Michael Buhlmann

Mathematik
für das Berufskolleg

Daten- und Aufgabenblätter zur Mathematik

Version 3

Essen 2015

Vorwort

Diese Sammlung aus Daten- und Aufgabenblättern geht aus einer jahrelangen Tätigkeit als Nachhilfelehrer für Oberstufenschüler und Erwachsene hervor. Die einzelnen Daten- und Aufgabenblätter wurden in einer sinnvollen Reihenfolge zusammengestellt. Zudem finden sich Rechenprogramme zu den behandelten Themen auf meiner Homepage

http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/index.htm

Die Mathematik für das Berufskolleg gliedert sich in: Analysis sowie die Nebenfächer: Vektorrechnung, Wirtschaftliche Anwendungen, Stochastik, Statistik, Mathematik in der Praxis (Kosten- und Erlösrechnung u.a.).

Essen im Mai 2015, *Michael Buhlmann*

Impressum:

© 2014/15 Wissenschaftlicher Selbstverlag Michael Buhlmann
Sedanstr. 35, D-45138 Essen, Deutschland
www.michael-buhlmann.de, kontakt-hp@michael-buhlmann.de

Inhalt

Datenblatt: Reelle Zahlen, reelle Funktionen
Aufgabenblatt: Reelle Funktionen
Datenblatt: Maße und Umrechnungen
Datenblatt: Gleichungen
Aufgabenblatt: Gleichungen
Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme
Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme
Datenblatt: Geraden
Aufgabenblatt: Geraden
Datenblatt: Parabeln
Datenblatt: Mittlere, momentane Änderungsrate, Ableitung
Aufgabenblatt: Ableitungen
Datenblatt: Tangenten, Normalen
Aufgabenblatt: Tangenten, Normalen
Datenblatt: Symmetrie von Funktionen
Datenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Aufgabenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Datenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Aufgabenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Datenblatt: Exponentialfunktionen, Asymptoten, Wachstum
Aufgabenblatt: Exponentialfunktionen
Datenblatt: Trigonometrische Funktionen
Aufgabenblatt: Trigonometrische Funktionen
Datenblatt: Extremwertaufgaben
Aufgabenblatt: Extremwertaufgaben
Datenblatt: Integrale, Aufleitungen, Flächen
Aufgabenblatt: Integrale, Aufleitungen, Flächen
Datenblatt: Grafisches Auf- und Ableiten
Datenblatt: Punkte und Vektoren
Datenblatt: Vektoren und Geometrie
Aufgabenblatt: Punkte und Vektoren
Datenblatt: Vektoren und Geraden
Aufgabenblatt: Vektoren und Geraden
Aufgabenblatt: Vektorrechnung
Datenblatt: Wirtschaftliche Anwendungen
Aufgabenblatt: Wirtschaftliche Anwendungen
Datenblatt: Daten, Diagramme, Statistik
Aufgabenblatt: Daten, Diagramme, Statistik
Datenblatt: Stochastik
Aufgabenblatt: Stochastik
Musteraufgaben
Anhang

Datenblatt: Reelle Zahlen, reelle Funktionen

Die reellen Zahlen **R** ist Zahlenmenge aller abrechenden, periodischen und nichtperiodischen Dezimalzahlen. Auf den reellen Zahlen sind die Verknüpfungen + und * für Addition (Subtraktion) und Multiplikation (Division) definiert:

$$a+b,\ a-b,\ a*b,\ a/b\ (b\neq 0)$$

Die Verknüpfungen machen aus den reellen Zahlen einen (algebraischen) Körper mit positiven, negativen Zahlen sowie Zahl und Kehrzahl. Zudem wird mit ≤ eine Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen definiert, die Kleiner-gleich-Relation macht Zahlen vergleichbar. Mit -∞ und ∞ („unendlich“) sind Elemente gegeben, so dass:

$$-\infty < r < \infty$$

für jede reelle Zahl r gilt. Auf den reellen Zahlen lassen sich auf Grund der Ordnung (halb-) offene, geschlossene Intervalle (Teilmengen) definieren, und zwar:

$-\infty < r \leq a$: $(-\infty; a]$
$-\infty < r < a$: $(-\infty; a)$
$a \leq r \leq b$: $[a; b]$
$a < r \leq b$: $(a; b]$
$a \leq r < b$: $[a; b)$
$a < r < b$: $(a; b)$
$b \leq r < \infty$: $[b; \infty)$
$b < r < \infty$: $(b; \infty)$

mit reellen Zahlen a, b, a<b.

Terme sind Rezepte, sind mathematische Formeln, in die man gegebenenfalls Werte, Zahlen einsetzt. Mit Termen kann man daher auf dieselbe Weise rechnen wie mit Zahlen, d.h. es gelten für Zahlen a, b, c, d die Rechengesetze und Termumformungen (z.B. Punktrechnung vor Strichrechung, Klammerrechnung [Klammern auflösen, Ausklammern):

$a + 0 = a$, $a - a = 0$, $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$,
$1a = a$, $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
$+a = a$, $-1a = -a$, $+(+a) = a$, $+(-a) = -a$, $-(+a) = -a$, $-(-a) = a$
$+(a + b) = a + b$, $-(a + b) = -a - b$
$a\cdot a = a^2$, $a\cdot a\cdot a = a^3$, $a\cdot a\cdot a\cdot a = a^4$ …

Es gelten die binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (1. binomische Formel)}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (2. binomische Formel)}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ (3. binomische Formel)}$$

Es gelten die Bruchgesetze:

$$\frac{a}{1} = a,\quad \frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n},\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},\quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc},\quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$n\cdot\frac{a}{b} = \frac{na}{b},\quad 1\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b},\quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},\quad n\frac{a}{b} = n + \frac{a}{b}$$

Es gelten die Potenzgesetze:

$$a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^n \cdot a^m = a^{n+m},\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ \frac{1}{a^n} = a^{-n},\ (a^n)^m = a^{n \cdot m},\ (ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ 1^n = 1,\ (-1)^n = -1 \text{ (n ungerade)},\ (-1)^n = 1 \text{ (n gerade)}$$

Es gelten die Wurzelgesetze:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ \sqrt{a^2} = |a|,\ \sqrt{a}^2 = |a|$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{n^2 a_1} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1} \text{ (teilweises Wurzelziehen)},$$

auch für allgemeine Wurzeln:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Es gelten die Potenzgesetze zur Eulerschen Zahl e = 2,7182818…:

$$e^0 = 1,\ e^1 = e,\ e^n \cdot e^m = e^{n+m},\ \frac{e^n}{e^m} = e^{n-m},\ \frac{1}{e^n} = e^{-n},\ e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e},\ (e^n)^m = e^{n \cdot m},$$

sowie die Logarithmengesetze des natürlichen Logarithmus:

$$\ln 1 = 0,\ \ln e = 1,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b,\ \ln(a^r) = r \cdot \ln a,\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$$

$$e^{\ln z} = z,\ \ln e^z = z$$

Auf den reellen Zahlen lassen sich Funktionen definieren. Analysis ist die Mathematik der Funktionen. Funktionen sind Abbildungen f: D_f -> **R** von reellen Zahlen in reelle Zahlen, d.h.: sie ordnen vermöge einer Zuordnung x -> f(x) = y (Funktionsterm) jedem reellen x des (maximalen) Definitionsbereichs D_f genau ein reelles y des Wertebereichs W_f zu. Funktionen können vervielfacht, addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert, verknüpft werden, d.h. es gilt: r·f(x), f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)·g(x), f(x)/g(x), $f(x)^{g(x)}$ und g(f(x)) sind reguläre Funktionsterme. Wir unterscheiden:

y = mx + c	Gerade
y = ax^2 + bx + c	Parabel (2. Grades)
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$	Polynom, ganz rationale Funktion (n. Grades)
$f(x) = ae^{bx+c} + d$	Exponentialfunktion
$f(x) = ax + b + ce^{dx}$	Exponentialfunktion mit linearem Anteil
$f(x) = a\sin(kx) + b$ $f(x) = a\cos(kx) + b$	Trigonometrische Funktion

Für alle hier vorgestellten Funktionen gilt: D_f = **R**.

Aufgabenblatt: Reelle Funktionen

1. Bestimme die Funktionswerte der Funktionen f(x) an den Stellen x_0 bzw. u.

a) $f(x) = 2x + 3$, x_0 = -1, x_0 = 5, x_0 = 10

b) $f(x) = x^2 - 12x + 5$, u = -5, u = 3, u = 8

c) $f(x) = \frac{x^3}{3}(x-6)$, x_0 = 0, x_0 = 3, x_0 = 6

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + 5$, x_0 = -2, x_0 = 1, x_0 = 2

e) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}x)$, u = -1, u = 0, u = 4, u = 6

f) $f(x) = 2\cos(x) - 3$, u = -π, u = 0, u = π/2, u = π

g) $f(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x) + 1$, x_0 = -π/2, x_0 = 0, x_0 = 2π

h) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$, x_0 = -ln(2), x_0 = 0, x_0 = ln(4), x_0 = 3

i) $f(x) = x + 1 + e^x$, x_0 = 0, x_0 = ln(3), x_0 = 2

j) $f(x) = 4e^{-2x} + 3e^x - 5$, x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = ln(2)

k) $f(x) = 2e^{-x} + \frac{1}{2}\cos(\pi x)$, u = 0, u = 1, u = 3/2

2. Zeichne die folgenden Funktionen f(x):

a) $f(x) = x^2 + 5x - 6$

b) $f(x) = \frac{1}{8}x^2(x-4)$

c) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 5x^2 + 8$

d) $f(x) = 3\sin(2x) - 1$

e) $f(x) = x + \cos(\pi x)$

f) $f(x) = 2e^{-x} - 3$

g) $f(x) = -2x + 1 + \frac{1}{5}e^{-2x}$

h) $f(x) = 8 + e^{-x} + e^x$

<u>Lösungen</u>: 1. f(x_0) =, f(u) = / 1a) 1, 13, 25 / 1b) 90, -22, -27 / 1c) 0, -27, 0 / 1d) 21, 8,25, 21 / 1e) -√2/2, 0, 0, -1 / 1f) -5, -1, -3, -5 / 1g) -2, -2, -2 / 1h) 5/4, 1,5, 3, e^3/2+1 / 1i) 2, 4+ln3, 3+e^2 / 1j) 4e^2+3/e–5, 2, 2 / 1k) 2,5, 2/e–0,5, 2$e^{-3/2}$

Datenblatt: Maße und Umrechnungen

Länge:

Umrechnung	km	m	dm	cm	mm
km	·1	·1.000	·10.000	·100.000	·1.000.000
m	:1000	·1	·10	·100	·1.000
dm	:10000	:10	·1	·10	·100
cm	:100000	:100	:10	·1	·10
mm	:1000000	:1000	:100	:10	·1

Fläche:

Umrechnung	km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2
km^2	·1	·100	·10.000	·1.000.000	·100.000.000	·10.000.000.000
ha	:100	·1	·100	·10.000	·1.000.000	·100.000.000
a	:10000	:100	·1	·100	·10.000	·1.000.000
m^2	:1000000	:10000	:100	·1	·100	·10.000
dm^2	:100000000	:1000000	:10000	:100	·1	·100
cm^2	:10000000000	:100000000	:1000000	:10000	:100	·1

Volumen:

Umrechnung	km^3	m^3	dm^3 = l	cm^3 = ml
km^3	·1	·1.000.000.000	·1000.000.000.000	·1.000.000.000.000.000
m^3	:1000000000	·1	·1.000	·1.000.000
dm^3 = l	:1000000000000	:1000	·1	·1.000
cm^3 = ml	:1000000000000000	:1000000	:1000	·1

Gewicht:

Umrechnung	t	kg	g	mg
t	·1	·1.000	·1.000.000	·1.000.000.000
kg	:1000	·1	·1.000	·1.000.000
g	:1000000	:1000	·1	·1.000
mg	:1000000000	:1000000	:1000	·1

Zeit:

Umrechnung	Tag	h	min	sek
Tag	·1	·24	·1.440	·86.400
h	·0,0416667	·1	·60	·3.600
min	·0,000694444	·0,016667	·1	·60
sek	·0,0000115740	·0,00027777	·0,016667	·1

Datenblatt: Gleichungen

Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Gleichungen sind da definiert, wo beide Terme definiert sind (Definitionsbereich der Gleichung). Die Lösungsmenge einer Gleichung umfasst die Unbekannten, die die Gleichung lösen. Nach den in der Gleichung vorliegenden Termen werden Gleichungen linear, quadratisch, …, Potenz-, Exponentialgleichungen oder trigonometrische Gleichungen genannt (Typen von Gleichungen). Im Folgenden seien alle Unbekannten x und Koeffizienten reell.

Lineare Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$ax + b = 0$$

mit den Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für $a \neq 0$ dann:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Die lineare Gleichung ax + b = 0 entspricht damit grafisch der Nullstelle einer Geraden y = ax + b mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b.

Quadratische Gleichungen sind von der Form:

$ax^2 + bx + c = 0$			
$a \neq 0$, $b = 0$	$a \neq 0$, $c = 0$	$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$	$a = 1$, $b = p$, $c = q$
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (Mitternachtsformel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)
	Quadratische Gleichung hat die Form: $ax(x - x_1) = 0$ (bei 2 Lösungen $x = 0$, $x = x_1 = -\frac{b}{a}$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $a(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

mit den Zahlen a_0, … a_n, $n \varepsilon \mathbf{N}$, genügen. Die Lösung der Polynomgleichung ist meist nicht über eine Formel bestimmbar (es sei denn in den Fällen $n \leq 4$), sondern vielfach über numerische Verfahren (Newton-Verfahren). Es gilt aber: Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren $p_1(x)$, $p_2(x)$, … $p_m(x)$ zerlegen, so dass folgt:

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_m(x) = 0 \Leftrightarrow p_1(x) = 0 \vee p_2(x) = 0 \vee \ldots p_m(x) = 0$$

Durch Polynomdivision (Ausklammern) lassen sich damit Nullstellen bestimmen. Eine weitere Möglichkeit bieten Substitutionen, etwa um aus biquadratischen Gleichungen quadratische zu er halten.

Potenzgleichungen sind vom Typ

$$x^n = a$$

o.ä. und durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen (n beliebige reelle Zahl, x meist ≥0).

Es gelten bei Exponentialgleichungen mit auftretender Basis e = 2,71828… (Eulersche Zahl) und bei Gleichungen mit dem natürlichen Logarithmus, a, b>0, m, n, r beliebig die Potenzgesetze für die Exponentialfunktion $y = e^x$ der Basis e:

$$e^0 = 1,\ e^1 = e,\ e^n \cdot e^m = e^{n+m},\ \frac{e^n}{e^m} = e^{n-m},\ \frac{1}{e^n} = e^{-n},\ e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e},$$
$$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$$

sowie die Logarithmengesetze für den natürlichen Logarithmus y = ln*x*:

$$\ln 1 = 0,\ \ln e = 1,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b,\ \ln(a^r) = r \cdot \ln a,$$
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

Außerdem gilt für reelle z:

$$e^{\ln z} = z,\ \ln e^z = z$$

Exponentialgleichungen sind dann durch Logarithmieren, Logarithmengleichungen durch Exponieren zu lösen.

Trigonometrische Gleichungen sind von der Form: a·sin(kx)+b = y bzw. a·cos(kx)+b = y. Sie lassen sich u.a. zurückführen auf Gleichungen der Form:

Sinus:

$$\sin(kx) = 0 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\pi,\ kx = 0,\ kx = \pi,\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{\pi}{k},\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{k},\ \ldots$$

(Vielfache von π)

$$\sin(kx) = 1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\frac{3}{2}\pi,\ kx = \frac{\pi}{2},\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{3\pi}{2k},\ x = \frac{\pi}{2k},\ \ldots$$

(jedes zweite ungeradzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$)

$$\sin(kx) = -1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\frac{\pi}{2},\ kx = \frac{3\pi}{2},\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{\pi}{2k},\ x = \frac{3\pi}{2k},\ \ldots$$

(jedes zweite ungeradzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$)

Kosinus:

$$\cos(kx) = 0 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\frac{\pi}{2},\ kx = \frac{\pi}{2},\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{\pi}{2k},\ x = \frac{\pi}{2k},\ \ldots$$

(ungeradzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$)

$$\cos(kx) = 1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -2\pi,\ kx = 0,\ kx = 2\pi,\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{2\pi}{k},\ x = 0,\ x = \frac{2\pi}{k},\ \ldots$$

(geradzahlige Vielfache von π)

$$\cos(kx) = -1 \Leftrightarrow \ldots,\ kx = -\pi,\ kx = \pi,\ \ldots \Leftrightarrow \ldots,\ x = -\frac{\pi}{k},\ x = \frac{\pi}{k},\ \ldots$$

(ungeradzahlige Vielfache von π)

Für <u>besondere Werte</u> von r in (*) ergeben sich bei den trigonometrischen Gleichungen auch besondere Lösungen. Die besonderen Werte sind der folgenden <u>Tabelle</u> zu entnehmen:

Funktion \ x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin*x bzw.* r	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos*x bzw.* r	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Regeln:	*Beispiele:*	
<u>Lineare Gleichung</u>: $ax + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c-b}{a}$, a≠0	7x + 21 = 77 7x = 56 x = 8	| -21 | :7 Lösung: x=8
<u>Quadratische Gleichung</u> (normiert): $x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow$ $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$4x^2 + 36x - 88 = 0$ $x^2 + 9x - 22 = 0$ $x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 22} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81+88}{4}} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}}$ $x = -\frac{9}{2} \pm \frac{13}{2}$ x = -11 ∨ x = 2	| :4 (p=9, q=-22) Lösungen: x_1=-11, x_2=2
<u>Quadratische Gleichung</u> (allgemein): $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$2x^2 + 5x - 33 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-33)}}{2 \cdot 2}\ \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{-5 \pm 17}{4}$ x_1 = -5,5 ∨ x_2 = 3	(a=2, b=5, c=-33) Lösungen: x_1=-5,5, x_2=3
<u>Satz vom Nullprodukt</u> (Faktoren eines Produktes gleich 0 setzen)	$(2x-3)(x^2-4) = 0$ $2x-3 = 0 \vee x^2 - 4 = 0$ $2x = 3 \vee x^2 = 4$ x = 1,5 ∨ x = ±2	(Satz vom Nullprodukt) | +3 bzw. | +4 | :2 bzw. | √ Lösungen: x_1=-2, x_2=1,5, x_3=2

