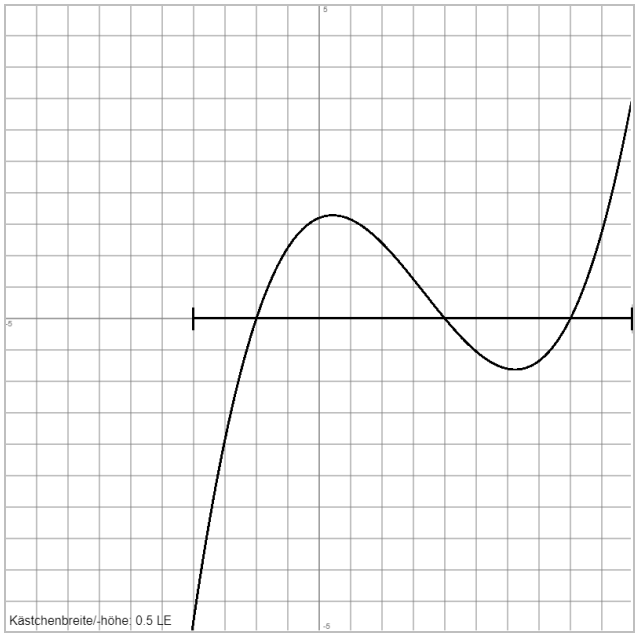
1. Leite grafisch ab bzw. auf.

F(x)		
f(x)		
f‘(x)		

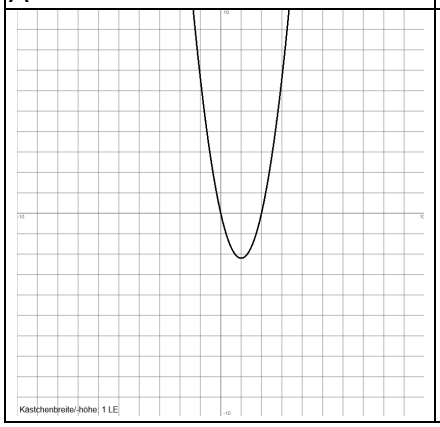
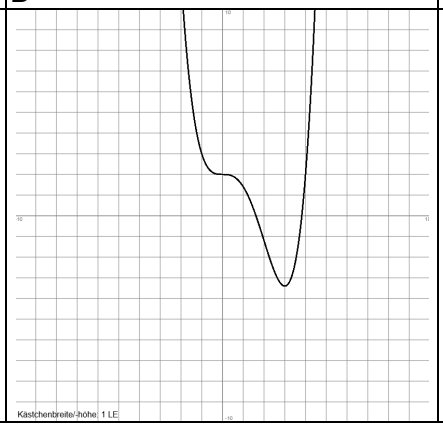
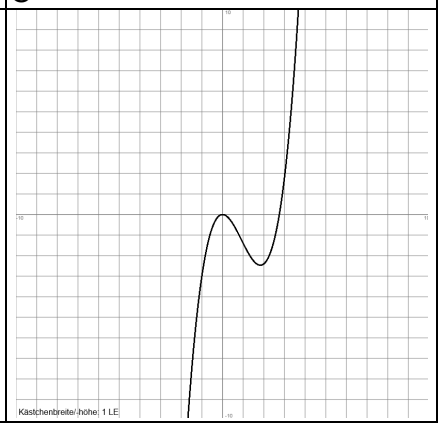
F(x)	 Kästchenbreite/-höhe: 1 LE	 Kästchenbreite/-höhe: 1 LE
f(x)	 Kästchenbreite/-höhe: 1 LE	 Kästchenbreite/-höhe: 1 LE
f'(x)	 Kästchenbreite/-höhe: 1 LE	 Kästchenbreite/-höhe: 1 LE

2. Die nachstehende Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f(x) auf dem Intervall [-2; 5]. Begründe, ob die folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

(I) F(x) besitzt auf dem angegebenen Intervall zwei Wendestellen.
(II) F(0) > F(2).
(III) Das Schaubild von f‘(x) ist überall linksgekrümmt.
(IV) f‘(0) < 1.
(V) F(x) besitzt im angegebenen Intervall Nullstellen.
(VI) $\int_{-1}^{4} f'(x)dx > 0$.



3. Die nachstehenden Abbildungen A-C zeigen die Schaubilder von einer Funktion f(x), deren Ableitung und deren Stammfunktion. Ordne die Abbildungen f’(x), f(x) und F(x) zu. Begründe.

A	B	C
		

Lösungen: 2. (I) richtig / (II) falsch / (III) richtig / (IV) richtig / (V) unentscheidbar / (VI) falsch /
3. A: f’(x), B: F(x), C: f(x); Begründung: NEW-Regel.

Aufgabe 1:

1.1. Bestimme alle Nullstellen der Funktion $f(x) = x^5 + 5x^3 - 36x$.

1.2. Bestimme die Tangente an die Funktion $f(x) = \frac{5}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{4}$ an der Stelle $x_0 = 2$.

1.3. Bestimme zur Funktion: $f(x) = \frac{4}{\pi} - 5\cos(2x)$ die Stammfunktion, die durch den Punkt P($\frac{\pi}{2}$|-1) verläuft.

1.4. Eine Sinusfunktion f(x) besitzt mit H(2|5) und T(6|-1) zwei aufeinanderfolgende Extrempunkte. Bestimme die Funktionsgleichung der trigonometrischen Funktion.