<u>Ausklammern</u> (Potenzen x, x^2, x^3, … ausklammern, Satz vom Nullprodukt anwenden)	$x^3+3x^2-4x = 0$ $x(x^2+3x-4) = 0$ $x = 0 \vee x^2+3x-4 = 0$ $x = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$ $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 1$	(Ausklammern) Lösungen: x=-4, x=0, x=1
<u>Biquadratische Gleichung</u> (Substitution: $z = x^2$)	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $z^2 - 13z + 36 = 0$ $z = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$ $z = 4 \vee z = 9$ $x^2 = 4 \vee x^2 = 9$ $x = \pm 2 \vee x = \pm 3$	(Substitution: $z=x^2$) (p-q-Formel) (Rücksubstitution) $\mid \sqrt{}$ Lösungen: $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=3$
<u>Gleichungen mit der Exponentialfunktion e^x</u> (Potenzgesetze, Auflösen nach e^x, Logarithmieren) *Potenzgesetze:* $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$, $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$ $(xy)^r = x^r \cdot y^r$, $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$ $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$	$e^{4x+3} = 78$ $4x + 3 = \ln 78$ $4x = \ln 78 - 3$ $x = \frac{\ln 78 - 3}{4}$ $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ $(e^x)^2 - e^x - 6 = 0$ $z^2 - z - 6 = 0$ $z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$ $z = -2 \vee z = 3$ $[e^x = -2] \vee e^x = 3$ $x = \ln 3$	(Logarithmieren) | -3 | :4 als Lösung (Potenzgesetze) (Substitution $z=e^x$) (p-q-Formel) (Rücksubstitution) (Logarithmieren) als Lösung
<u>Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen sin*x*, cos*x*, tan*x*</u> (Gesetzmäßigkeiten und Periodizität, Auflösen nach sin*x*, cos*x*, tan*x* usw., Umkehrfunktionen $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ usw.)	sin(x) = 0,5 x = π/6 + 2kπ, x = 5π/6 + 2kπ (k ganzzahlig) 10cos(3x) – 2 = 3 10cos(3x) = 5 cos(3x) = 0,5 3x = -π/3 + 2kπ, 3x = π/3 + 2kπ x = -π/9 + 2kπ/3, x = π/9 + 2kπ/3 (k ganzzahlig)	 | +2 | :10 | :3

Aufgabenblatt: Gleichungen

1. Löse die folgenden linearen Gleichungen:

a) $2x + 17 = 21$

b) $14 + 2x = 11 - 7x$

c) $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{3}{4}x - 6$

d) $61 - (5x + 2) + (x - 7) = 8x - 20$

e) $4x + 13 - 7x = 20 - 5x + 31$

f) $5(x+3) = 25 + 7(2-x)$

g) $4(x-1) - (2x+3) = 3(3x+1) - 38$

h) $15 - 2(x-8) = x + 7(17-2x)$

i) $\frac{1}{2}(x+3) = \frac{1}{4}(2-x) + \frac{1}{6}x$

2. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 = 729$

b) $16x^2 - 144 = 0$

c) $x^2 + 18x = 0$

d) $4x = 8x^2$

e) $x^2 + 8x - 33 = 0$

f) $x^2 - 33x + 272 = 0$

g) $x^2 - 3{,}6x + 1{,}28 = 0$

h) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

i) $\frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{20}x + \frac{2}{15} = 0$

j) $16x^2 + 120x + 221 = 0$

k) $5x^2 + 87x - 506 = 0$

l) $14 = 9x^2 - 15x$

m) $x(x-7) = \frac{1}{2}(7-x)$

n) $30x^2 - 41x = -13$

o) $0{,}3x^2 - 3x = -8$

3. Löse die folgenden Polynomgleichungen:

a) $x^3 - 16x = 0$

b) $16x^3 = 25x^2$

c) $4x^4 + x^3 - 3x^2 = 0$

d) $8x^5 - 64x^2 = 0$

e) $\frac{4}{3}x^4 - 8x^3 + 11x^2 = 0$

f) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + \frac{2}{15}x = 0$

g) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

h) $x^4 + 7x^2 = 8$

i) $-\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 6 = 0$

j) $(2x+3)(x^2-9) = 0$

k) $-\frac{1}{16}x^2(x-4)(3x+11) = 0$

l) $3(8-\frac{1}{2}x^2)(2x^3+16) = 0$

4. Löse die folgenden Exponentialgleichungen:

a) $5e^x = 10$

b) $2e^{-x} + 6 = 8$

c) $5e^{2x} + 7 = 2e^{2x} + 11$

d) $\frac{2}{3}e^{0,5x} = 5$

e) $\frac{2}{5}e^{2x+1} = 7$

f) $\frac{1}{3}e^{-0,5x+2} - \frac{1}{2} = 0$

g) $3e^{-x+1} - 5 = 4$

h) $8 - 2e^{-0,4x} = 6$

<u>Lösungen</u>: 1a) 2 / 1b) -1/3 / 1c) Hauptnenner = 12 -> 8x+60=9x-72 -> 132 / 1d) 6 / 1e) 19 / 1f) 2 / 1g) 4 / 1h) 11 / 1i) Hauptnenner = 12 -> 6(x+3) = 3(2-x)+2x -> -12/7
2a) -27; 27 / 2b) -3; 3 / 2c) -18; 0 / 2d) 0; 0,5 / 2e) -11; 3 / 2f) 16; 17 / 2g) 0,4; 3,2 / 2h) 0,5 / 2i) -2/3; -8/15 / 2j) -17/4; -13/4 / 2k) -22; 11,5 / 2l) -2/3; 7/3 2m) x^2-6,5x-3,5=0 -> -0,5; 7 / 2n) 0,5; 13/15 / 2o) keine Lösung
3a) -2, 0, 2 / 3b) 0, 25/16 / 3c) -1, 0, 3/4 / 3d) 0, 2 / 3e) 0, 2,134, 3,866 / 3f) 0, 8/15, 2/3 / 3g) -2, -√2, √2, 2 / 3h) -1, 1 / 3i) -√6, -√2, √2, √6 / 3j) -3, -1,5, 3 / 3k) -11/3, 0, 4 / 3l) -4, -2, 4
4a) ln2 / 4b) 0 / 4c) ln(4/3)/2 / 4d) 2ln(7,5) / 4e) (ln(17,5)-1)/2 / 4f) 4-2ln(1,5) / 4g) 1–ln3 / 4h) 0

Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme I

Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (2)$$

mit den reellen Variablen x_1, x_2, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{22} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x_1 und x_2 gilt Folgendes:

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen (1) und (2) werden nach derselben Variablen aufgelöst, die zwei Ausdrücke gleichgesetzt, die daraus entstandene Gleichung nach der anderen Variablen aufgelöst, die Lösung in eine der nach der ersten Variablen aufgelösten Gleichung einsetzen, um die zweite Variable zu errechnen.

Einsetzungsverfahren: Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen, Variable in die andere Gleichung einsetzen, Lösung dieser Gleichung ermitteln, Lösung in die Gleichung für die aufgelöste Variable einsetzen.

Additionsverfahren: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme II

Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$a_{11}x_1 + b_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (m)$$

mit den reellen Variablen x_1, … x_n, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{mn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, … b_m. Sind alle Zahlen b_1, … $b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen (n > m) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen (n < m) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & \ldots \\ a_{mn} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Im Falle einer beliebigen Anzahl von m Gleichungen und n Unbekannten gilt hinsichtlich des Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems die folgende Vorgehensweise:

Lösen von linearen Gleichungssystemen (Gauß-Algorithmus)

1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; einer Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*)). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die entsprechende Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Diagonalgestalt gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy+dz = e \Leftrightarrow cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f \neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung: **L** = { }.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die dazugehörige rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z, dessen Diagonalelement =0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ **L** = {(l(r)|m(r)|…|t(r))| rε**R**} mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme

1. Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} -2x - 7y &= 6 \\ +10x + z &= 0 \\ +4y - z &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} +2x - 2y - z &= 5 \\ +5x + 10y + 2z &= -4 \\ -7x + 3y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} +3a + b - 2c &= -50 \\ -6a + 2b - 3c &= 60 \\ -8a + 3b - c &= 306 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} +2a - b + c + 4d &= 3 \\ +3a + 2b - c + 3d &= 2 \\ +4a + 3b - 3c + 6d &= 1 \\ -5a + 7b + 5c - d &= 0 \end{aligned}$$

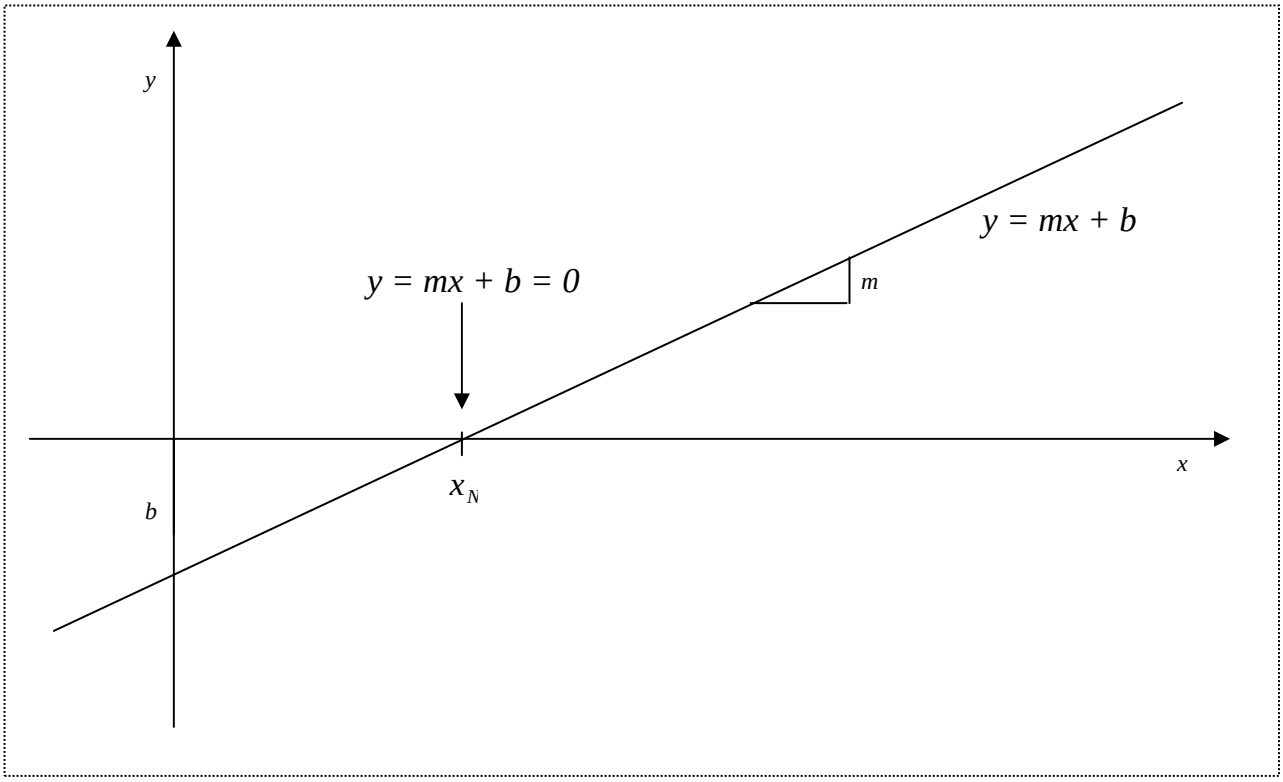
e)

$$\begin{aligned} +a - b + c + d &= 18 \\ +2a + b - 2c + d &= -50 \\ +4a + 3b + c - 2d &= 148 \\ +8a - 7b - 5c + 3d &= -6 \end{aligned}$$

<u>Lösungen</u>: 1. x, y, z = bzw. a, b. c, d = 1a) 0,5; -1; -5 / 1b) 2; -2; 3 / 1c) -8; 102; 64 / 1d) 1; 0; 1; 0 / 1e) 20; -8; 24; -34

Datenblatt: Geraden

Eine Gerade y = mx + b besitzt die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b, d.h.:



Es gilt: $S_y(0|b)$ ist y-Achsenabschnittspunkt der Gerade (Schnittpunkt mit der y-Achse), $N(x_N|0)$ Nullstelle der Geraden (Schnittpunkt mit der x-Achse) auf Grund von: $mx_N + b = 0$, d.h.:

$$x_N = \frac{-b}{m}$$

Die Steigung der Geraden errechnet sich mit zwei Geradenpunkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Zu einer Geraden g: y = mx + b gehört der Steigungswinkel α mit:

$$\tan\alpha = m \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$$

Schneiden sich die Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$, so gibt es einen Schnittpunkt. Der Schnittpunkt S ist durch Gleichsetzen der Geraden zu ermitteln:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow S(x_S|y_S)$$

Geraden werden bestimmt durch zwei Punkte, die auf der Geraden liegen, oder durch einen auf der Gerade liegenden Punkt und die Geradensteigung. Es gilt also mit den Punkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ die Zweipunkteform der Geradengleichung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{oder} \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1$$

mit Geradensteigung als Steigung zwischen den Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Mit dem Punkt $P(x_1|y_1)$ und der Geradensteigung m ergibt sich die Punktsteigungsform der Gerad-

engleichung:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m \text{ oder } y=m(x-x_1)+y_1=mx-mx_1+y_1$$

Die <u>Bestimmung einer Geradengleichung</u> y = mx + b erfolgt auch über:

a) m, b gegeben -> y = mx +b
b) m, $P(x_1|y_1)$ gegeben -> $b = y_1 - mx_1$ -> y = mx +b
c) $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ gegeben -> lineares Gleichungssystem: $y_1=mx_1+b$, $y_2=mx_2+b$ -> m, b -> y = mx +b

---

Eine zu einer Geraden g: $y = mx + c_1$ <u>parallele Gerade</u> h: $y = mx + c_2$ durch einen Punkt $P(x_1|y_1)$ lautet:

$$y=m(x-x_1)+y_1=mx-mx_1+y_1$$

Die zu g: $y = m_1x + c_1$ <u>senkrechte Gerade</u> h: $y = m_2x + c_2$ durch einen Punkt $P(x_1|y_1)$ ergibt sich vermöge $m_2=-1/m_1$ zu:

$$y=m_2(x-x_1)+y_1=-\frac{1}{m_1}x+\frac{x_1}{m_1}+y_1\,.$$

<u>Beispiele</u> (Geraden):

a) Die Gerade g mit Steigung 2 und y-Achsenabschnitt -8 heißt: g: y = 2x – 8.

b) Die Gerade g durch den Punkt $S_y(0|7)$ und mit der Steigung -12 heißt: g: y = -12x + 7.

c) Die Gerade g durch den Punkt P(4|1) und mit der Steigung -4 heißt: g: y = -4x + 17 wegen:

$$\frac{y-1}{x-4}=-4 \Leftrightarrow y-1=-4(x-4) \Leftrightarrow y=-4x+17\,.$$

d) Die Gerade g durch die Punkte P(1|2) und Q(3|4) heißt: g: y = x + 1 wegen:

$$\frac{y-2}{x-1}=\frac{4-2}{3-1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{x-1}=1 \Leftrightarrow y-2=x-1 \Leftrightarrow y=x+1\,.$$

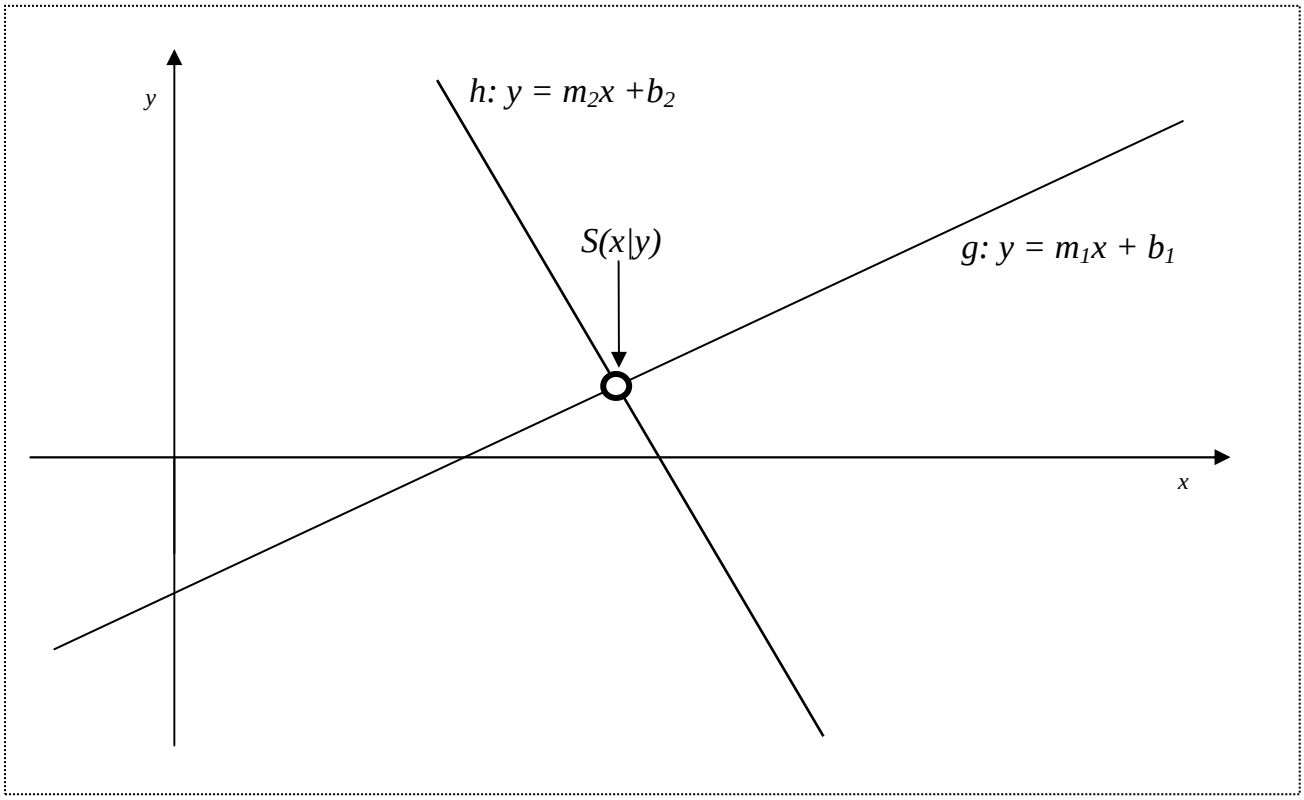
e) Die Gerade g: y = -2x + 5 hat als Achsenschnittpunkte: $S_y(0|5)$, N(2,5|0). Der Steigungswinkel der Geraden beträgt: $\alpha = \tan^{-1}(2) = 63{,}43°$.

f) Zu der Geraden g: y = 5x – 7 ist die Gerade h: y = 5x + 2 eine parallele Gerade durch den Punkt P(2|12), denn:

Ansatz: h: y = mx + b
Parallelität der Geraden g und h -> m = 5
-> y = 5x + b
P(2|12) liegt auf h -> 12 = 5·2 + b -> 12 = 10 + b -> 2 = b
-> y = 5x + 2

g) Gegeben ist die Gerade g: y = 0,25x + 3, gesucht ist eine zu g senkrechte Gerade h, die durch den Punkt P(-4|6) läuft. Die Gerade h hat die Steigung $m_h = -1/m_g = -4$, so dass sich mit dem Ansatz h: $y = m_hx + b$ zunächst y = 4x + b ergibt. Das Einsetzen von P(-4|6) in die Geradengleichung führt zu: 6 = -4·4 + b -> 6 = -16 + b -> 22 = b, also zu: y = 4x + 22.

Beispiele (Schnittpunkt von Geraden):



a) Für die Geraden g: y = 2x – 5 und h: y = -3x + 7 ergibt das Gleichsetzen:

2x – 5 = -3x + 7	| +3x
5x – 5 = 7	| +5
5x = 12	| :5
x = 2,4	

Einsetzen von x = 2,4 in die Gerade g führt auf: y = 2·2,4 – 5 = -0,2. Der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h lautet also: S(2,4|-0,2).

b) Für die Geraden g: y = 3x +2 und h: y = 4 + 3x ergibt das Gleichsetzen:

3x + 2 = 4 + 3x	| -3x
2 = 4	

und damit einen Widerspruch. Die Geraden schneiden sich also nicht und sind parallel.

Aufgabenblatt: Geraden

1. Zeichne die folgenden Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

a) $y = 3x + 1$ b) $y = -2x + 5$ c) $y = 0{,}5x - 4$

d) $y = \frac{3}{4}x$ e) $y = -\frac{2}{5}x + 4$ f) $y = 7 - x$

2. Zeichne die folgenden Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Berechne die Schnittpunkte der jeweiligen Geraden mit den Achsen des Koordinatensystems.

a) $y = 4x - 3$ b) $y = \frac{3}{4}x + 1$ c) $y = -\frac{2}{5}x$

d) $y = -3x + 10$ e) $y = x + 2$ f) $y = 12 - 3x$

3. Bestimme die Geradengleichungen.

a) P(4|3), m = 2 b) P(-1|3), m = -0,5 c) P(-2|-4), $m = \frac{1}{4}$

d) P(2|-2), Q(6|8) e) P(-4|0), Q(2|1) f) P(2|5), Q(5|2)

4. Bestimme die parallelen Geraden durch den Punkt P.

a) $y = 3x + 2$, P(1|7) b) $y = -2x + 5$, P(-1|0) c) $y = -\frac{1}{3}x + 2$, P(4|5)

d) $y = 5 - x$, P(-2|3) e) $y = \frac{1}{5}x$, P(0|-4) f) $y = -\frac{5}{6}x + 3$, P(10|-1)

5. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g und h.

a) g: $y = 4x$, h: $y = 3x + 1$ b) g: $y = 10 - 2x$, h: $y = 4$

c) g: $y = x - 7$, h: $y = \frac{1}{10}x$ d) g: $y = 2x + 1$, h: $y = -2x + 7$

e) g: $y = \frac{1}{2}x + 2$, h: $y = \frac{1}{2}x + 1$ f) g: $y = \frac{1}{4}x + 5$, h: $y = -2x - 7$

g) g: $y = 3x - 5$, h: $y = -4x - 12$ h) g: $y = 5x + 4$, h: $y = 0{,}5x - 5$

Lösungen: 1) y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|b)$, Steigungsdreieck m an S_y -> Gerade y=mx+b
2a) $S_y(0|-3)$, N(0,75|0) / 2b) $S_y(0|1)$, N(-4/3|0) / 2c) $S_y(0||0)$ = N(0|0) / 2d) $S_y(0|10)$, N(10/3|0) /
2e) $S_y(0|2)$, N(-2|0) / 2f) $S_y(0|12)$, N(4|0)
3a) y=2x-5 / 3b) y=-0,5x+2,5 / 3c) y=0,25x-3,5 / 3d) y=2,5x-7 / 3e) y=x/3+2/3 / 3f) y=-x+7
4a) y=3x+4 / 4b) y=-2x-2 / 4c) y=-x/3+19/3 / 4d) y=-x+1 / 4e) y=0,2x+4 / 4f) y=-5x/6+22/3
5a) S(1|4) / 5b) S(3|4) / 5c) S(70/9|7/9) / 5d) S(1,5|4) / 5e) g || h / 5f) S(-16/3|11/3) / 5g) S(-1|-8) / 5h) S(-2|-6)

Datenblatt: Parabeln

Normalparabeln (mit dem Koeffizienten 1 vor dem x^2) sind von der Form:

$$y = x^2 + px + q \text{ (Normalform)}$$
$$y = (x-d)^2 + c \text{ (Scheitelform)}$$

mit den Zahlen p, q und dem Scheitelpunkt S(d|c).

Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}),$$

so dass gilt: $d = -\frac{p}{2}$ und $c = q - \frac{p^2}{4}$ und damit:

$$y = x^2 + px + q \Rightarrow S(-\frac{p}{2} \mid q - \frac{p^2}{4})$$

Umgekehrt kann aus jeder Scheitelform die Normalform der Parabel gebildet werden mittels der binomischen Formeln:

$$y = (x-d)^2 + c = x^2 - 2dx + d^2 + c = x^2 + px + q$$

mit: $p = -2d$, $q = d^2 + c$.

Nullstellen, d.h. Schnittpunkte der Normalparabel mit der x-Achse, sind Lösungen der Gleichung y = 0, also:

$$y = 0$$
$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$\Rightarrow N_1(x_1|0),\ N_2(x_2|0)$$

gemäß der p-q-Formel. Je nach Diskriminante ($D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, unter der Wurzel der p-q-Formel) gibt es keine (D<0), eine (D=0), zwei Nullstellen (D>0). Existieren die beiden Nullstellen der Normalparabel, so ergibt sich der Scheitelpunkt S(d|c) aus:

$$x_1, x_2 \text{ Nullstellen} \Rightarrow d = \frac{x_1 + x_2}{2},\ c = d^2 + pd + q,$$

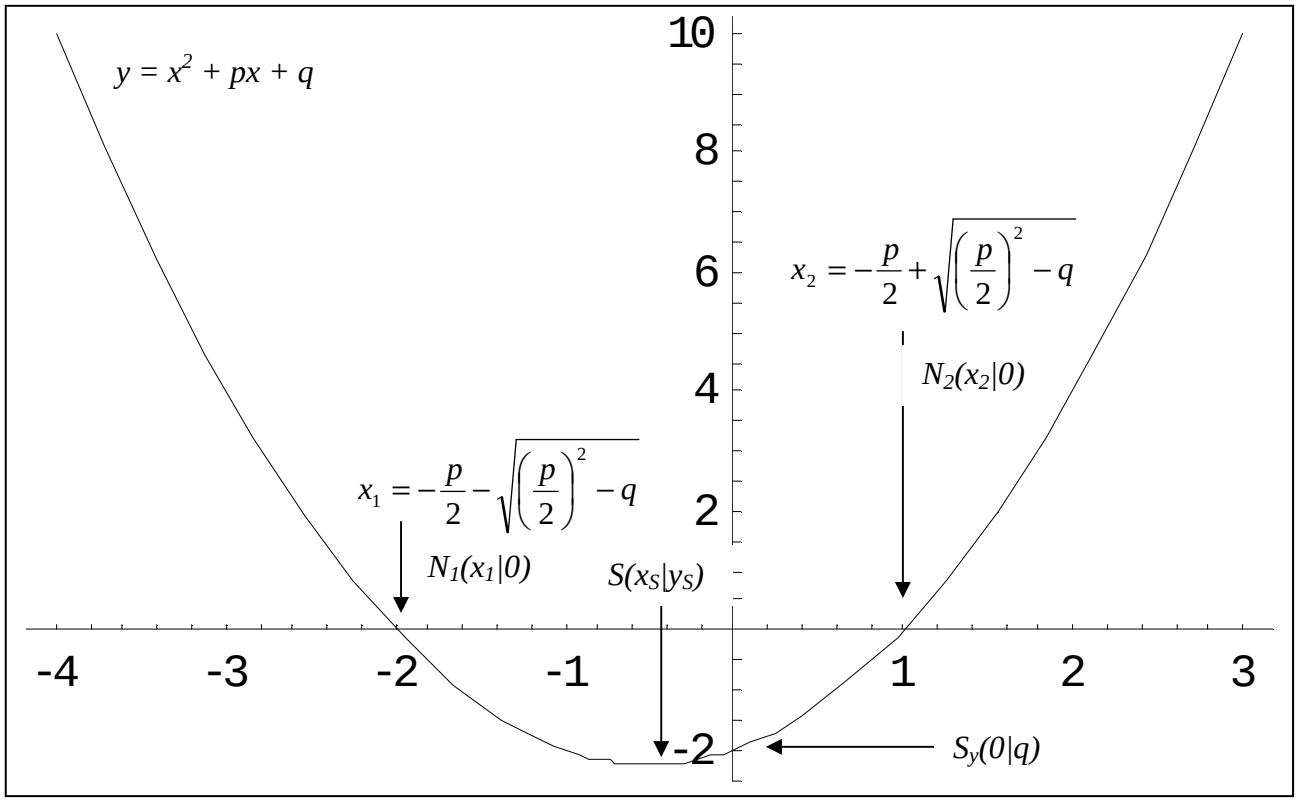
d.h.: der Scheitelpunkt liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen auf der Parabel.

Der y-Achsenabschnitt bzw. der y-Achsenabschnittspunkt, d.h. der Schnittpunkt der Normalparabel mit der y-Achse, folgt aus x = 0, also:

$$x = 0 \Rightarrow y = q \Rightarrow S_y(0|q)$$

Normalparabeln $y = (x-d)^2 + c$ ergeben sich aus der Grundparabel $y = x^2$ durch Verschiebung des Scheitelpunktes im Ursprung O(0|0) um d nach rechts (d>0) bzw. links (d<0) und nach oben (c>0) bzw. nach unten (c<0) zum Scheitelpunkt S(d|c).

Scheitelpunkt, Nullstellen, y-Achsenabschnitt einer Normalparabel sind dann:



Allgemeine Parabeln sind Funktionen von der Form:

$y = ax^2 + bx + c$ (Normalform) $y = a(x-x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform)

mit den Zahlen a, b, c, $a \neq 0$, und dem Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$. Die Parabel ist nach oben geöffnet, wenn $a>0$, nach unten geöffnet, wenn $a<0$; für $a=-1$ ergibt sich eine nach unten geöffnete Normalparabel. Ist $-1<a<1$, so ist die Parabel gestaucht, ist $a<-1$ oder $a>1$, so ist die Parabel gestreckt im Vergleich zur Normalparabel.
Normalform und Scheitelform können ineinander überführt werden vermöge der quadratischen Ergänzung:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Also gilt:

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow S(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac-b^2}{4a})$

Nullstellen errechnen sich aus:

$y = 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\Rightarrow N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$

Je nach Diskriminante (D = $b^2 - 4ac$, unter der Wurzel der a-b-c-Formel) gibt es keine (D<0), eine (D=0), zwei Nullstellen (D>0). Existieren die beiden Nullstellen der Parabel, so ergibt sich der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ aus:

$$x_1, x_2 \text{ Nullstellen} \Rightarrow x_S = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_S = ax_S^2 + bx_S + c$$

Der y-Achsenabschnitt, d.h. der Schnittpunkt der Normalparabel mit der <u>y-Achse</u>, folgt aus <u>x = 0</u>, also:

$$x = 0 \Rightarrow y = c \Rightarrow S_y(0|c)$$

<u>Schnittpunkte zwischen zwei Parabeln</u> p_1: $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$, p_2: $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ergeben sich aus der Gleichsetzung der Parabelterme:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$
$$(a_1-a_2)x^2 + (b_1-b_2)x + c_1-c_2 = 0$$

$a_1=a_2$:

$$x_P = \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2},\ y_P = a_1x_P^2 + b_1x_P + c_1 = a_2x_P^2 + b_2x_P + c_2$$

$a_1 \neq a_2$:

$$x_{P1,2} = \frac{-(b_1 - b_2) \pm \sqrt{(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)}}{2(a_1 - a_2)},$$
$$y_P = a_1x_P^2 + b_1x_P + c_1 = a_2x_P^2 + b_2x_P + c_2$$

mit $P(x_P|y_P)$ als Schnittpunkt(e). Im Fall $a_1=a_2$ gibt es keinen oder einen Schnittpunkt oder es ergibt sich die Identität der beiden Parabeln; im Fall $a_1 \neq a_2$ gibt es keinen, einen oder zwei Schnittpunkte.

<u>Schnittpunkte zwischen einer Parabel und einer Geraden</u> p: $y = ax^2 + bx + c$ und g: $y = mx + n$ folgen aus der Gleichsetzung für Funktionsterme:

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$
$$ax^2 + (b-m)x + c-n = 0$$
$$x_{P1,2} = \frac{-(b - m) \pm \sqrt{(b - m)^2 - 4a(c - n)}}{2a},$$
$$y_P = mx_P + n = ax_P^2 + bx_P + c$$

mit $P(x_P|y_P)$ als Schnittpunkt(e). Es gibt keinen, einen oder zwei Schnittpunkte.

<u>Beispiele</u> (Parabeln):

a) Die Parabel $y = 2x^2 + 81$ kann geschrieben werden als $y = 2(x+0)^2 + 81$ und besitzt daher den Scheitelpunkt S(0|81).

b) Die Parabel $y = x^2 - 6x = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 = (x-3)^2 - 9$ hat den Scheitelpunkt S(3|-9).

c) Es ergibt die quadratische Ergänzung bei der nachstehenden Parabel

$$y = x^2 - x + 2 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{3}{4}$$

den Scheitelpunkt $S(\frac{1}{2}|1\frac{3}{4})$.

d) Die Parabel $y = x^2 - 5x - 6$ hat den Scheitelpunkt S(2,5|-12,25), die Nullstellen N(-1|0), N(6|0), den y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|-6)$.

e) Die Normalparabel mit Scheitelpunkt S(-4|3) lautet: $y = (x+4)^2 + 6 = x^2 + 8x + 19$.

f) Die Normalparabel $y = x^2 + px + q$ soll durch die Punkte P(-2|-15) und Q(3|-1) gehen. Zur Bestimmung der Parabel wird das folgende lineare Gleichungssystem aufgestellt:

P(-2|-15) => $-15 = (-2)^2 + p\cdot(-2) + q$ => $-2p + q = -19$
Q(3|-1) => $-1 = 3^2 + p\cdot 3 + q$ => $3p + q = -10$

Das Auflösen des linearen Gleichungssystems führt auf: p = 1,8; q = -15,4. Die Parabelgleichung lautet damit: $y = x^2 + 1{,}8x - 15{,}4$.

g) Die Gerade g: $y = 2x - 5$ und die nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt S(3|-2) schneiden sich in den Schnittpunkten $S_1(2|-1)$ und $S_2(6|7)$, denn Gleichsetzen von Parabel- und Geradengleichung ergibt mit der Parabelgleichung $y = (x-3)^2 - 2 = x^2-6x+9-2 = x^2-6x+7$:

$x^2 - 6x + 7 = 2x - 5$	| -2x
$x^2 - 8x + 7 = -5$	| +5
$x^2 - 8x + 12 = 0$	(p-q-Formel)
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 12} = 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2$	(Ausrechnen)
$x_1 = 2$, $x_2 = 6$	(Lösungen)

Einsetzen der x-Werte in die Geradengleichung ergibt: $y_1 = -1$, $y_2 = 7$ und damit die eben genannten Schnittpunkte. Der Abstand der Schnittpunkte voneinander ist dann:

$$\overline{S_1S_2} = \sqrt{(6-2)^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94$$

(Satz des Pythagoras: $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$ ->

$$\boxed{\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

als Abstand der Punkte P und Q).

h) Die Parabel $y = \frac{1}{6}x^2 - 6$ hat als Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-6)$, $N_1(-6|0)$, $N_2(6|0)$. Die drei Punkte bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit Fläche A = gh/2 = 12·6/2 = 36 FE (Grundseite g=12, Höhe h=6) und mit Umfang u = g + 2a = 28,97 (Schenkel a = $\overline{S_yN_2} = 8{,}49$).

Datenblatt: Mittlere, momentane Änderungsrate, Ableitung

Für zwei verschiedene Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ auf der Zahlenebene ergibt sich die Steigung m als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (Differenzenquotient)}$$

Der Steigung entspricht ein Steigungswinkel $\varphi = \tan^{-1}(m)$.