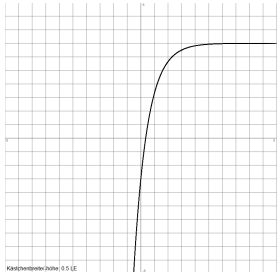
1.5. Zeige, dass an keinem Punkt der Funktion $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 4$ die Steigung den Wert der Ableitung an der Stelle x = 2 übertrifft.

1.6. Bestimme zur Funktion $f(x) = \frac{7}{2} - 5e^{-2x}$ die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen des Koordinatensystems und die Asymptote. Skizziere das Schaublid K_f.

1.7. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +\ 2x - 3y + 1z &= -4 \\ -\ 3x + 2y - 1z &= 1 \\ +\ 1x + 5y + 2z &= -3 \end{aligned}$$

Lösungen: 1.1. Nullstellen N(-2|0), N(0|0), N(2|0) /
1.2. Tangente t: y = -2,5x+4,75 /
1.3. $F(x) = \frac{4}{\pi}x - \frac{5}{2}\sin(2x) - 3$ /
1.4. f(x) = asin(kx)+b mit: b=2, a=3, p/2=4 -> p=8 -> k=π/4: f(x) = 3sin(πx/4)+2 /
1.5. Wendepunkt W(2|-28) mit maximaler Steigung f'(2)=12 /



1.6. y-Achse: S_y(0|-1,5), x-Achse: N(-ln(0,7)/2|0), waagerechte Asymptote y = 3,5 / Skizze: /
1.7. Lösungen: x=2, y=1, z=-5.

Aufgabe 2:

2.1. Gegeben ist die nebenstehende Wertetabelle einer ganz rationalen Funktion 3. Grades f(x).

a) Bestimme aus der Tabelle die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte der Funktion.

b) Bestimme den Funktionsterm.

c) Skizziere die Funktion.

Wertetabelle:

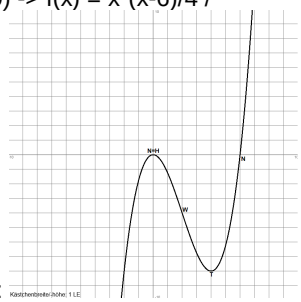
x	f(x)	f'(x)	f''(x)
-10	-400	105.25	-18
-9	-303.75	88	-16.5
-8	-224	72.25	-15
-7	-159.25	58	-13.5
-6	-108	45.25	-12
-5	-68.75	34	-10.5
-4	-40	24.25	-9
-3	-20.25	16	-7.5
-2	-8	9.25	-6
-1	-1.75	4	-4.5
0	0	0	-3
1	-1.25	-2	-1.5
2	-4	-2.75	0
3	-6.75	-2	1.5
4	-8	0	3
5	-6.25	4	4.5
6	0	9.25	6
7	12.25	16	7.5
8	32	24.25	9
9	60.75	34	10.5
10	100	45.25	12

2.2. Wo schneidet das Schaubild der Funktion $g(x) = e^{2x} - 4e^{x}$ die Achsen des x-y-Koordinatensystems? Ermittle die Koordinaten des Extrem- und des Wendepunktes der Funktion.

2.3. Bestimme die Wendetangente zur Funktion $h(x) = x^3 - 3x^2 + 10$.

2.4. Berechne das bestimmte Integral: $\int_0^{\ln 8} 4e^{-2x}\,dx$.

Lösungen: 2.1. Nullstelle/Hochpunkt N/H(0|0), Wendepunkt W(2|-4), Tiefpunkt T(4|-8), N(6|0) -> f(x) = x^2(x-6)/4 /

Skizze: 

/

2.2. y-Achse: S_y(0|-3), x-Achse: N(ln(4)|0) / Tiefpunkt (ln(2)|-4), Wendepunkt W(0|-3) /
2.3. f''(x) = 0 -> Wendepunkt W(1|8), f'(1) = -3 -> Wendetangente t: y = -3(x-1)+8 = -3x+11 /
2.4. 63/32.

Aufgabe 3:

3.1. Für die ganz rationale Funktion $f(x) = -\frac{x^2}{5}(x^2 - 4)$ sind Lage und Typ der Nullstellen zu bestimmen. Skizziere die Funktion.

3.2. Gegeben ist die trigonometrische Funktion $g(x) = 2\cos(\frac{\pi}{4}x)$.

a) Bestimme die Tangente an die Funktion g(x) an der Stelle $x_0 = 2$.

b) Wie groß ist Fläche zwischen Tangente und Funktion im 1. Quadranten des Koordinatensystems?

Zu betrachten ist im Folgenden die ganz rationale Funktion $h(x) = \frac{1}{4}x^3 - 4x$.

3.3. Auf welche Weise lässt sich der Inhalt der Fläche A zwischen Funktion h(x) und x-Achse berechnen? Begründe.

(I) A = $\int_{-4}^{4} h(x)dx$

(II) A = $\int_{-4}^{0} h(x)dx - \int_{0}^{4} h(x)dx$

(III) A = $-2 \cdot \int_{0}^{4} h(x)dx$

(IV) A = $\int_{-4}^{0} |h(x)|dx - \int_{0}^{4} |h(x)|dx$

3.4. Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion h(x) auf den jeweiligen Monotonieintervallen.

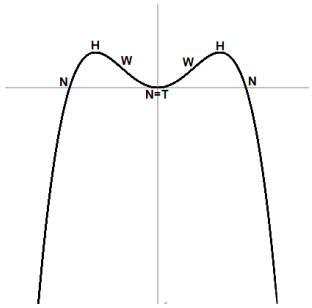
3.5. Bestimme u:

$$\int_{0}^{u} \frac{1}{4} e^{0,25x} dx = 5.$$

3.6. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +4x - 1y &= -4 \\ +2x + 2y - 5z &= 3 \\ -6x + 7z &= 3 \end{aligned}$$

Lösungen: 3.1. einfache Nullstellen N(-2|0), N(2|0), doppelte Nullstelle/Tiefpunkt N/T(0|0) /

Skizze: 

/

3.2. Tangente: y = -πx/2+π, Fläche: A = $\int_{0}^{2}(y - g(x))dx$ = π-8/π /

3.3. (I) falsch / (II) richtig / (III) richtig / (IV) falsch / 3.4. Hochpunkt bei x=-4/√3, Tiefpunkt bei x=4/√3 -> Monotonieintervalle: (-∞; -4/√3) steigend, (-4/√3; 4/√3) fallend, (4/√3; ∞) steigend.
3.5. u = 4ln(6) / 3.6. Lösungen: x=-0,5, y=2, z=0.

Aufgabe 1:

1.1. Die Funktion g(x) ist nur teilweise bekannt mit:

$$g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

g(x) hat zudem folgende Eigenschaften: Der y-Achsenabschnitt der Funktion ist -4; bei x = 1 liegt ein Hochpunkt und eine Nullstelle vor. Bestimme die Funktion g(x) vollständig.

1.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4,$$

zu der alle Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte zu bestimmen sind. Skizziere die Funktion f(x) im Bereich -3 ≤ x ≤ 5.

1.3. Bestimme an die Funktion f(x) die Tangente t, die durch den Funktionspunkt P(0|-4) geht. Bestimme, in welchem Punkt die Tangente t die Funktion f(x) außerdem noch schneidet.

1.4. Berechne exakt den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen der Funktion f(x) und der Tangente t liegt.

1.5. Für welches u, 0 ≤ u ≤ 6, ist der Abstand zwischen Tangente t und Funktion f(x) am größten?

1.6. Zeige, dass sich die Funktionen f(x) und die Parabel

$$h(x) = -x^2 + x$$

im Wendepunkt von f(x) berühren.

Lösungen: 1.1. b = -6, c = 9, d = -4 /
1.2. N(1|0), N(4|0); H(1|0), T(3|-4); W(2|-2) /
1.3. t: y = 9x-4; Q(6|50) /
1.4. A = $\int_0^6 (t(x) - f(x))dx = \int_0^6 (-x^3 + 6x^2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3\right]_0^6 = 108$ /
1.5. d(u) = $-u^3+6u^2$; u = 4 mit d(4) = 32 /
1.6 W(2|-2); h(2) = -2 = f(2); h'(2) = -3 = f'(2) mit h'(x) = -2x+1

Aufgabe 2:

2.1. Die Funktion

$$g(x) = ae^{-x} + bx + c$$

schneidet die y-Achse bei y = -1, hat im Schnittpunkt einen Tiefpunkt und besitzt an der Stelle x = -1 eine Tangente, die zur Gerade y = (1-e)x parallel ist. Bestimme a, b und c.

2.2. Bestimme – falls vorhanden – die Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = e^{-x} + x - 2\,.$$

Skizziere die Funktion f(x) und deren Asymptote.

2.3. Berechne exakt die zwischen Funktion f(x) und Asymptote, y-Achse und Gerade x = 6 eingeschlossene Fläche.

2.4. In welchem Größenverhältnis stehen die beiden Flächen zueinander, die jeweils zwischen der Funktion f(x) und der x- und y-Achse liegen?

2.5. Bestimme die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0 =1. Wo schneidet die Tangente die Achsen des Koordinatensystems?

Lösungen: 2.1. a = 1, b = 1, c = -2 /
2.2. N(-1,15|0), N(1,85|0); T(0|-1); kein Wendepunkt /
2.3. A = 1 – e^{-6} /
2.4. $A_1 = \int_{-1,15}^{0} (-f(x))dx = \left[e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1,15}^{0} = 0{,}8$; $A_2 = \int_{0}^{1,85} (-f(x))dx = \left[e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{0}^{1,85} = 1{,}13$; $A_2 : A_1 = 1{,}4$ /
2.5. Tangente: y = 0,6321x-1,2642 -> S_y(0|-1,2642), N(2|0).

Aufgabe 3:

3.1. Die trigonometrische Funktion f(x) entsteht aus der Sinusfunktion durch Streckung um den Faktor π/4 entlang der x-Achse und um den Faktor 2 in Richtung der y-Achse, weiter durch Spiegelung um die Achse und durch die Verschiebung um 1 nach unten. Bestimme Funktionsgleichung und Periode. Zeichne den Graphen der Funktion, 0≤x≤10.

3.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -2\sin(\frac{\pi}{4}x) - 1$$

Zeige, dass an den Stellen $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$ die Funktion Wendepunkte besitzt. Wie lauten die Wendetangenten?