Liegen die Punkte P und Q auf einer Funktion f: D_f -> **R**, gilt also: $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$, so wird der Differenzenquotient zur mittleren (durchschnittlichen) Änderungsrate der Funktion auf dem Intervall $[x_1; x_2] \subset D_f$:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ (mittlere Änderungsrate)}$$

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f(x) auf einem vorgegebenen Intervall $[a; b] \subset D_f$ ist:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ (mittlere Änderungsrate)}$$

Haben für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ die Punkte P und Q die Form $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(x_0+h|f(x_0+h))$, so wird die mittlere Änderungsrate

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

beim Grenzübergang h -> 0 im Falle der Existenz des Grenzwerts zur momentanen Änderungsrate oder Ableitung der Funktion f im Punkt x_0:

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h->0]{} m_t = f'(x_0) \text{ (momentane Änderungsrate)}$$

mit m_t als Steigung der Tangente t im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an die Funktion f(x):

$$t: \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ (Tangente)}$$

Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung oder Tangentensteigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Höhere Ableitungen sind: f''(x) = (f'(x))', f'''(x) = (f''(x))' usw. Die Ermittlung der Ableitungsfunktionen f'(x) usw. erfolgt über die Ableitungsregeln (für Funktionen u(x), v(x) und reelle Zahlen k, r):

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x) \text{ (Summenregel)}$$

$$(u(x) + r)' = u'(x) \text{ (additive Konstante)}$$

$$(ku(x))' = ku'(x) \text{ (multiplikative Konstante, konstanter Faktor)}$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \text{ (Kettenregel: äußere Ableitung × innere Ableitung)}$$

Für <u>spezielle Funktionen</u> (mit reellen a, b, n, r) stellen sich die Ableitungsregeln wie folgt dar:

$$(r)' = 0\,,\ (x^n)' = nx^{n-1},\ ((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}$$ (Potenzregel)

$$(\sin x)' = \cos x\,,\ (\cos x)' = -\sin x\,,$$

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)\,,\ (\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$$

(trigonometrische Funktionen)

$$(e^x)' = e^x\,,\ (e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$$ (natürliche Exponentialfunktionen)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$ (natürliche Logarithmusfunktion)

<u>Beispiele</u> (Ableitungen):

a) $f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 13$ => $f'(x) = 6x^2 - \frac{8}{3}x$ (Faktor-, Summen-, Potenzregel)

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^3(x + \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{10}x^5$ => $f'(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^4$ (Faktor-, Summen-, Potenzregel)

c) $f(x) = \frac{x^3}{7} + \frac{2}{5}x^2 + 4x$ => $f'(x) = \frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{5}x + 4$ (Faktor-, Summen-, Potenzregel)

d) $f(x) = x^2 - 5\sin x$ => $f'(x) = 2x - 5\cos x$ (Summen-, Potenzregel, trigonometrische Ableitung)

e) $f(x) = \frac{\cos x}{4} + \frac{\sin x}{3}$ => $f'(x) = -\frac{\sin x}{4} + \frac{\cos x}{3}$ (Summenregel, trigonometrische Ableitung)

f) $f(x) = \frac{5}{4}\cos(2x) - 1$ => $f'(x) = -\frac{5}{2}\sin(2x)$ (Summenregel, trigonometrische Ableitung)

g) $f(x) = 2x + 1 - 3\sin(\pi x)$ => $f'(x) = 2 - 3\pi\cos(\pi x)$ (Summenregel, trigonometrische Ableitung)

h) $f(x) = 2x + 3 - 10e^x$ => $f'(x) = 2 - 10e^x$ (Summenregel, exponentielle Ableitung)

i) $f(x) = 12 + 3e^x - 2e^{-x}$ => $f'(x) = 3e^x + 2e^{-x}$ (Summenregel, exponentielle Ableitung)

j) $f(x) = \frac{4}{3}e^{-2x+5}$ => $f'(x) = -\frac{8}{3}e^{-2x+5}$ (Faktorregel, exponentielle Ableitung, Kettenregel)

k) $f(x) = -x + 5 + \frac{1}{2}e^{-0,5x}$ => $f'(x) = -1 - \frac{1}{4}e^{-0,5x}$ (Summenregel, exponentielle Ableitung)

Aufgabenblatt: Ableitungen

1. Bilde die ersten beiden Ableitungen f‘(x), f‘‘(x) der nachstehenden Funktionen f(x):

a) $f(x) = 4x - 7$

b) $f(x) = 3x^2 - 7x + 11$

c) $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2$

d) $f(x) = \frac{x^2}{4}(2x + 3)$

e) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 + 2x^2 - 8$

f) $f(x) = \frac{10}{3}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$

g) $f(x) = 5 + 2\cos(4x)$

h) $f(x) = \frac{6}{5}\sin(\frac{\pi}{2}x) + 1$

i) $f(x) = 5x - 8 + 2\sin x$

j) $f(x) = -\frac{5}{4}e^x + 3$

k) $f(x) = \frac{2}{3}e^x + 6x - \frac{10}{7}$

l) $f(x) = 4e^{-2x} + \frac{11}{5}$

m) $f(x) = \frac{8}{5}e^{-0,5x+3}$

n) $f(x) = 4 + \frac{1}{2}e^{-1,5x} + \frac{1}{4}e^{2x}$

o) $f(x) = 4x + 1 - \frac{1}{10}e^{-3x}$

p) $f(x) = -2x - 4 + e^{2x}$

q) $f(x) = x^2 + 5x + e^{-2x}$

r) $f(x) = 4\sin x - 5e^{-x}$

s) $f(x) = \frac{e}{12}(x^3 - 5x + 2)$

t) $f(x) = \pi(x^2 + 4x - 5) + \cos(\pi x) + \frac{e^2}{2}$

2. Wie groß ist die Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0 bzw. u?

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = x(x^2 + 3x - 5)$, u = -3

c) $f(x) = 6 + e^{-2x} + 3e^x$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = x + 2\sin(2x)$, $x_0 = \pi$

3. An welchen Punkten stimmt die Ableitung der Funktion f(x) mit der Steigung m überein?

a) $f(x)=\frac{8}{3}x^3-6x$, m = 2

b) $f(x)=2x-e^{-4x}$, m = 6

c) $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x$, m = 0,5, xϵ[0;2π]

4. An welchen Punkten hat die Funktion f(x) waagerechte Tangenten?

a) $f(x)=x^2+3x-4$

b) $f(x)=\frac{1}{8}x^3(x-4)$

c) $f(x)=x+\cos x$, xϵ[-π;3π]

d) $f(x)=4x+3-2e^{0,5x}$

5. An welchen Punkten hat die Funktion f(x) Tangenten, die parallel zur vorgegebenen Geraden sind?

a) $f(x)=3x^2-\frac{17}{4}x+2$, $y=-\frac{x}{4}$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3{,}5x$, $y=\frac{1}{2}x-3$

c) $f(x)=x+3e^x$, $y=10x$

6. An welchen Punkten hat die Funktion f(x) Tangenten, die senkrecht auf den vorgegebenen Geraden stehen?

a) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8$, $y=0{,}8x+5$

b) $f(x)=\frac{3}{2}x^2(x^2-8)$, $y=\frac{1}{32}x-\frac{5}{8}$

c) $f(x)=\cos(\pi x)+4$, $y=\frac{1}{\pi}x+\frac{\pi^2}{4}$, xϵ[0;1]

<u>Lösungen</u>: 1a) 4, 0 / 1b) 6x-7, 6 / 1c) $-9x^2/4+2x$, -9x/2+2 / 1d) $3x^2/2+3x/2$, 3x+3/2 / 1e) $0{,}8x^3+4x$, $2{,}4x^2+4$ / 1f) $-\frac{10}{3}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$, $-\frac{10}{3}\cos x-\frac{3}{2}\sin x$ / 1g) -8sin(4x), -32cos(4x) / 1h) $\frac{3\pi}{5}\cos(\frac{\pi}{2}x)$, $-\frac{3\pi^2}{10}\sin(\frac{\pi}{2}x)$ / 1i) 5+2cos*x*, -2sin*x* / 1j) $-5e^x/4$, $-5e^x/4$ / 1k) $2e^x/3+6$, $2e^x/3$ / 1l) $-8e^{-2x}$, $16e^{-2x}$ / 1m) $-4e^{-0,5x+3}/5$, $2\,e^{-0,5x+3}/5$ / 1n) $-0{,}75e^{-1,5x}+0{,}5e^{2x}$, $0{,}375e^{-0,5x}+0{,}5e^{2x}$ / 1o) $4+0{,}3e^{-3x}$, $-0{,}9e^{-3x}$ / 1p) $-2+2e^{2x}$, $4e^{2x}$ / 1q) $2x+5-2e^{-2x}$, $2+4e^{-2x}$ / 1r) $4\cos x+5e^{-x}$, $-4\sin x-5e^{-x}$ / 1s) $e(3x^2-5)/12$, ex/2 / 1t) π(2x+4)–πsin(πx), $2\pi-\pi^2\cos(\pi x)$
2. f'(x_0) =, f(u) = / 2a) 2 / 2b) 4 / 2c) 1 / 2d) 5
3. f'(x) = m / 3a) $P_1(-1|10/3)$, $P_2(1|-10/3)$ / 3b) P(0|-1) / 3c) $P_1(\pi/2|\pi/4-1)$, $P_2(3\pi/2|3\pi/4+1)$
4. f'(x) = 0 / 4a) P(-1,5|-6,25) / 4b) $P_1(|0|0)$, $P_2(3|-27/8)$ / 4c) $P_1(\pi/2|\pi/2)$, $P_2(5\pi/2|5\pi/2)$ / 4d) P(2ln*4*|-5+8ln*4*)
5. f'(x) = y' / 5a) P(1,5|2,375) / 5b) $P_1(1|11/6)$, $P_2(3|1{,}5)$ / 5c) P(ln*3*|9+ln*3*)
6. f'(x) = -1/y' / 6a) - / 6b) P(2|-24) / 6c) P(0,5|4)

Datenblatt: Tangenten, Normalen

Tangenten sind Geraden $t(x) = y = m_t x + c_t$ an eine Funktion f(x) in einem Punkt $B(x_0|f(x_0)) = B(u|f(u))$, dem sog. Berührpunkt. Im Berührpunkt stimmen Funktion und Tangente in Funktionswert und Steigung überein, d.h. es gilt:

$$f(x_0) = y(x_0) = t(x_0)$$
$$f'(x_0) = m_t$$

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**	**Möglichkeit 3**
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle u	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Funktionswert f(u), Steigung f'(u)	Ansatz: y = mx + c als Tangentenformel
Einsetzen in Tangentenformel	Einsetzen in Tangentenformel	Steigung $m = f'(x_0)$
Tangente: t: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	Tangente: t: $y = f'(u)(x - u) + f(u)$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Tangente

Normalen sind Geraden $n(x) = y = m_n x + c_n$ senkrecht zu einer Funktion f(x) in einem Punkt $B(x_0|f(x_0)) = B(u|f(u))$, d.h. es gilt mit der Tangentensteigung m_t

$$f(x_0) = y(x_0) = n(x_0)$$
$$m_t \cdot m_n = -1,\ m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**	**Möglichkeit 3**
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle u	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Funktionswert f(u), Steigung f'(u)	Ansatz: y = mx + c als Normalenformel
Einsetzen in Normalenformel	Einsetzen in Normalenformel	Steigung $m = -\frac{1}{f'(x_0)}$
Normale: n: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$	Normale: n: $y = -\frac{1}{f'(u)}(x - u) + f(u)$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Normale

Ein Berührpunkt $B(x_0|y_0)$ zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) hat die Eigenschaften:

$$f(x_0) = g(x_0) = y_o$$
$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

Zur Bestimmung von Berührpunkten ist zunächst die einfache der beiden Gleichungen nach x_0 aufzulösen und x_0 in die andere Gleichung zur Überprüfung der Gleichheit einzusetzen.

Schnittpunkte $S(x_0|y_0)$, in denen sich Funktionen f(x) und g(x) senkrecht schneiden, genügen den Eigenschaften:

$$f(x_0) = g(x_0) = y_0$$
$$g'(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Zur Bestimmung dieser Schnittpunkte ist zunächst die einfache der beiden Gleichungen nach x_0 aufzulösen und x_0 in die andere Gleichung zur Überprüfung der Gleichheit einzusetzen.

Tangenten sind Geraden t: $y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$ bzw. t: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$ an eine Funktion f(x) in einem Punkt $B(x_B|f(x_B)) = B(u|f(u))$, dem sog. Berührpunkt. Im Folgenden sollen Tangenten durch einen vorgegebenen Punkt $P(x_1|y_1)$ an eine Funktion f(x) gelegt werden:

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**	**Möglichkeit 3**
Funktion f(x), Berührstelle x_B	Funktion f(x), Berührstelle u	Funktion f(x), Berührstelle u
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Tangentengleichung mit Punkt $P(x_1\|y_1)$ auf der Tangente: $y_1 = f'(x_B)(x_1 - x_B) + f(x_B)$ (*)	Tangentengleichung mit Punkt $P(x_1\|y_1)$ auf der Tangente: $y_1 = f'(u)(x_1 - u) + f(u)$ (*)	Steigung zwischen Berührpunkt und Punkt $P(x_1\|y_1)$ als Tangentensteigung im Berührpunkt: $\frac{y_1 - f(u)}{x_1 - u} = f'(u)$ (*)
Auflösen der Gleichung (*) nach x_B -> Lösung(en) x_B -> Berührpunkt(e) $B(x_B\|f(x_B))$	Auflösen der Gleichung (*) nach u -> Lösung(en) u -> Berührpunkt(e) B(u|f(u))	Auflösen der Gleichung (*) nach u -> Lösung(en) u -> Berührpunkt(e) B(u|f(u))
Einsetzen der Lösung(en) x_B in Tangentenformel -> Tangente(n) t: $y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$	Einsetzen der Lösung(en) u in Tangentenformel -> Tangente(n) t: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$	Einsetzen der Lösung(en) u in Tangentenformel -> Tangente(n) t: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$

Tangente an eine Funktion durch einen Punkt

Normalen sind Geraden n: $y = -\frac{1}{f'(x_N)}(x - x_N) + f(x_N)$ bzw. n: $y = -\frac{1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$ senkrecht zu einer Funktion f(x) in einem Punkt $B(x_N|f(x_N)) = B(u|f(u))$. Im Folgenden sollen Normalen durch einen vorgegebenen Punkt $P(x_1|y_1)$ senkrecht zu einer Funktion f(x) gelegt werden:

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**	**Möglichkeit 3**
Funktion f(x), Schnittstelle x_N	Funktion f(x), Schnittstelle u	Funktion f(x), Schnittstelle u
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Normalengleichung mit Punkt $P(x_1\|y_1)$ auf der Normale: $y_1 = -\frac{1}{f'(x_N)}(x_1 - x_N) + f(x_N)$ (*)	Normalengleichung mit Punkt $P(x_1\|y_1)$ auf der Normale: $y_1 = -\frac{1}{f'(u)}(x_1 - u) + f(u)$ (*)	Steigung zwischen Schnittpunkt und Punkt $P(x_1\|y_1)$ als Steigung der Normale im Schnittpunkt $\frac{y_1 - f(u)}{x_1 - u} = -\frac{1}{f'(u)}$ (*)
Auflösen der Gleichung (*) nach x_N -> Lösung(en) x_N -> Schnittpunkt(e) $B(x_N\|f(x_N))$	Auflösen der Gleichung (*) nach u -> Lösung(en) u -> Schnittpunkt(e) B(u|f(u))	Auflösen der Gleichung (*) nach u -> Lösung(en) u -> Schnittpunkt(e) B(u|f(u))
Einsetzen der Lösung(en) x_N in Normalenformel -> Normale(n) t: $y = f'(x_N)(x - x_N) + f(x_N)$	Einsetzen der Lösung(en) u in Normalenformel -> Normale(n) t: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$	Einsetzen der Lösung(en) u in Normalenformel -> Normale(n) t: $y = f'(u)(x-u) + f(u)$

Normale einer Funktion durch einen Punkt

Nicht konstante Geraden (auch Tangenten, Normalen), die keine Ursprungsgeraden sind, bilden zusammen mit der x- und y-Achse Dreiecke mit dem Koordinatenursprung O(0|0), dem y-

Achsenabschnittspunkt $S_y(0|y(0))$ und der Nullstelle $N(x_N|0)$ als Ecken. Dann gilt die Flächenformel: $A_\Delta = gh/2$ mit $g = |x_N|$ und $h = |y(0)|$.

Darüber hinaus gibt es (Tangenten-Normalen-) Dreiecke, die von der Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ sowie der x- bzw. y-Achse gebildet werden. Ecken der Dreiecke sind hier die Nullstellen von Tangente und Normale $N_t(x_t|0)$ und $N_n(x_n|0)$ sowie P bzw. die y-Achsenabschnittspunkte von Tangente und Normale $S_t(0|y_t(0))$ und $S_n(0|y_n(0))$ sowie P, so dass wieder die Flächenformel: $A_\Delta = gh/2$ mit entsprechenden g und h greift.

Beispiel (Tangenten-Normalen-Dreieck):

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2$. a) Für die Stelle $x_0=2$ sollen Tangente und Normale an f(x) im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ bestimmt werden. b) Wie groß sind Umfang und Flächen der Dreiecke zwischen Tangente, Normale und x-/y-Koordinatenachse?