3.3. Wendetangenten und Funktion begrenzen eine Fläche. Bestimme den Flächeninhalt!

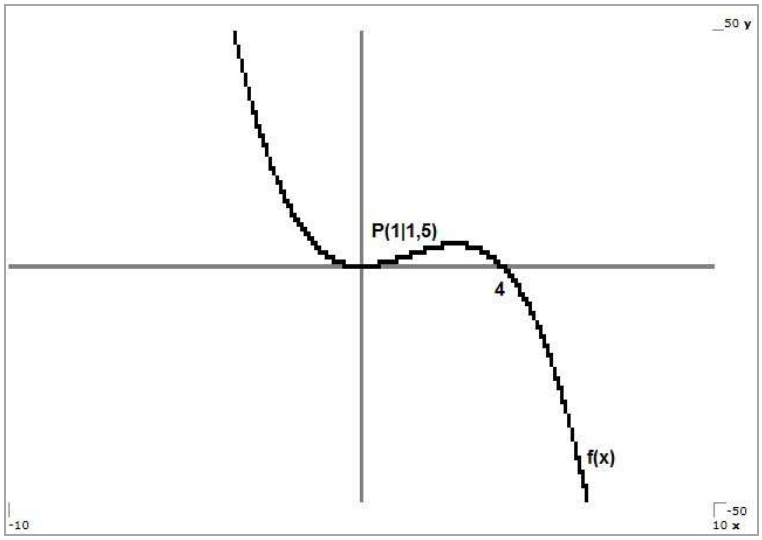
3.4. Im Bereich 4 ≤ x ≤ 8 soll die Funktion f(x) durch eine Parabel 2. Grades, benannt als g(x), angenähert werden. Die Parabel hat mit der Sinuskurve den Hochpunkt gemeinsam und verläuft durch die Wendepunkte der Funktion f(x).

3.5. Die Kurve der Parabel $g(x) = -0{,}5x^2+6x-17$ soll so verschoben warden, dass sie mit der x-Achse des Koordinatensystems nur einen Punkt gemeinsam hat. Bestimme die neue Parabelfunktion h(x).

Lösungen: 3.1. f(x) = -2·sin(πx/4) – 1, p = 8 /
3.2. Wendepunkte: $W_1(4|-1)$, $W_2(8|-1)$; Wendetangenten: y = 1,57x – 7,28, y = -1,57x + 11,56
3.3. $A = 2\int_4^6 (y - f(x))dx = 1{,}187$ /
3.4. $W_1(4|-1)$, $W_2(8|-1)$, H(6|1), $g(x) = ax^2+bx+c$, g(6) = 1, g‘(6) = 1, g(4) = -1 -> $g(x) = -0{,}5x^2+6x-17$ /
3.5. $h(x) = -0{,}5x^2+6x-20$.

Aufgabe 4:

4.1. Bestimme aus der nachstehenden Zeichnung den Funktionsterm der ganz rationalen Funktion 3. Grades.



4.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 6x^2$$

Berechne exakt die Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte der Funktion. Wo ist die Funktion monoton steigend, wo fallend, wo ist die Funktion links, wo rechts gekrümmt? Zeichne die Funktion.

4.3. Die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle $x_0 = 5$ bildet zusammen mit der x- und y-Achse ein rechtwinkliges Dreieck im Koordinatensystem. Bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

4.4. Welchen prozentualen Anteil hat die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse an der Dreiecksfläche zwischen Tangente und Achsen?

4.5. Die Gerade x = u, 0≤u≤6, schneidet die x-Achse im Punkt R, die Funktion f(x) im Punkt S. Zusammen mit dem Koordinatenursprung O bilden die Punkte R und S das rechtwinklige Dreieck ORS. Für welches u hat dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?

Lösungen: 4.1 $f(x) = 0{,}5x^2(4–x)$ /
4.2 N(0|0)=T(0|0), W(2|16), H(4|32), N(6|0), Monotonie: fallend auf (-∞,0), (4,∞), steigend auf (0,4),
Krümmung: links gekrümmt auf (-∞,2), rechts gekrümmt auf (2,∞) /
4.3 t: y = -15x+100 -> N_t(20/3|0), S_t(0|100) -> A_Δ = 1000/3 /
4.4 Grenzen: a=0, b=6 -> A = 108 -> 108/(1000/3) = 0,324 = 32,4 % /
4.5 A(u) = uf(u)/2 -> Maximum bei u = 4,5 mit A(4,5) = 68,34, A(0) = 0, A(6) = 0

Aufgabe 5:

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = e^x - x - 5\,,\ g(x) = x^2 - 4\,.$$

5.1. Zeichne beide Funktionen im Bereich -6≤x≤2. Bestimme die Nullstellen der Funktion f(x). Berechne exakt den Tiefpunkt von f(x). Zeige, dass f(x) immer links gekrümmt ist.

5.2. Zeige, dass sich die Funktionen f(x) und g(x) im Tiefpunkt von f(x) berühren.

5.3. Wie groß ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen f(x) und g(x) sowie der Geraden x = -4?

5.4. Wie groß ist die Fläche zwischen der Funktion f(x) und deren Asymptote im Bereich -2≤x≤-1? Skizziere die Fläche in der Zeichnung.

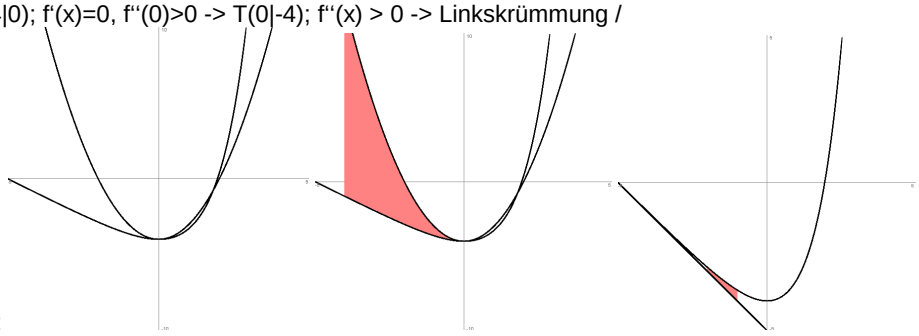
Die Bevölkerungszahl in einem Land gehorcht dem Gesetz des exponentiellen Wachstums. Zum Zeitpunkt t=0, was dem Jahr 2000 entspricht, lebten in dem Land 28 Millionen Einwohner, 10 Jahre später 30,5 Millionen Menschen.

5.5. Bestimme die zugehörige Funktion des exponentiellen Wachstums. Wie groß ist die prozentuale Zunahme pro Jahr?

5.6. Mit welcher Bevölkerungszahl ist für das Jahr 2020 zu rechnen? Wann überschreitet die Bevölkerungszahl die Grenze von 35 Millionen Einwohnern?

5.7. Wie groß ist die Zunahme an Einwohnern im Jahr 2015?

Lösungen: 5.1. N(-4,99|0), N(1,94|0); f'(x)=0, f''(0)>0 -> T(0|-4); f''(x) > 0 -> Linkskrümmung /



Skizzen: /

5.2. f(0) = g(0) = -4, f'(4) = g'(4) = 0 /

5.3. A = $\int_{-4}^{0} (g(x) - f(x))dx =$ 16,35 /

5.4. Asymptote y = -x–5, A = $\int_{-2}^{-1} (f(x) - y)dx =$ 0,23 /

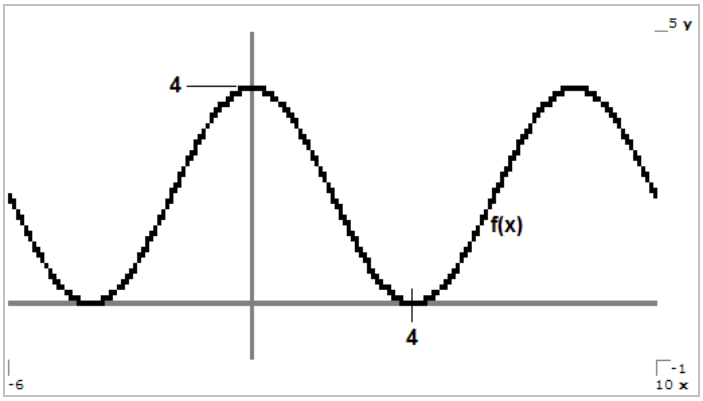
5.5. h(t) = $28e^{0,0086t}$ -> prozentuale Zunahme pro Jahr: +0,86 % /

5.6. h(20) = 33,26; f(t)=35 -> t=26 /

5.7. h'(15) = 0,274.

Aufgabe 6:

6.1. Bestimme aus der unten stehenden Zeichnung die Funktionsgleichung der trigonometrischen Funktion f(x).



6.2. Es sei:

$$f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{4}x) + 2\,,\ g(x) = -0{,}5x^2 + x + 4\,.$$

Zeige, dass die Parabel die Kosinusfunktion in einem Hochpunkt und einem Tiefpunkt schneidet. Berechne mit Hilfe einer Stammfunktion den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Funktionen im 1. Quadranten des Koordinatensystems.

6.3. Gegeben ist die Funktion:

$$h(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{1}{2}$$

Zeige:

a) Die Funktion hat den Hochpunkt H(-1|0).
b) Die Funktion hat den Wendepunkt bei x = 2/3.
c) Die Funktion hat eine Nullstelle bei x = 4.

Stelle die Funktion h(x) in Produktform dar.

6.4. Wie groß ist die Fläche zwischen der Funktion h(x) und der x-Achse?

Lösungen: 6.1. $f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{4}x) + 2$ /

6.2. $S_1(0|4)$, $S_2(4|0)$, A = $\int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{8}{\pi}\sin(\frac{\pi}{4}x)\right]_0^4$ = 5,33 /

6.3. a) f(-1)=0, f'(-1)=0, f''(-1)<0; b) f''(2/3)=0, f'''(2/3)≠0; c) f(4)=0; f(x) = $(x+1)^2(x-4)/8$ /

6.4. -A = $\int_{-1}^4 h(x)dx = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{7}{16}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^4$ = -6,51 -> A = 6,51 FE.

Aufgabe 7:

7.1. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind:

a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens eine Nullstelle.
b) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat genau einen Wendepunkt.
c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 3 + e^{-0,5x}$ ist rechts gekrümmt.
d) Die Funktion $f(x) = 2x + \cos x$ ist stets monoton steigend.
e) Die Funktion $f(x) = \frac{3}{5}x^2(x+11)$ ist achsensymmetrisch.

7.2. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}x)\,,\ \ y = -x^2 + 4x\,.$$

a) Zeige, dass sich beide Funktionen auf der x-Achse schneiden.
b) Berechne den Flächeninhalt der von beiden Funktionen eingeschlossenen Fläche.

7.3. Zeige: Die Funktionen

$$g(x) = 6 - 2e^{-x} \text{ und } h(x) = 4\left(1 - \sin\left(\frac{x}{8}\right)\right)$$

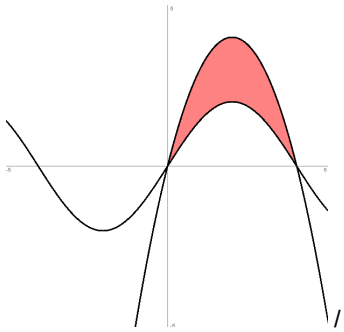
schneiden sich auf der y-Achse senkrecht.