Lösung: I. Es gilt zunächst: Tangentengleichung: t: $y_t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f(2)(x-2) + f(2)$, Normalengleichung: n: $y_n = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{1}{f(2)}(x-2) + f(2)$, Werte: f(2) = -6, f'(2) = -5 =>

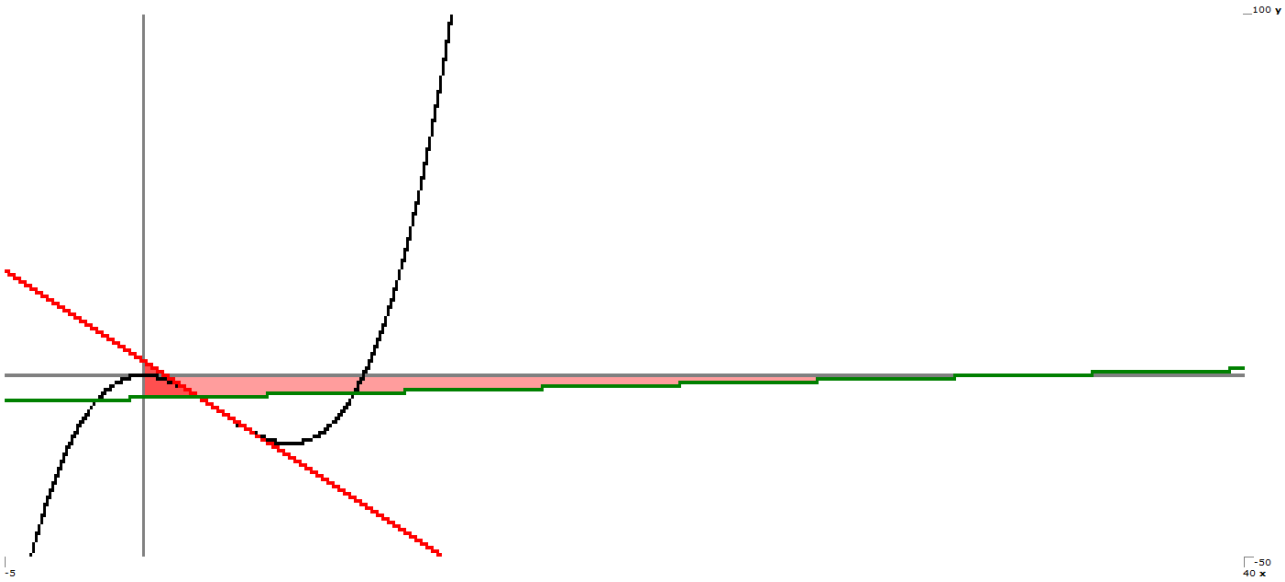
Punkt P(2|-6), Tangentensteigung $m_t = -5$, Normalensteigung $m_n = -1/(-5) = 0.2$

Dreieck PS_tS_y mit y-Achsenabschnittspunkten $S_t(0|y_t(0))$, $S_n(0|y_n(0))$
Dreieck PN_tN_n mit Nullstellen $N_t(x_t|0)$, $N_n(x_n|0)$ ($y_t = 0 \Rightarrow x = x_t$, $y_n = 0 \Rightarrow x = x_n$)

Dreiecksumfang: u = a + b + g (g: Grundseite)
Dreieckfläche: A = gh/2 (h: Höhe)

II. Damit ergibt sich:

Funktion: $f(x) = x^3/4-2x^2$, Punkt: P(2|-6), Tangente: $y_t = -5x + 4$, Normale: $y_n = 0.2x - 6.4$
Dreieck zwischen Tangente, Normale, y-Achse:
$y_t(0) = 4 \Rightarrow S_t(0|4)$
$y_n(0) = -6.4 \Rightarrow S_n(0|-6.4)$
Dreieck P(2|-6) $S_t(0|4)$ $S_n(0|-6.4)$ =>
Seite $a = d(P,S_t) = ((0-x_0)^2+(y_t-y_0)^2)^{1/2} = 10.198$, Seite $b = d(P,S_n) = ((0-x_0)^2+(y_n-y_0)^2)^{1/2} = 2.0396$,
Grundseite $g = |y_t(0)-y_n(0)| = 10.4$; Höhe $h = |x_0| = 2$
=> Dreiecksumfang $u_1 = a+b+g = 22.6376$, Dreieckfläche $A_1 = gh/2 = 10.4$
Dreieck zwischen Tangente, Normale, x-Achse:
$y_t(x) = 0 \Rightarrow x_t = 0.8 \Rightarrow N_t(0.8|0)$
$y_n(x) = 0 \Rightarrow x_n = 32 \Rightarrow N_n(32|0)$
Dreieck P(2|-6) $N_t(4|0)$ $N_n(-6.4|0)$ =>
Seite $a = d(P,N_t) = ((x_t-x_0)^2+(0-y_0)^2)^{1/2} = 6.1188$, Seite $b = d(P,N_n) = ((x_n-x_0)^2+(0-y_0)^2)^{1/2} = 30.5941$, Grundseite $g = |x_t-x_n| = 31.2$; Höhe $h = |f(x_0)| = 6$
=> Dreiecksumfang $u_2 = a+b+g = 67.9129$, Dreieckfläche $A_2 = gh/2 = 93.6$
Graph: $y = f(x) = x^3/4-2x^2$, Tangente $y_t = -5x + 4$, Normale $y_n = 0.2x - 6.4$, Dreieckflächen



Aufgabenblatt: Tangenten, Normalen

1. Bestimme die Tangente an der Stelle x_0 bzw. u an die Funktion f(x):

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$, $x_0 = 4$

b) $f(x)=(2x-3)(3x+5)$, $x_0 = 1$

c) $f(x)=4-2e^{-x}$, u = 0

d) $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{6}\right)-\frac{1}{4}$, u = π

2. Bestimme die Tangenten an den Nullstellen der Funktion f(x):

a) $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-4)(2x+1)$

b) $f(x)=6-e^{-0,2x}$

c) $f(x)=4\sin(\frac{\pi}{4}x)$, $0 \le x \le 8$

3. Bestimme die Wendetangente(n) der Funktion f(x):

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+6x^2+15x-7$

b) $f(x)=x^3-4x^2$

c) $f(x)=2x+1+\cos(\pi x)$, $-1 \le x \le 1$

4. Zeige, dass an den angegebenen Stellen x_0 bzw. u Schnittpunkte oder Berührpunkte zwischen den Funktionen f(x) und g(x) vorliegen.

a) $f(x)=x^3-12x-3$, $g(x)=36x-131$, $x_0 = 4$

b) $f(x)=x^3-4x^2$, $g(x)=x^2$, u = 0, u = 5

c) $f(x)=2\sin x$, $g(x)=3\cos(4x)-1$, u = π/2

5. Ermittle die Berührpunkte zwischen den Funktionen f(x) und g(x):

a) $f(x)=-2x^2+5x-1$, $g(x)=-x+3{,}5$

b) $f(x)=x^2-4x+3$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x-10{,}5$

c) $f(x)=10-2e^{-0,5x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x+8$

6. Bestimme die Normale an der Stelle x_0 bzw. u an die Funktion f(x):

a) $f(x)=x^2-12x+9$, $x_0 = -2$

b) $f(x)=\frac{x^3}{8}+x$, $x_0 = 1$

c) $f(x)=3x-1-e^x$, u = 0

d) $f(x)=\frac{3}{4}\sin(\frac{\pi}{3}x)+2$, $x_0 = 1$

7. Überprüfe, ob sich die Funktionen f(x) und g(x) senkrecht schneiden:

a) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, $g(x) = -\frac{x}{5} - 3$

b) $f(x) = \frac{x^3}{4} + 8x - 11$, $g(x) = -0{,}05x + 37{,}2$

c) $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, $g(x) = 10 - \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{16}x^3 + x + 2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

e) $f(x) = 4 - 2\sin(x)$, $g(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}5x + 4$

f) $f(x) = 2e - \frac{3}{2}e^{0{,}5x}$, $g(x) = \frac{4}{3e}(x^2 - 3x + 2) + \frac{e}{2}$

<u>Lösungen</u>: 1a) y = 6x-8 / 1b) y = 13x-21 /1c) y = 2x+2 / 1d) y = 0,2887x-0.1569
2a) x_0=-2: y = 5x+10, x_0=0,5: y = -1,875x+0,9375, x_0=2: y = 3x-6 / 2b) x_0=-5ln6: y = 1,2x+10,75 /
2c) x_0=0: y = πx, x_0=4: y = -πx + 4π, x_0=8: y = πx-8π
3a) x_0=-4: y = -9x-39 / 3b) x_0=4/3: y = -5,33x+2,37 / 3c) x_0=-0,5: y=5,14x+2,56, x_0=0,5: y = -1,14x+2,57
4. B = Berührpunkt, S = Schnittpunkt / 4a) B(4|13) / 4b) B(0|0), S(5|25) / 4c) B(π/2|2)
5a) B(1,5|2) / 5b) B(3|0) / 5c) B(0|8)
6a) y = 0,0625x+37,125 / 6b) y = -0,727x+1,852 / 6c) y = -0,5x-2 / 6d) y = -2,546x+5,196
7a) S(0|-3) mit f(x) ⊥ g(x) / 7b) S(4|37) mit f(x) ⊥ g(x) / 7c) S_1(-4|2), S_2(4|2) /
7d) S(0|0) mit f(x) ⊥ g(x) / 7e) S(0|4) mit f(x) ⊥ g(x) / 7f) S_1(-1,1|4,57), S_2(2|e/2) mit f(x) ⊥ g(x)

Datenblatt: Symmetrie von Funktionen

Definitionen: Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt (i.e.S.) achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn

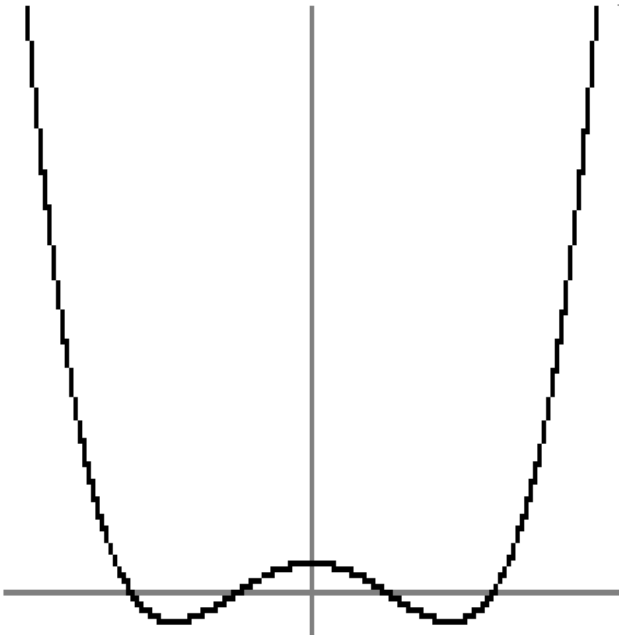
$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \epsilon D_f$$

gilt. Sie heißt (i.e.S.) punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0), wenn

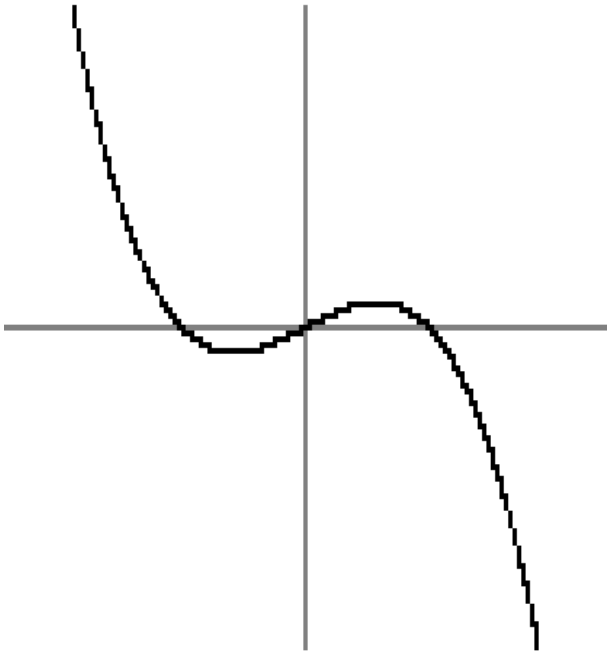
$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \epsilon D_f$$

gilt.

Beispiele:



a) $f(x) = 0{,}1x^4-2x^2+5$ (achsensymmetrisch)



b) $f(x) = -0{,}5x^3 + 4x$ (punktsymmetrisch)

c) Für die ganz rationale Funktion $f(x) = 0{,}1x^4-2x^2+5$ lässt sich die Achsensymmetrie wie folgt nachweisen (gerade Hochzahlen von negativen Basen):

$$f(-x) = 0{,}1(-x)^4-2(-x)^2+5 = 0{,}1x^4-2x^2+5 = f(x)$$

Beispiel c) gibt Anlass zu folgenden Feststellungen:

a) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von geraden Hochzahlen (0, 2, 4, …) ist achsensymmetrisch.
b) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von ungeraden Hochzahlen (1, 3, 5, …) ist punktsymmetrisch.
c) Für ganz rationale Funktionen mit Potenzen gleichzeitig von geraden und ungeraden Hochzahlen ist keine Symmetrie (i.e.S.) erkennbar.

Es gilt: Konstante Funktionen f(x) = c, c reell, sind achsensymmetrisch ($c = cx^0$, 0 als gerade Hochzahl).

Letzteres erklärt sich aus dem folgenden Satz:

a) Vielfache und Summen von achsensymmetrischen Funktionen sind achsensymmetrisch.
b) Vielfache und Summen von punktsymmetrischen Funktionen sind punktsymmetrisch.
c) Gemischte Summen aus achsensymmetrischen und punktsymmetrischen Funktionen sind weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

Weiter gilt für zwei Funktionen u(x) und v(x) und deren Produkt f(x) = u(x)·v(x) der Satz:

a) u(x) achsensymmetrisch, v(x) achsensymmetrisch => f(x) achsensymmetrisch
b) u(x) punktsymmetrisch, v(x) achsensymmetrisch => f(x) punktsymmetrisch

c) u(x) achsensymmetrisch, v(x) punktsymmetrisch => f(x) punktsymmetrisch
d) u(x) punktsymmetrisch, v(x) punktsymmetrisch => f(x) achsensymmetrisch

Für trigonometrische Funktionen gilt:

a) Die Sinusfunktion f(x) = sin(x) ist punktsymmetrisch.
b) Die Kosinusfunktion f(x) = cos(x) ist achsensymmetrisch.
c) Die Tangensfunktion f(x) = tan(x) ist punktsymmetrisch.

Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist selbst nicht symmetrisch, jedoch sind Exponentialfunktionen mit achsensymmetrischen Exponenten achsensymmetrisch und gewisse Summen von Exponentialfunktionen wie $f(x) = e^x + e^{-x}$ achsensymmetrisch oder wie $f(x) = e^x – e^{-x}$ punktsymmetrisch.

Datenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)

Eine <u>ganz rationale Funktion</u> (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion.

Die <u>Kurvendiskussion</u> ermittelt die Besonderheiten der aus einer Funktion f(x) sich ergebenden Kurve im x-y-Koordinatensystem, des Graphen von f(x). Hinsichtlich einer ganz rationalen Funktion f(x) heißt das:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$ $f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + ... + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + ... + 6a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0)
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0)
VII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade) c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw. f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):					
$a_n>0$	n ungerade	n gerade	$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Beispiel (ganz rationale Funktionen):

Gegeben ist die ganz rationale Funktion 4. Grades $f(x)=\frac{x^3}{2}(8-x)$. – Kurvendiskussion:

I. Definitionsbereich D_f = **R**

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist für alle $x\in$ **R** definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar. – Neben der Darstellung der Funktion als Produkt verwenden wir durch Auflösen der Klammer die Darstellung:

$$f(x)=\frac{x^3}{2}(8-x)=\frac{x^3}{2}\cdot 8-\frac{x^3}{2}\cdot x=4x^3-\frac{1}{2}x^4.$$

Wegen den Potenzen x^3 und x^4 ist eine (gerade oder ungerade) Symmetrie nicht erkennbar.

II. Ableitungen *f'(x), f''(x), f'''(x)*

II. Ableitungen: Die letzte Form von *f* verwenden wir beim Ableiten:

$f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^4$	Funktion
$f'(x)=12x^2-2x^3$	1. Ableitung
$f''(x)=24x-6x^2$	2. Ableitung
$f'''(x)=24-12x$	3. Ableitung

III. Nullstellen des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x)=0$

III. Nullstellen: Es folgt aus der Darstellung der Funktion als Produkt:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{2}(8-x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{2}=0\vee 8-x=0\Leftrightarrow x^3=0\vee 8=x\Leftrightarrow x=0\vee x=8$$

Nullstellen der Funktion sind somit: *x*=0, *x*=8. Also: $N_1(0|0)$, $N_2(8|0)$.

IV. Extremwerte (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E)=0$: $f''(x_E)<0\Rightarrow x_E$ rel. Maximum $f''(x_E)>0\Rightarrow x_E$ rel. Minimum

IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-2x^3=0\Leftrightarrow 2x^2(6-x)=0\Leftrightarrow 2x^2=0\vee 6-x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=6$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen Werte *x*=0 und *x*=6 in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(0)=0-0=0\Rightarrow x=0$ kann weder als Minimum noch Maximum erkannt werden (siehe dazu V.)

$f''(6)=144-216=-72<0\Rightarrow x=0$ als relatives Maximum

Bei *x*=6 liegt ein relatives Maximum (Hochpunkt). Somit lautet der diesbezügliche Kurvenpunkt wegen *f(6)* = $\frac{6^3}{2}(8-6)=6^3=216$: H(6|216).

V. Wendepunkte (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W)=0$: $f'''(x_W)\neq 0\Rightarrow x_W$

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Aus dem Nullsetzen der 2. Ableitung folgt:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 24x-6x^2=0\Leftrightarrow 2x(12-3x)=0\Leftrightarrow 2x=0\vee 12-3x=0\Leftrightarrow$$
$$x=0\vee 12=3x\Leftrightarrow x=0\vee x=4$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Koordinate der potenziellen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(0)=24-0=24\neq 0\Rightarrow x=0$ als Wendepunkt

$f'''(4)=24-48=-24\neq 0\Rightarrow x=4$ als Wendepunkt

|Wendepunkt

Insbesondere liegt bei x=0 also kein Hoch- und Tiefpunkt (siehe IV.), sondern ein Wendepunkt vor, und zwar ein Sattelpunkt mit Funktionssteigung *f'(0)* gleich 0. Die Wendepunkte lauten wegen *f(0)* = 0 und *f(4)* = $\frac{4^3}{2}(8-4)=128$: $W_1(0|0)$, $W_2(4|128)$.