7.4. Für die Funktion

$$k(x) = e^x - \frac{e^4}{4}x$$

ist die mittlere Änderungsrate im Intervall [0; 4] zu bestimmen. An welcher Stelle hat die Funktion eine Steigung, die mit dieser mittleren Änderungsrate übereinstimmt. Wie lautet die Gerade durch die Punkte P(0|1) und Q(4|0), wie die dazu parallele Tangente an die Funktion?

Lösungen: 7.1. a) richtig; b) richtig; c) falsch; d) richtig; e) falsch /



7.2. Nullstellen als Schnittpunkte N(0|0), N(4|0); A = 5,5737 FE / Skizze: /
7.3. g(0) = h(0) = 4, g‘(0)·h‘(0) = 2·(-1/2) = -1 /
7.4. m = -0,25, k‘(x) = -0,25 -> x_0 = 2,595 -> Tangente in x_0: y = -0,25x–21,37, Gerade: y = -0,25x+1

Aufgabe 8:

8.1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^x + x - 1.$$

Zeige, dass gilt:

$$\int_0^2 (e^x + x - 1)dx = e^2 - 1.$$

8.2. Wie groß ist die Fläche zwischen Funktion f(x) und deren Asymptote im Bereich der Geraden x = -2 und der y-Achse?

8.3. Die Funktion

$$g(t) = 113{,}1 - 98{,}2e^{-0{,}09t}, \ t \geq 0$$

beschreibt das (beschränkte) zeitliche Wachstum von Bakterien, die in einer kreisrunden Petrischale eine Fläche bedecken (t [h], g(t) [cm^2]). Beantworte folgende Fragen:

a) Wie groß ist die Fläche, die die Bakterien bei Beobachtungsbeginn bedecken?
b) Welche Fläche können die Bakterien maximal bedecken? Wie groß ist der Durchmesser der Petrischale?
c) Wie groß ist die bedeckte Fläche nach 5,5 Stunden?
d) Wann ist die halbe Fläche der Petrischale von Bakterien bedeckt?
e) Wie groß ist Zunahme der Bakterienfläche zum Zeitpunkt 10 Stunden?
f) Wie groß ist die durchschnittliche Änderung der Bakterienfläche in den ersten 15 Stunden?

8.4. Für die Exponentialfunktion

$$h(x) = ax + b + ce^{-0{,}5x}$$

sind die Koeffizienten a, b und c zu bestimmen. Dabei gilt:

a) Die Asymptote von h(x) geht durch die Punkte A(0|-2e) und B(2|0).
b) h(x) hat einen Tiefpunkt an der Stelle $x_0 = -2$.

Gib die Koordinaten des Tiefpunkts an. Bestimme die Nullstellen von h(x). Skizziere die Funktion im entscheidenden Bereich.

8.5. Bestimme den Term einer ganz rationalen Funktion in der Form

$$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

, deren Schaubild bei $N_1(-4|0)$ eine doppelte, bei $N_2(8|0)$ eine einfache Nullstelle besitzt und die y-Achse bei -8 schneidet.

Lösungen: 8.1. $\int_0^2 (e^x + x - 1)dx = \left[e^x + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^2 = (e^2 + 2 - 2) - (1 + 0 - 0) = e^2 - 1$ /

8.2. A = 0,8647 /
8.3. a) g(0)=14,9; b) A=113,1 -> d=12 cm; c) g(5,5)=53,24; d) g(t)=113,1/2=56,55 -> t=6,13;
e) g'(10)=3,59 cm^2/h; f) m = (g(15)-g(0))/(15-0) = 4,85 /
8.4. Asymptote y = ex–2e -> a=2, b=-2e, h'(x) = e-0,5$ce^{-0,5x}$ -> h'(-2) =0 -> c=2 -> h(x) = ex–2e+2$e^{-0,5x}$;
T(-2|-5,44), N(-4,3|9), N(1,68|0)
8.5. k(x) = $(x+4)^2(x-8)/16 = x^3/16 - 3x - 8$

Aufgabe 9:

9.1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 3 \cdot \cos(2x) + 5$$

Skizziere die Funktion im Intervall [-2; 4]. Berechne die dort auftretenden Hoch- und Tiefpunkte exakt. Zeige, dass die Funktion achsensymmetrisch ist.

9.2. Bestimme im ersten Wendpunkt der Funktion f(x) mit positiver x-Koordinate exakt die Tangente an die Funktion. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, das durch x-Achse, y-Achse und Tangente begrenzt wird?

9.3. Auf dem Intervall [-2; 2] soll f(x) angenähert werden durch eine ganz rationale Funktion 4. Grades, die durch die Extrempunkte von f(x) verläuft. Berechne die Funktionsgleichung dieser ganz rationalen Funktion g(x).

9.4. Ergänze! Für die Funktion

$$g(x) = 0{,}9855x^4 - 4{,}863x^2 + 8$$

gilt:

a) g(x) ist monoton steigend für _____ < x < _____ oder x > _____.

b) g(x) hat die Steigung -2 bei x = _____, x = _____, x = _____.

c) Die Ableitung g‘(x) hat Nullstellen bei x = _____, x = _____, x= _____.

d) Die Ableitung g‘(x) ist negativ für x < _____ oder _____ < x < _____.

e) Die Ableitung g‘(x) ist _____symmetrisch.

f) Die Stammfunktion G(x) hat an den Stellen x = _____, x = _____, x = _____ Wendepunkte.

g) Die Stammfunktion G(x) ist überall monoton _____.

h) Für die Stammfunktion G(x) gilt für x->∞: G(x) -> ____, für x-> -∞: G(x) -> ____.

i) Die Stammfunktion hat genau _____ Nullstelle/n.