VI. Verhalten gegen ±∞, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms $a_n x^n$ mit:
a_n<0, n ung.:
x->∞ → *f(x)*->-∞
x->-∞ → *f(x)*->∞
a_n<0, n gerade:
x->∞ → *f(x)*->-∞
x->-∞→ *f(x)*->-∞

VI. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^4 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^4$ und besitzt den negativen Koeffizienten $-\frac{1}{2}$. Damit gilt:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) = \ldots - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$$

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) = \ldots - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$$

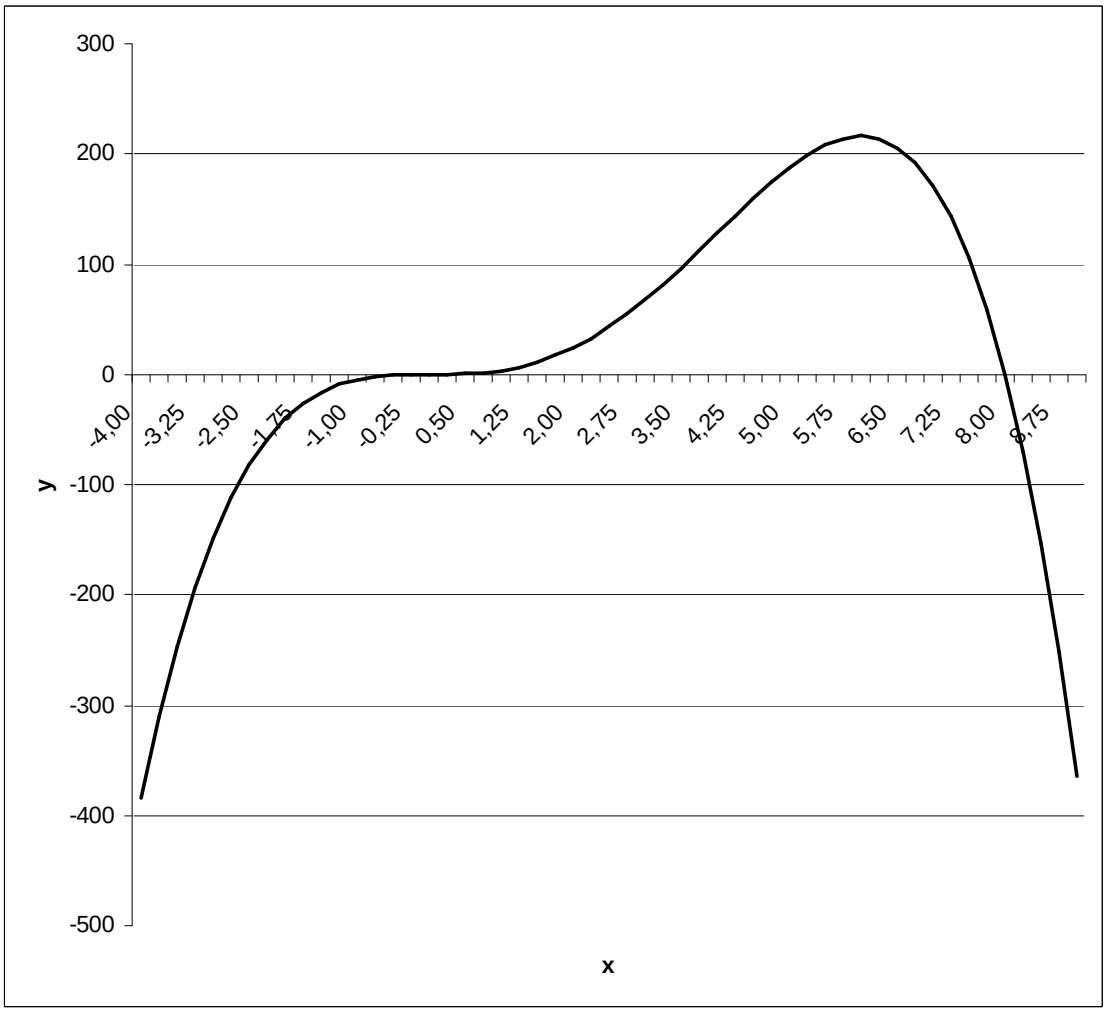
VII. Wertetabelle

VII. Wertetabelle:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4	6	8	10
y = f(x)	-384	-40	-4,5	0	3,5	24	128	216	0	-1000

VIII. Zeichnung im x-y-Koordinatensystem

VIII. Zeichnung:



Aufgabenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)

1. Bestimme die Nullstellen, die Hoch-, Tief- und Sattelpunkte der Funktion f(x). Wo ist f(x) monoton wachsend, wo monoton fallend? Was lässt über die Symmetrie von f(x) aussagen?

a) $f(x) = x^2 - 10x + 27$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 7$

d) $f(x) = x^4 + 8x^3$

2. Untersuche die folgenden Polynomfunktionen (ganz rationalen Funktionen) auf: Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte, Verhalten für betragsmäßig große x. Erstelle im x-y-Koordinatensystem eine Zeichnung der Funktion.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

b) $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$

c) $f(x) = \frac{21}{2}x(x+1)^2$

d) $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^4$

Lösungen: 1. H = Hochpunkt, N = Nullstelle, Sp = Sattelpunkt, S_y = Schnittpunkt mit y-Achse, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt. / 1a) S_y(0|27), T(5|2) / 1b) N(0|0)=H(0|0), W(2|-16), T(4|-32), N(6|0) /
1c) N(-5,58|0), T(-4|-57), W(-2,3|-28,32), N(-0,95|0), H(0|7), N(0,95|0), W(2,3|-28,32), T(4|-57), N(5,58|0) /
1d) N(-8|0), T(-6|-432), W(-4|-256), N(0|0)=Sp(0|0)
2a) N(-2|0), H(-2/3|9,48), S_y(0|8), W(2/3|4,72), N(2|0)=T(2|0) / 2b) N(0|0)=T(0|0), W(2/3|2,19), Sp(2|5,33) /
2c) N(-1|0)=H(-1|0), W(-2/3|-0,77), T(-1/3|-1,56), N(0|0)=S_y(0|0) /
2d) N(-2|0), H(-1,5|0,84), W(-1|0,5), N(0|0)=Sp(0|0)

Datenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)

Eine <u>ganz rationale Funktion</u> (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Im Folgenden sei der Grad n ≤ 4.

Im Rahmen von <u>Bestimmungsaufgaben für ganz rationale Funktionen</u> werden die Koeffizienten des gesuchten Funktionsterms auf Grund gegebener Eigenschaften der Funktion ermittelt:

Geraden	
Funktion: y = mx + b (m als Steigung, b als y-Achsen-Abschnitt)	
Punkt $P(x_1\|y_1)$, Steigung m	Punkte $P(x_1\|y_1)$, $Q(x_2\|y_2)$
<u>Punktsteigungsform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$	<u>Zweipunkteform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Umstellen zu: $y = m(x-x_1) + y_1$	Umstellen zu: $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1$
	Steigung: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
<u>Ursprungsgerade</u> y = mx (durch den Ursprung): $y = \frac{y_1}{x_1}x$ mit: $m = \frac{y_1}{x_1}$	

Bestimmungsaufgabe für Geraden

Parabeln	
Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform), $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform)	
Scheitelpunkt $S(x_S\|y_S)$:	$f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$
Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = a(x_1-x_S)^2 + y_S = y_1$ -> $a = \frac{y_1-y_S}{(x_1-x_S)^2}$

Bestimmungsaufgabe für Parabeln (2. Grades, Scheitelform)

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
	Funktion und Ableitungen:	
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
	Lineare Gleichungen vom Typ:	
$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 + b + c = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 + 2b = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 3bx_1^3 + 2cx_2 + d = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 6bx_3 + 2c = y_3$
	für bestimmte x- und y-Werte	
Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Gleichungen mit Unbekannten a, b, … gemäß den Funktionseigenschaften: Punkt $P(x_1\|y_1)$: $f(x_1) = y_1$ Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$: $f(x_0) = 0$ Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt: $f(0) = 0$ y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$: $f(0) = y_0$ Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x): $f(x_1) = g(x_1)$		

Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_€$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->

Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1) = ax_1^2 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + cx_1 = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + cx_1^2 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2cx_2 = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 2c = y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

Gleichungen mit Unbekannten a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:

Punkt P(x_1|y_1):	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. N(x_0|0):	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	$f(0) = 0$
y-Achsenabschnittspunkt S_y(0|y_0):	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_€$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->		
	Aufstellen der Funktionsgleichung:	
$f(x)=ax^2+c$	$f(x)=ax^3+cx$	$f(x)=ax^4+cx^2+e$

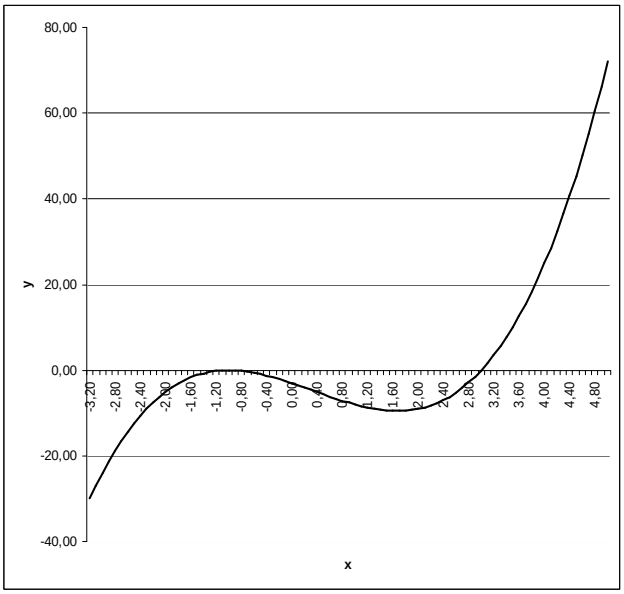
Bestimmungsaufgabe für symmetrische ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Beispiele (Bestimmungsaufgaben):

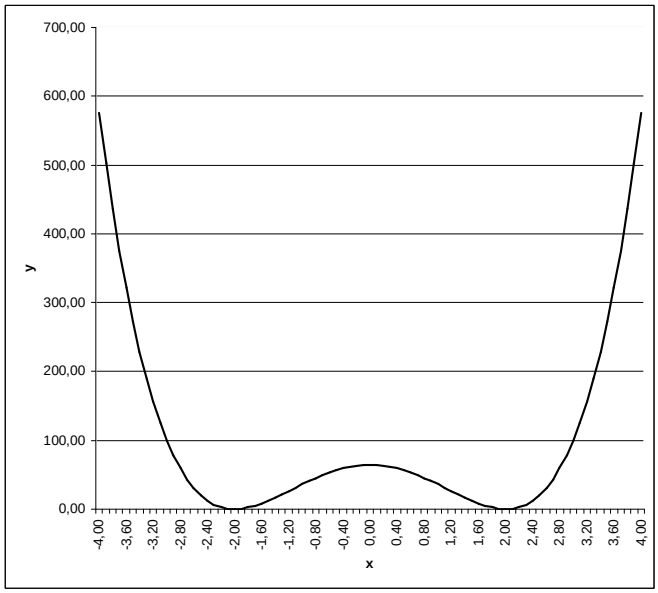
1. Eine ganz rationale Funktion 3. Grades f besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3, hat einen Tiefpunkt bei x=5/3 und schneidet die y-Achse bei y=-3. – Lösung:

I. Ansatz Polynom dritten Grades	I. Ansatz: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c,dε**R**.
II. Eigenschaften und Gleichungen a)/b) f besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3 c) f hat einen Tiefpunkt bei x=5/3 d) f schneidet die y-Achse bei y=-3.	II. Eigenschaften: Es gilt: $f(-1)=0$ (Nullstelle bei *x*=-1) $f(3)=0$ (Nullstelle bei *x*=3) $f'(\frac{5}{3})=0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=$\frac{5}{3}$) $f(0)=-3$ (Schnittpunkt mit der *y*-Achse im Punkt P(0|-3))
III. Aufstellen des linearen Gleichungssystems	III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen: $0=f(-1)=a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d$ $0=f(3)=a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+c\cdot 3+d$ $0=f'(\frac{5}{3})=3a\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+2b\cdot\frac{5}{3}+c$ $-3=f(0)=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d$ Also: $0=-a+b-c+d$ $0=27a+9b+3c+d$ $0=\frac{25}{3}a+\frac{10}{3}b+c$ $-3=d$
IV. Lösen des linearen Gleichungssystems	IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wegen d=-3 erhalten wir (durch Subtraktion von d=-3 in den ersten beiden Gleichungen und Multiplikation mit 3 in der 3. Gleichung) das lineare Gleichungssystem: $-a+b-c=3$ $27a+9b+3c=3$ $25a+10b+3c=0$ Die gesuchten Koeffizienten sind dann nach Durchführung des Gauß-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme: a=1, b=-1, c=-5, d=-3.
V. Funktion	V. Die Funktion hat also die Gleichung: $f(x)=x^3-x^2-5x-3$.
VI. Probe	VI. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(\frac{5}{3})=0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist:

	$f'(x)=3x^2-2x-5,\quad f''(x)=6x-2$ und damit: $f''(\frac{5}{3})=10-2=8>0$ mit $x=\frac{5}{3}$ als Tiefpunkt. Die Funktion erfüllt daher alle geforderten Eigenschaften.



$y=f(x)=x^3-x^2-5x-3$



$y=f(x)=4x^4-32x^2+64$

2. Eine ganz rationale Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch, besitzt den Tiefpunkt T(2|0) und hat eine Steigung von -48 bei x=1. – Lösung:

I. Ansatz Biquadratisches Polynom vierten Grades	I. Ansatz: $f(x)=ax^4+bx^2+c$, $f'(x)=4ax^3+2bx$ mit zu suchenden Koeffizienten a,b,cε**R**.
II. Eigenschaften und Gleichungen a) f hat einen Tiefpunkt bei T(2|0) b) f hat bei x=1 Steigung -48	II. Eigenschaften: Es gilt: $f(2)=0$ (Nullstelle bei *x*=2) $f'(2)=0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=2) $f'(1)=-48$ (Steigung bei *x*=1)
III. Aufstellen des linearen Gleichungssystems	III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen: $0=f(2)=16a+4b+c$ $0=f'(2)=32a+4b$ $-48=f'(1)=4a+2b$
IV. Lösen des linearen Gleichungssystems	IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wir haben das Gleichungssystem: $16a+4b+c=0$ $32a+4b=0$ $4a+2b=-48$ Die gesuchten Koeffizienten sind dann: a=4, b=-32, c=64.
V. Funktion	V. Die Funktion hat damit die Gleichung: $f(x)=4x^4-32x^2+64$.
VI. Probe	V. Die gefundene Funktion erfüllt alle Bedingungen.

Aufgabenblatt: Bestimmungsaufgaben (ganz rationale Funktionen, Polynome)

1. Die Kurve einer Parabel 2. Grades läuft durch die Punkte $P_1(0|-12)$, $P_2(2|-16)$ und $P_3(6|0)$.

2. Ein Polynom 3. Grades hat an der Nullstelle N(2|0) einen Tiefpunkt und bei x = $\frac{2}{3}$ einen Wendepunkt mit Steigung $-\frac{16}{3}$.

3. Ein Polynom dritten Grades besitzt im Punkt x=0 die Wendetangente y = -2x-4 und schneidet die x-Achse bei x=2.

4. Eine zur y-Achse symmetrische, ganz rationale Funktion 4. Grades hat an der Nullstelle x = 2 einen Tiefpunkt und schneidet die y-Achse bei y = 64.

5. Ein Polynom 3. Grades hat bei x = 1 eine Nullstelle, hat in H(2|1) einen Hochpunkt und läuft durch den Punkt P(10|513).

6. Ein Polynom 5. Grades erfüllt die folgenden Bedingungen: a) In x =1 besitzt die Funktion die Tangente y = -10x +15; b) Die Gerade y = 20x +57 schneidet die Funktion in x = 3; c) Die Wendetangente in x = 0 liegt parallel zur x-Achse und schneidet die y-Achse bei y = 9.

<u>Lösungen</u>: 1. $f(x) = x^2 - 4x - 12$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

3. $f(x) = x^3 - 2x - 4$

4. $f(x) = 4x^4 - 32x^2 + 64$

5. [$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$] (erfüllt Bedingungen letztlich nicht: Sp(2|1) statt H(2|1)).

6. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 9$

Datenblatt: Exponentialfunktionen, Asymptoten, Wachstum

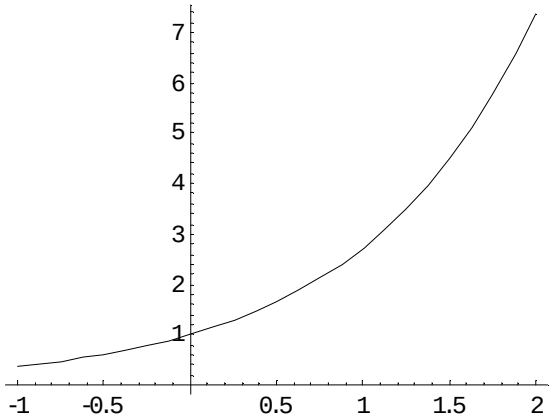
Exponentialfunktionen sind reelle Funktionen vom Typ

$$f(x) = a^x,\ a>0,\ x \text{ reell.}$$

In der Differenzial- und Integralrechnung spielt insbesondere die natürliche Exponentialfunktion mit Basis a = e (= 2,71828… = Eulersche Zahl) eine Rolle. Für Funktionen vom Typ

$$f(x) = e^{ax+b},\ a,b \text{ reell},\ a\neq 0$$

ergibt sich beispielhaft folgendes Aussehen:



Die Exponentialfunktionen haben dann die folgenden Eigenschaften (a, b reell, a≠0):

a) Besondere Werte:

$$e^{-\infty} = 0,\ e^0 = 1,\ e^1 = e,\ e^{\infty} = \infty$$

b) Ableitungen:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax+b})' = a\cdot e^{ax+b}$$

c) Aufleitungen:

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

Definition: Für eine Funktion f: D_f -> **R** heißt die Funktion y Grenzkurve (Asymptote) von f für x->∞, x->-∞ bzw. x->±∞, wenn

$$f(x) \to y \text{ für } x\to\infty,\ x\to-\infty \text{ bzw. } x\to\pm\infty$$

gilt. Ist die Grenzkurve y eine Gerade, also y = mx + c, so heißt die Grenzkurve Asymptote. Ist hierbei m = 0, so ist y eine waagerechte Asymptote, für m ≠ 0 eine schiefe Asymptote.

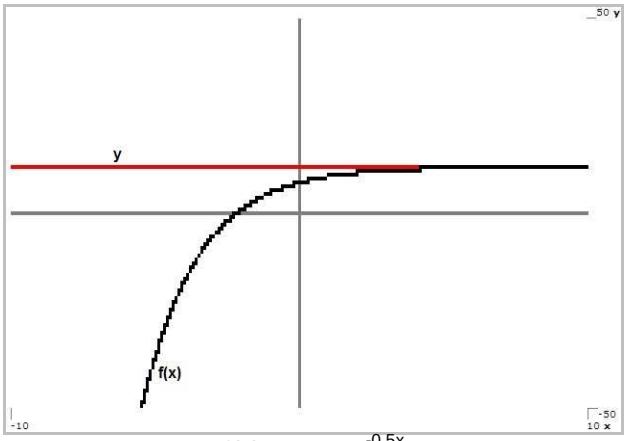
Gemischte Funktionen mit linearem und Exponentialanteil von der Form

$$f(x) = ax + b + ce^{kx}$$

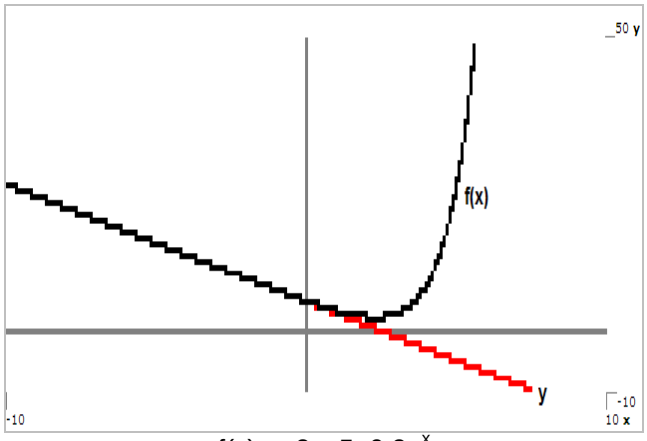
mit reellen a, b, c, k. Dann gilt:

Funktion: $f(x) = ax + b + ce^{kx}$, Asymptote: y = ax+b

$f(x) = ax + b + ce^{kx} \to f'(x) = a + cke^{kx},\ f''(x) = ck^2e^{kx},\ f'''(x) = ck^3e^{kx}$

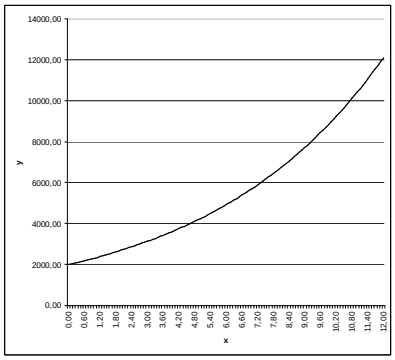


f(x) = 12–4e$^{-0,5x}$



f(x) = -2x+5+0,2e^{x}

<u>Exponentielles Wachstum</u> (Wachstum: k>0; Zerfall: k<0) genügt einer Exponentialfunktion vom Typ



$$f(t) = c \cdot e^{kt}$$

mit Anfangsbedingung f(0) = c > 0 und Wachstumsfaktor (Proportionalitätsfaktor) kε**R** vermöge der Differenzialgleichung:

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

die die Änderung des Wachstums als proportional zum Bestand beschreibt (Bestand: f(t), Änderungsrate: f‘(t)). Es gilt:

f(0) = c, $f'(t) = kc \cdot e^{kt}$, f‘(0) = kc

Für k>0 ergibt sich als Verdopplungszeit T_V: $T_V = \frac{\ln 2}{k}$, für k<0 als Halbwertszeit T_H: $T_H = \frac{-\ln 2}{k}$.

Hinsichtlich der Bestimmung der Funktion $f(t) = c \cdot e^{kt}$ gilt:

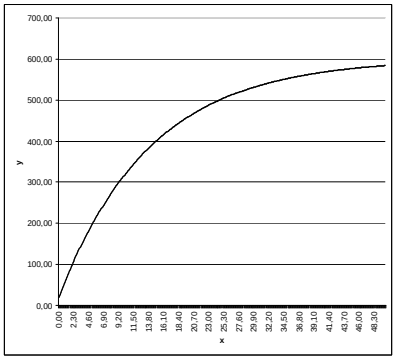
Mit Anfangsbedingung	**Ohne Anfangsbedingung**
Ansatz: $f(t) = c \cdot e^{kt}$	Ansatz: $f(t) = c \cdot e^{kt}$
Anfangswert f(0) -> c = f(0)	Punkt P(t_1|y_1) der Funktion: $f(t_1) = c \cdot e^{kt_1} = y_1$
Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $k = \ln\left(\frac{y_2}{c}\right) \Big/ t_2$ (Umstellen nach k)	Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $\frac{c \cdot e^{kt_1}}{c \cdot e^{kt_2}} = \frac{y_1}{y_2}$ (Division der Gleichungen) -> $k = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \Big/ (t_1 - t_2)$ (Umstellen nach k) -> $c = y_1 \cdot e^{-kt_1}$ (Umstellen nach c)
Ergebnis: $f(t) = c \cdot e^{kt}$	Ergebnis: $f(t) = c \cdot e^{kt}$

Bestimmung der exponentiellen Wachstumsfunktion

<u>Beschränktes Wachstum</u> (Wachstum: c>0; Zerfall: c<0) liegt vor, wenn der Wachstumsprozess der Differenzialgleichung

$$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$$

genügt, also bei k>0 die Veränderung des Wachstums proportional zum Rest (Manko) bis zu einer (oberen oder unteren) Grenze S**ε**R ist. Die Lösung der Differenzialgleichung ist dann:



$$\boxed{f(t) = S - c \cdot e^{-kt}}$$

mit S als Schranke (t->∞: f(t) -> S), f(0) = S – c als Anfangswert (f(0) < S: Wachstum; f(0) > S. Zerfall), c = S – f(0), k als Proportionalitätsfaktor.
Zur Bestandsfunktion ergibt sich als Änderungsrate:

$$f'(t) = kc \cdot e^{-kt}, \text{ f'(0) = kc}$$

Mit f(0) = 0 als Anfangsbestand gilt: c = S und: $f(t) = S(1 - e^{-kt})$ als spezielle Funktion des beschränkten Wachstums. Änderungsrate ist hier: $f'(t) = kS \cdot e^{-kt}$.
Hinsichtlich der Bestimmung der Funktion $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ gilt:

Mit Anfangsbedingung	**Ohne Anfangsbedingung**
Ansatz: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ mit vorgegebenem S	Ansatz: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ mit vorgegebenem S
Anfangswert f(0) -> c = S – f(0) Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = S - c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $c \cdot e^{kt_2} = S - y_2$ -> $k = \ln\left(\frac{S - y_2}{c}\right) \Big/ t_2$ (Umstellen nach k)	Punkt P(t_1|y_1) der Funktion: $f(t_1) = S - c \cdot e^{kt_1} = y_1$ Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = S - c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $c \cdot e^{kt_1} = S - y_1$, $c \cdot e^{kt_2} = S - y_2$ -> $\frac{c \cdot e^{kt_1}}{c \cdot e^{kt_2}} = \frac{S - y_1}{S - y_2}$ (Division der Gleichungen) -> $k = \ln\left(\frac{S - y_1}{S - y_2}\right) \Big/ (t_1 - t_2)$ (Umstellen nach k) -> $c = (S - y_1) \cdot e^{-kt_1}$ (Umstellen nach c)
Ergebnis: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$	Ergebnis: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$

Bestimmung der beschränkten Wachstumsfunktion

Auf Dauer stellt sich bei der Bestandsfunktion $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ der Wert S ein (t -> ∞: f(t) -> S als waagerechte Asymptote).

Beim Aufstellen und <u>Umformen zur Differenzialgleichung</u> $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$ ist zu beachten:

Absolute Zunahme a, prozentuale Abnahme des Bestands k (pro Zeiteinheit)
-> $f'(t) = a - kf(t))$

-> $f'(t) = k\left(\frac{a}{k} - f(t)\right)$ (Ausklammern des Proportionalitätsfaktors k)

-> $f'(t) = k(S - f(t))$ (mit $S = \frac{a}{k}$)

<u>Beispiele</u>:

a) f(x) = 5 + $2e^{-x}$ hat als waagerechte Asymptote die Gerade y = 5, besitzt wegen f(x) > 5 keine Nullstellen und wegen f'(x) = $-2e^{-x}$ < 0 keine Extremstellen.

b) f(x) = -4x + $e^x/2$ besitzt die schiefe Asymptote y = -4x (Ursprungsgerade), die Nullstellen N_1(0,14|0), N_2(3,26|0) und den Tiefpunkt T(2,07|-4,32).

c) $f(t) = 2{,}3e^{0{,}7t}$ ist eine exponentielle Wachstumsfunktion mit Wachstumsfaktor k = 0,7 und Anfangsbestand f(0) = 2,3. $f'(t) = 1{,}61\ e^{0{,}7t}$ gibt die Änderungsrate des Wachstums an. Der Bestand verdoppelt sich jeweils in der Verdopplungszeit $T_V = \ln 2/k = 0{,}99$.

d) Eine Bakterienkultur kann sich unbeschränkt ausbreiten. Zu Anfang liegen 2000 Bakterien vor, das Wachstum pro Stunde genügt dem Proportionalitätsfaktor k = 0,15. Die Wachstumsfunktion ist: $f(t) = 2000e^{0{,}15t}$. Die Verdopplungszeit beträgt: $T_V = \ln 2/0{,}15 = 4{,}62$ Stunden.

e) Seerosen siedeln auf einem 600 m^2 großen Teich. Zu Anfang einer Vegetationsperiode bedecken die Seerosen eine Oberfläche von 20 m^2, nach einer Woche von 60 m^2. Es liegt damit beschränktes Wachstum vor, wobei f(0) = 20, f(1) = 60 bei S = 600 und c = 600 – 20 = 580 gilt. Wir haben also: $f(t) = 600 - 580e^{-kt}$ und haben nun noch k zu bestimmen. Wegen f(1) = 60 folgt: $60 = 600 - 580e^{-k} \Leftrightarrow 580e^{-k} = 540 \Leftrightarrow e^{-k} = 0{,}931 \Leftrightarrow -k = \ln(0{,}931) \Leftrightarrow k = 0{,}0715$. Damit lautet die Wachstumsfunktion: $f(t) = 600 - 580e^{-0{,}0715t}$. Nach 10 Wochen ist wegen $f(10) = 600 - 580e^{-0{,}715}$ eine Oberfläche von 316,15 m^2 bedeckt, 500 m^2 Oberfläche sind bedeckt, wenn f(t) = 500 ist, also: $f(t) = 600 - 580e^{-0{,}0715t} = 500 \Leftrightarrow 580e^{-0{,}0715t} = 100 \Leftrightarrow e^{-0{,}0715t} = 0{,}1724 \Leftrightarrow -0{,}0715t = \ln(0{,}1724) \Leftrightarrow t = 24{,}59$ Wochen.

Aufgabenblatt: Exponentialfunktionen, Asymptoten, Wachstum

1. Untersuche die folgenden Funktionen auf Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Extremstellen.

a) $f(x) = 4 - 3e^{x}$

b) $f(x) = -5 + \frac{4}{3}e^{2x}$

c) $f(x) = -4 + e^{-2x}$

d) $f(x) = 2x - 4 + \frac{1}{2}e^{-2x}$

e) $f(x) = x + 5 + \frac{4}{5}e^{0,5x}$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2e^{-0,5x}$

g) $f(x) = 10 - \frac{1}{2}e^{0,3x} - \frac{1}{2}e^{-0,3x}$

2. Eine radioaktive Substanz zerfällt mit einer Halbwertzeit T_H = 20,88 Stunden (h). Zu Beobachtungsbeginn sind 80 mg der Substanz vorhanden. Bestimme das exponentielle Zerfallsgesetz.

a) Wie viel Masse ist nach 5 Stunden noch vorhanden?
b) Wie viel Masse ist nach 35 Stunden schon zerfallen?
c) Wann sind noch 60 mg der Substanz vorhanden?
d) Wie groß ist die Änderungsrate zum Zeitpunkt 2,6 Stunden?
e) Wann beträgt die Änderungsrate -2 mg/h?

3. Ein Heißgetränk hat zu Beobachtungsbeginn eine Temperatur von 90° C, nach 10 Minuten von 65° C, die Zimmertemperatur beträgt 20° C. Bestimme die beschränkte Wachstumsfunktion der Temperaturabnahme.

a) Welche Temperatur hat das Getränk nach 20 Minuten?
b) Wann ist die Temperatur des Getränks 60° C?
c) Wann hat sich die Temperatur des Getränks halbiert?
d) Wann ist die Temperatur des Getränks nur noch ein Grad über der Zimmertemperatur?
e) Wie groß ist durchschnittliche Temperaturabnahme in der ersten Viertelstunde?
f) Wie groß ist die Temperaturabnahme nach 10 Minuten?
g) Ab wann sinkt die minütliche Temperaturabnahme auf unter 1° C?

Lösungen: 1. y = Asymptote, S_y = y-Achsenabschnittspunkt, N = Nullstelle, H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt. /
1a) y=4, S_y(0|1), N(0,28|0) / 1b) y=-5, S_y(0|-3,67), N(0,66|0) / 1c) y=-4, N(-0,7|0), S_y(0|-3) /
1d) y=2x–4, N(-1,29|0), T(-0,35|-3,69), S_y(0|-3,5), N(1,99|0) / 1e) y=x+5, N(-5,07|0), S_y(0|5,8) /
1f) y=0,5x, S_y(0|2), T(1,38|1,69) / 1g) N(-9,98|0), S_y(0|9)=H(0|9), N(9,98|0)
2. f(t) = $80e^{-0,0332t}$ / 2a) f(5) = 67,76 / 2b) 80 – f(35) = 55 / 2c) f(t)=60 -> t = 8,67 /
2d) f'(2,6) = -2,43 / 2e) f'(t)=-2 -> t = 8,54
3. f(t) = $20+70e^{-0,0442t}$ / 3a) f(20) = 48,92 / 3b) f(t)=60 -> t = 12,66 / 3c) f(t)=45 -> t = 23,29 /
3d) f(t)=21 -> t = 96,12 / 3e) m = (f(15)-f(0))/(15-0) = -2,262 / 3f) f'(10) = -1,99 / 3g) f'(t)=-1 -> t = 25,55

Datenblatt: Trigonometrische Funktionen

Sinus (sin*x*) und Cosinus (cos*x*) haben bei einer Periode von 2π die folgenden Grundwerte:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin*x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos*x*	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Den Grundwerten entsprechen die Lösungen der trigonometrischen Gleichungen:

sin*x* = a	cos*x* = a
mit a = 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, ±1	
x = b_1 + 2kπ bzw. x = b_2 + 2kπ, k ganzzahlig mit b_1, b_2 = 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{6}$, 2π	

Trigonometrische Gleichungen

Für Sinus und Cosinus gelten noch hinsichtlich Symmetrie, Komplementärwinkel, Periodizität (k ganzzahlig):

$$-1 \le \sin x \le 1,\ -1 \le \cos x \le 1$$
$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x$$
$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Trigonometrische Funktionen sind auf Sinus und Cosinus aufbauende Funktionen u.a. vom Typ

$$f(x) = a \cdot \sin(kx) + b$$
$$f(x) = a \cdot \cos(kx) + b$$

Dabei sind: a = Amplitude = maximale Auslenkung von der Mittellinie, Streckung bzw. Stauchung entlang der y-Achse; k = Periodenfaktor; b = Mittellinie = Verschiebung entlang der y-Achse. Der Wertebereich der trigonometrischen Funktionen ist: [b–a; b+a]. Für die Periode p der Funktionen f(x) gilt:

$$p = \frac{2\pi}{k} \text{ bzw. } k = \frac{2\pi}{p}$$

Die trigonometrischen Funktionen haben die Periode p, d.h. es gilt:

$$f(x+p) = a\sin(kx+p) + b = a\sin(kx) + b = f(x) \text{ bzw.}$$
$$f(x+p) = a\cos(kx+p) + b = a\cos(kx) + b = f(x)$$

Die Sinusfunktion ist für b = 0 punktsymmetrisch, d.h. es gilt:

$$f(-x) = a\sin(-kx) = -a\sin(kx) = -f(x)$$

Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch mit:

$$f(-x) = a\cos(-kx) + b = a\cos(kx) + b = f(x)$$

Die trigonometrischen Funktionen besitzen abwechselnd Hochpunkte $H(x_H|y_H) = (x_H|a+b)$ und Tiefpunkte $T(x_T|y_T) = (x_T|a–b)$ mit:

Sinus:

$$\ldots,\ x_H = \frac{\pi}{2k} - p,\ x_H = \frac{\pi}{2k},\ x_H = \frac{\pi}{2k} + p,\ \ldots;\ y_H = a+b$$

$$\ldots,\ x_T = -\frac{\pi}{2k},\ x_H = \frac{3\pi}{2k},\ x_H = \frac{3\pi}{2k} + p,\ \ldots;\ y_T = b–a$$

Kosinus:

$$\ldots,\ x_H = -p,\ x_H = 0,\ x_H = p,\ \ldots;\ y_H = a+b$$

$$\ldots,\ x_T = \frac{\pi}{k} - p,\ x_T = \frac{\pi}{k},\ x_T = \frac{\pi}{k} + p,\ \ldots;\ y_T = b–a\ (a, k > 0)$$