Lösungen: 9.1. $T_1(-\pi/2|2)$, $H_1(0|8)$, $T_2(\pi/2|2)$, $H_2(\pi|8)$; f(-x) = f(x) /
9.2. W(π/4), t: y = -6x +3π/2 + 5; Nullstelle der Tangente: x_t = 1,62 = g, h = 3π/2 + 5 -> A = 7,86 FE /
9.3. Achsensymmetrie -> $g(x) = ax^4 + cx^2 + e$ mit g(0)=8, g(π/2)=2, g‘(π/2)=0 ->
$g(x) = 0{,}9855x^4 - 4{,}863x^2 + 8$
9.4. a) –π/2<x<0, x>π/2; b) x=-1,665, x=0,218; c) x=-π/2, x=0, x=π/2; d) x<-π/2, 0<x<π/2;
e) punktsymmetrisch; f) x=-π/2, x=0, x=π/2; g) steigend; h) G(x) -> ∞, G(x) -> -∞; i) 1.

Potenzgesetze: $a^0=1$, $a^1=a$, $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$, $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $(ab)^n=a^n\cdot b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $1^n=1$; (im Zusammenhang mit der e-Funktion:) $e^0=1$, $e^1=e$, $e^n\cdot e^m=e^{n+m}$, $\frac{e^n}{e^m}=e^{n-m}$, $\frac{1}{e^n}=e^{-n}$, $(e^n)^m=e^{n\cdot m}$ (e = Eulersche Zahl)	
Logarithmengesetze: $\ln 1=0$, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$, $\ln(a^r)=r\cdot\ln a$, $\ln e^x=x$, $e^{\ln x}=x$ (e = Eulersche Zahl, ln = $\log_e$ mit: $e^{-\infty}=0$, $e^{\infty}=\infty$, $\ln 0=-\infty$, $\ln(\infty)=\infty$)	
Sinus, Cosinus: $\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\pi=0$, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, $\sin 2\pi=0$; $\cos 0=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\pi=-1$, $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, $\cos 2\pi=1$; $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$ (Symmetrie); $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ (Periodizität)	
Gleichungen: $ax+b=c\Leftrightarrow x=\frac{c-b}{a}$ (linear); $x^2+px+q=0\Leftrightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (p-q-Formel), $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel) (quadratisch); $ax^3+bx^2+cx=0\Leftrightarrow x(ax^2+bx+c)=0$ (Ausklammern); $ax^4+bx^2+c=0\Leftrightarrow az^2+bz+c=0$ (bi-quadratisch, Substitution: $z=x^2$); $e^x=c\Leftrightarrow x=\ln c$ (exponential); $\sin x=c\Leftrightarrow x_{1,2}=\sin^{-1}(c)+2k\pi$ u.ä. (kε**Z**, trigonometrisch)	
Funktionen: f: D_f -> **R**, f(x): ganz rationale, trigonometrische, Exponentialfunktionen, D_f = **R** als Defintionsbereich, W_f als Wertebereich	
Geraden (m = Steigung, c = y-Achsenabschnitt, Punkte $P(x_1\|y_1)$, $Q(x_2\|y_2)$): y = mx+c <- $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (Zweipunkteform); $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$ (Punktsteigungsform)	
Parabeln: $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_S)^2+y_S$ mit Scheitelpunkt (Hoch-/Tiefpunkt) $S(x_S\|y_S)$	
Ganz rationale Funktionen: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ mit Grad n	
Trigonometrische Funktionen: $f(x)=a\sin(b(x-c))+d$, $f(x)=a\cos(b(x-c))+d$ mit: a = Amplitude, p = $\frac{2\pi}{b}$ = Periode, c = Verschiebung entlang der x-Achse, d = Verschiebung entlang der y-Achse	
Exponentialfunktionen (zur Basis e): $f(x)=ae^{kt}+b$ mit: b = waagerechte Asymptote/Schranke, k = Proportionalitätsfaktor	
Ableitungen: f'(x), f''(x), …	Aufleitung/Stammfunktion: $F(x)=\int f(x)dx+C$
Ableitungsregeln (Funktionen u(x), v(x)): $(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$ (Summenregel) $(u(x)+r)'=u'(x)$ (additive Konstante) $(ku(x))'=ku'(x)$ (multiplikative Konstante) $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ (Produktregel) $(u(v(x)))'=u'(v(x))\cdot v'(x)$ (Kettenregel)	Aufleitungsregeln (Funktionen u(x), v(x)): $\int(u(x)+v(x))dx=\int u(x)dx+\int v(x)dx$ $\int(ku(x))dx=k\int u(x)dx$ $F(x)=\int f(x)dx+C$ mit: F'(x) = f(x) (Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel), $((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$, $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$, $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}$ $\int \sin x dx = -\cos x$, $\int \cos x dx = \sin x$, $\int e^x dx = e^x$, $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$, $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$, $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
<u>Tangente</u>: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ im <u>Berührpunkt</u> B(x_0|f(x_0)): f(x_0) = y(x_0), f'(x_0) = y'	<u>Integrationskonstante</u> C: f(x), F(x) mit F(x_0) = y_0 -> F_0(x) mit C_0=0 -> C=y_0–F_0(x_0), F(x) = F_0(x)+C
<u>Kurvendiskussion</u>: I. Definitionsbereich D_f = **R** II. x –> ±∞: f(x) –> ±∞ (Polynomgrad) bzw. f(x) –> a = y (waagerechte Asymptote) bzw. f(x) –> ax+b =y (schiefe Asymptote) III. Symmetrie: f(-x) = f(x) Achsensymmetrie, f(-x) = -f(x) Punktsymmetrie IV. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x) V. Nullstelle: f(x_0) = 0 -> N(x_0|0) VI. Extremstelle: f'(x_0) = 0 -> Hochpunkt H(x_0|f(x_0)) (f''(x_0)<0), Tiefpunkt T(x_0|f(x_0)) (f''(x_0)>0) VII. Wendestelle: f''(x_0) = 0 -> W(x_0|f(x_0)) (f'''(x_0)≠0) VIIa. Sattelpunkt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0 -> S(x_0|f(x_0)) (f'''(x_0)≠0) VIII. Monotonie: steigend (f'(x)≥0), fallend (f'(x)≤0) -> Monotonieintervalle zwischen -∞, Extrema, +∞ IX. Krümmung: links (f''(x)≥0), rechts (f''(x)≤0) -> Krümmungsintervalle zwischen -∞, Wendestellen, +∞	<u>Bestimmtes Integral</u> (Integrationsgrenzen a, b): $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ <u>Flächen</u> (Funktionen f(x), g(x)): I. Fläche zwischen Funktion und x-Achse: x_1, x_2, … Nullstellen mit f(x) = 0 -> $I_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$, … -> A_1 = |I_1|, … -> A = A_1 + … II. Fläche zwischen zwei Funktionen: x_1, x_2, … Schnittstellen mit f(x) = g(x) -> $I_1 = \int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))dx = [F(x)-G(x)]_{x_1}^{x_2} =$ $F(x_2) - G(x_2) - F(x_1) + G(x_2)$, … -> A_1 = |I_1|, … -> A = A_1 + …
<u>(Grafisches) Auf- und Ableiten</u>: f'(x) <-> f(x), f(x) <-> F(x) (NEW-Regel): f'(x)/f(x): positiv <=> f(x)/F(x): streng monoton steigend f'(x)/f(x): negativ <=> f(x)/F(x): streng monoton fallend f'(x)/f(x): Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel von - nach + <=> f(x)/F(x): Tiefpunkt x_0 f'(x)/f(x): Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel von + nach - <=> f(x)/F(x): Hochpunkt x_0 f'(x)/f(x): Hoch-/Tiefpunkt x_0 <=> f(x)/F(x): Wendepunkt x_0 f'(x)/f(x): Nullstelle als Hoch-/Tiefpunkt x_0 <=> f(x)/F(x): Sattelpunkt x_0 f'(x)/f(x): x->±∞: f'(x)/f(x) -> 0 <=> x->±∞: f'(x)/f(x) -> C f'(x)/f(x): x->±∞: f'(x)/f(x) -> c <=> x->±∞: f'(x)/f(x) -> cx f(x): doppelte Nullstelle -> Hochpunkt, Tiefpunkt; dreifache Nullstelle -> Sattelpunkt	
<u>Bestimmungsaufgabe</u>: I. Funktionstyp: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ...$ (ganz rational) oder: $f(x) = ae^{kt}$, $f(x) = ae^{kt} + b$ (exponentiell) mit n Unbekannten a, b, …, k II. Ableitungen: f'(x), f''(x) III. n Eigenschaften: f(x_1) = y_1, …, f'(x_2) = y_2, …, f''(x_2) = y_2, … u.ä. -> n Gleichungen IV. (Lineares) Gleichungssystem: Lösungen a, b, … <- Gauß-Algorithmus o.ä. V. Errechnete Funktionsgleichung f(x).	<u>Extremwertaufgabe</u> (Variable u, v): I. Nebenbedingung: $v = g(u)$, u ϵ [a;b] II. Hauptbedingung: $f*(u,v) = f*(u,g(u)) = f(u)$ III. Maximierung, Minimierung: f'(u) = 0 -> u_0 als Hochpunkt H(u_0|f(u_0)) (f''(u_0)<0) bzw. als Tiefpunkt T(u_0|f(u_0)) (f''(u_0)>0) IV. Vergleich mit den Randextrema (u=a, u=b): Maximum bzw. Minimum der Werte f(a), f(u_0), f(b) als globales Maximum bzw. Minimum

<u>Bestimmungsaufgabe</u> (trigonometrische Funktionen): I. Funktionstyp $f(x)=a\sin(b(x-c))+d$, $f(x)=a\cos(b(x-c))+d$ mit Unbekannten a, b, c, d II. Eigenschaften: Tiefpunkt T(x_T|y_T), Wende-/Mittellinienpunkt W(x_W|y_W), Hochpunkt H(x_H|y_H) III. Berechnung der Unbekannten u.a. mit: d = $\frac{y_T+y_H}{2}$, a = y_H-d, b = $\frac{2\pi}{p}$ (<- Periode p von Mittellinienpunkt zum übernächsten Mittellinienpunkt bzw. von Tiefpunkt zu Tiefpunkt bzw. von Hochpunkt zu Hochpunkt), c = x_W (bei Sinusfunktion) bzw. c = x_H (bei Kosinusfunktion)
<u>Wachstum</u>: $f(x)=ae^{kt}$ (exponentielles Wachstum, exponentieller Zerfall, k Proportionalitätsfaktor), $f(x)=ae^{kt}+b$ (beschränktes Wachstum, beschränkter Zerfall, k Proportionalitätsfaktor, b Schranke) mit: f(x) Bestand -> f'(x) Zunahme/Abnahme/Veränderung des Bestands