Aus den obigen Formeln ergibt sich noch für die Bestimmung von a, b und k:

$$k = \frac{2\pi}{p},\ b = \frac{y_H + y_T}{2},\ a = y_H - b$$

Die Wendepunkte $W(x_W|y_W) = (x_W|b)$ liegen exakt zwischen je einem Hoch- und Tiefpunkt und auf der Mittellinie:

Sinus:

$$\ldots,\ x_W = -\frac{p}{2},\ x_W = 0,\ x_W = \frac{p}{2},\ \ldots;\ y_W = b$$

Kosinus:

$$\ldots,\ x_W = \frac{\pi}{2k} - \frac{p}{2},\ x_W = \frac{\pi}{2k},\ x_W = \frac{\pi}{2k} + \frac{p}{2},\ \ldots;\ y_H = b\ (a, k > 0)$$

Bzgl. des Ab- und Aufleitens der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$f(x) = a \cdot \sin(kx) + b \text{ ->}$$

$$f'(x) = ak \cdot \cos(kx),\ f''(x) = -ak^2 \sin(kx),\ f'''(x) = -ak^3 \cos(kx) \text{ bzw.}$$

$$f(x) = a \cdot \cos(kx) + b \text{ ->}$$

$$f'(x) = -ak \cdot \sin(kx),\ f''(x) = -ak^2 \cos(kx),\ f'''(x) = ak^3 \sin(kx)$$

bzw.

$$f(x) = a \cdot \sin(kx) + b \text{ -> } F(x) = -\frac{a}{k} \cdot \cos(kx) + bx$$

$$f(x) = a \cdot \cos(kx) + b \text{ -> } F(x) = \frac{a}{k} \cdot \sin(kx) + bx$$

Beispiele:

a) Die Sinusfunktion f(x) = 4·sin(2x) – 5 hat die Amplitude a=4, die Mittellinie b=-5, die Periode p = 2π/2 = π. U.a. auf Grund der Periode ergeben sich die Wendepunkte als: …, W(-π/2|-5), W(0|-5), W(π/2|-5), …, die Hochpunkte als: …, H(-3π/4|-1), H(π/4|-1), H(5π/4|-1), …, die Tiefpunkte als: …, T(-π/4|-9), T(3π/4|-9), …

b) Die Kosinusfunktion f(x) = 6·(cos(πx)+1) hat die Amplitude a=6, die Mittellinie b=6, die Periode p = 2. Die Nullstellen von f(x) sind die Tiefpunkte …, T(-3|0), T(-1|0), T(1|0), …, die Hochpunkte liegen bei …, H(-2|12), H(0|12), H(2|12), …, die Wendepunkte sind die Mittellinienpunkte …, W(-1,5|6), W(-0,5|6), W(0,5|6), …

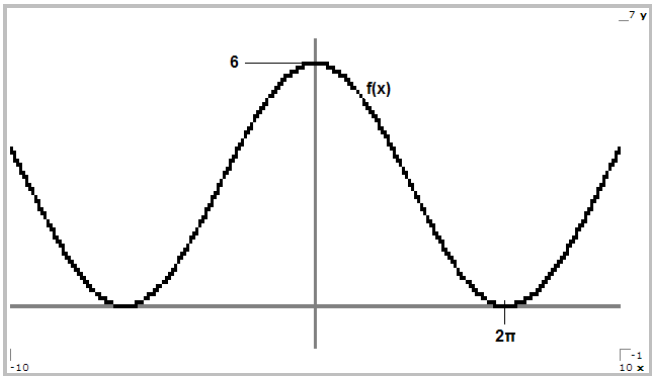
Aufgabenblatt: Trigonometrische Funktionen

1. Bestimme die trigonometrischen Funktionen vom Typ f(x) = a·sin(kx)+b bzw. f(x) = a·cos(kx)+b.

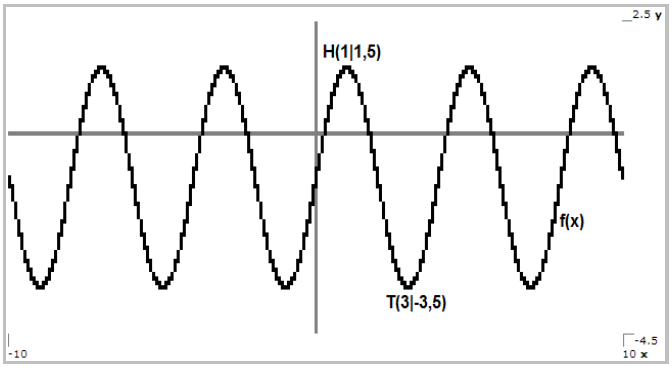
a) Eine Kosinusfunktion hat die Amplitude 4, einen Hochpunkt bei $x_H = 2\pi$, und ist gegenüber der Kosinusfunktion y = cos(x) um 2 nach oben verschoben.

b) Eine Sinuskurve besitzt den Hochpunkt H(2|5). Die y-Koordinate des Tiefpunkts ist $y_T = -1$.

c) Die trigonometrische Funktion hat folgendes Aussehen:



d) Die trigonometrische Funktion hat folgendes Aussehen:



2. Bestimme Nullstellen, Hoch-, Tiefpunkte und Wendepunkte der nachstehenden Funktion f(x) im angegebenen Bereich.

a) f(x) = 3·sin(2πx) + 2, 0≤x≤2

b) f(x) = 0,5·cos(x/2) +1, 0≤x≤4π

c) f(x) = 4 – 2·sin(x), [-π,π]

d) f(x) = -11·cos(πx/6) + 10, 0≤x≤12

Lösungen: 1a) a=4, p=2π–0=2π, k=1, b=2 -> f(x) = 4cos(x)+2 /
1b) b = (5-1)/2 = 2, a=5-2=3, p=2·4=8, k=π/4 -> f(x)=3sin(πx/4)+2 /
1c) H(0|6), T(2π|0) -> a=3, b=3, p=2·2π=4π, k=1/2 -> f(x) = 3cos(x/2)+3 /
1d) a=2,5, b=-1, p=2·2=4, k=π/2 -> f(x) = 2,5sin(πx/2)–1
2. H = Hochpunkt, N = Nullstelle, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt. /
2a) p=1 -> W(0|2), H(0,25|5), W(0,5|2), N(0,62|0), T(0,75|-5), N(0,89|0), W(1|2) usw. /
2b) p=4π -> H(0|1,5), W(π|1), T(2π|0,5), W(3π|1), H(4π|1,5)
2c) p=2π -> W(-π|4), H(-π/2|6), W(0|4), T(π/2|2), W(π|4)
2d) p=12 -> T(0|-1), N(0,83|0), W(3|10), H(6|21), W(9|10), N(11,18|0), T(12|-1)

Datenblatt: Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben sind Aufgaben zur Bestimmung von Minima oder Maxima in bestimmten mathematischen Modellen und Situationen. Eine von zwei Variablen abhängige Hauptbedingung H(x,y) ist dabei zu minimieren oder maximieren, eine Nebenbedingung verknüpft die beiden Variablen vermöge: y = N(x). So ist also H*(x) = H(x,N(x)) auf einem Intervall [a; b] zu minimieren oder maximieren, wobei H*'(x) = 0 zu setzen ist und die Lösungen x_0 der Gleichung in H*''(x) einzusetzen sind (H*''(x_0) > 0 -> Minimum, H*''(x_0) < 0 -> Maximum). Zu untersuchen sind gegebenenfalls die Randextrema H*(a), H*(b), um das globale Minimum bzw. Maximum zu ermitteln.

Extremwertaufgaben finden Anwendung bei folgenden Problemstellungen:

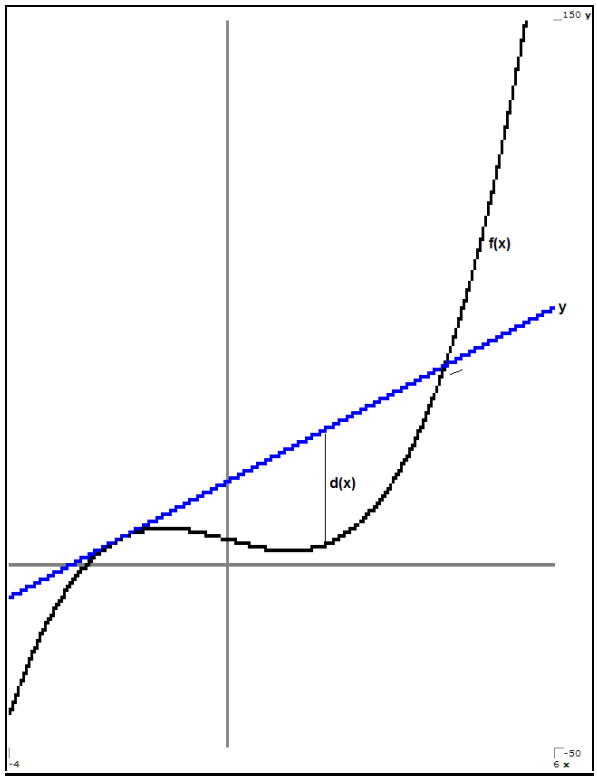
a) Eine Funktion f(x) und die x-Achse werden geschnitten von der senkrechten Geraden x = u in den Punkten R(u|f(u)) und Q(u|0). Zusammen mit einem Punkt P(x_0|y_0) ergibt sich dann das rechtwinklige Dreiecks PQR, dessen Flächeninhalt zu maximieren ist. Der geometrische Flächeninhalt A = gh/2 wird zur Flächeninhaltsfunktion: A(u) = |u–x_0|·|f(u)|/2, deren globales Maximum zu bestimmen ist (evtl.: A'(u)=0).

b) Die Abstandsfunktion zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) auf einem Intervall [a; b] ergibt sich als: d(x) = |f(x)–g(x)|, der maximale Abstand als globales Maximum von d(x).

c) Der minimale Abstand zwischen einer Funktion f(x) und einem Punkt P(x_0|y_0) ergibt sich aus dem Minimum der Abstandsfunktion d(x) = $\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-y_0)^2}$.

Beispiele:

a) Zur Funktion f(x) = x^3 – 4x + 7 ergibt sich die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0=-2 als y = 8x + 23. Tangente und Funktion schneiden sich an den Stellen x=-2, x=4. Im Bereich zwischen den Schnittpunkten ist der Abstand zwischen Funktion und Tangente maximal, wenn das Maximum der Abstandsfunktion d(x) = y – f(x) (-2≤x≤4; hier: f(x)≤y) bestimmt wird. Die Abstandsfunktion als Differenzfunktion lautet: d(x) = y(x) – f(x) = (8x+23) – (x^3-4x+7) = -x^3+12x+16. Zur Bestimmung des Maximums leiten wir ab: d'(u) = -3x^2 + 12. Nullsetzen der Ableitung ergibt: d'(x)=0 ⇔ -3x^2 + 12 = 0 ⇔ 12 = 3x^2 ⇔ 4 = x^2 ⇔ x = ±2. Der Punkt x=2 befindet sich im vorgegebenen Bereich [-2; 4]. Es gilt weiter: d''(u) = -6x und damit: d''(2) = -12 < 0, so dass bei x = 2 in der Tat ein Maximum vorliegt. Der Abstand berechnet sich als: d(2) = -8 + 24 + 16 = 32. Die Randextrema bei x=-2 und x=4 haben jeweils den Abstand d(-2) = d(4) = 0, so dass d(2) = 32 global ist.



b) Zur Funktion $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^3$ und zum Punkt P(1|2) hat die Abstandsfunktion

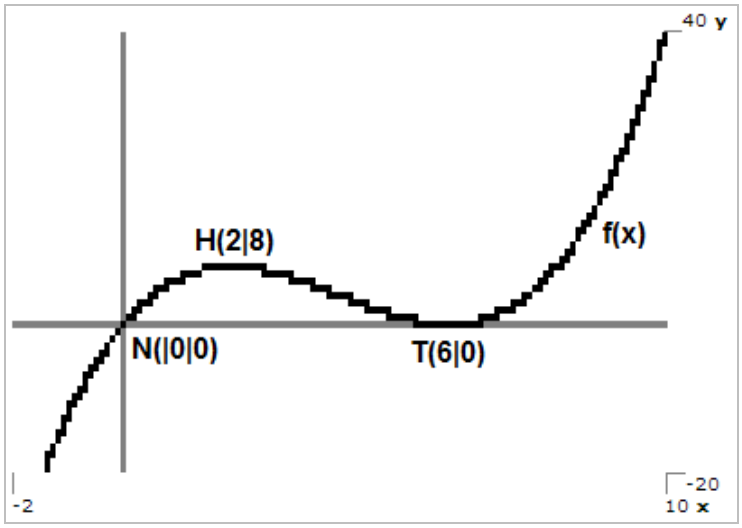
$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2+(f(x)-2)^2}$$

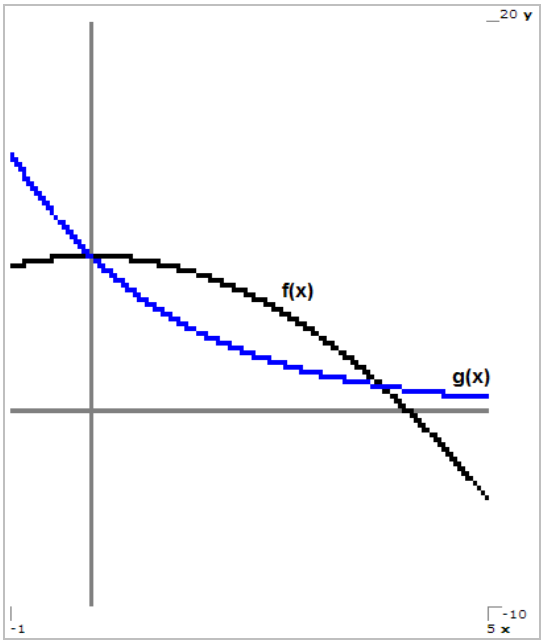
ihr Minimum an der Stelle x_{min} = 1,6 mit minimalen Abstand d(1,6) = 0,7685. Der Funktionspunkt Q lautet: Q(1,6|1,536). Somit ist der Abstand zwischen den Punkten: d(P,Q) = 0,7685.

Aufgabenblatt: Extremwertaufgaben

1. Ein rechtwinkliges Dreieck maximaler Fläche soll zwischen x-Achse und Funktion $f(x) = 4x - x^2$ so einbeschrieben werden, dass eine Ecke des Dreiecks sich im O-Punkt befindet und der rechte Winkel an der x-Achse anliegt. Wie groß ist die maximale Fläche?

2. Die aus dem Graphen links unterhalb zu bestimmende Parabel 3. Grades, benannt als f(x), wird zusammen mit der x-Achse von der Senkrechten x = u, 0≤u≤4, in den Punkten P(u|0) und Q(u|f(u)) geschnitten. Die Punkte bilden zusammen mit dem Ursprung O(0|0) des Koordinatensystems ein Dreieck, dessen maximaler Flächeninhalt bestimmt werden soll.





3. Bestimme die maximale Differenz zwischen den Funktionen $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$ und $g(x) = 8e^{-0,5x}$ im 1. Quadranten des Koordinatensystems (siehe rechts oben).

4. Die Schnittpunkte der Funktion $f(x) = x + \sin x$ und der ersten Winkelhalbierenden mit der Senkrechten x = u, 0≤u≤π, bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung ein Dreieck. Bestimme die Ecken des Dreiecks mit maximalem Flächeninhalt.

5. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} + 2\sin x$ soll auf dem Intervall [-π/2; π/2] durch eine ganz rationale Funktion 3. Grades p(x) angenähert werden, wobei die Extremstellen von f(x) auch die von p(x) sein und die Funktionen einen gemeinsamen Schnittpunkt mit der y-Achse haben sollen. Auf dem Intervall gilt dann: f(x) ≈ p(x). Wie groß ist die betragsmäßig maximale Abweichung zwischen den beiden Funktionen auf dem Intervall?

6. Für welchen Punkt Q auf der Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$ ist der Abstand zum Punkt P(2|3) minimal?

Lösungen: 1. x = u -> A(u) = u(4u-u^2)/2 -> Maximum bei u = 8/3, A(8/3) = 0,375
2. f(x) = x(x-6)^2/4, x = u -> A(u) = uf(u)/2 -> Maximum bei u = 3, A(3) = 10,13, A(0) = 0, A(4) = 8
3. Schnittstellen x_1=0, x_2=3,67 -> d(x) = |f(x)–g(x)|, 0≤x≤4 -> x=1,71 mit d(1,71)=3,14 als globales Maximum
6. Funktionspunkt Q(2,5|3,125), d_{min} = 0,5154

Datenblatt: Integrale, Aufleitungen, Flächen

Für eine integrierbare Funktion f: D_f -> **R** ist $F(x)=\int f(x)dx+C$ eine Stammfunktion (unbestimmtes Integral) mit F'(x) = f(x) und Integrationskonstante C. Die Ermittlung der Stammfunktionen F(x) erfolgt über die Aufleitungs- oder Integrationsregeln (für Funktionen u(x), v(x) und reelle Zahl k):

$$\int (u(x)+v(x))dx=\int u(x)dx+\int v(x)dx \quad \text{(Summenregel)}$$

$$\int (ku(x))dx=k\int u(x)dx \quad \text{(konstanter Faktor)}$$

Daneben gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$F(x)=\int f(x)dx+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$

d.h.: für eine Funktion f(x) erlangt man durch Integrieren eine Stammfunktion F(x), die abgeleitet wieder f(x) ergibt.

Für spezielle Funktionen (mit reellen a, b, n, r) stellen sich die Integrationsregeln wie folgt dar:

$$\int dx=\int 1dx=x\,,\ \int rdx=rx\,,\ \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\,,\ \int \frac{1}{x}dx=\ln|x|$$

$$\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}\,,\ \int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

(Potenzregel, n ≠ -1)

$$\int \sin x dx=-\cos x\,,\ \int \cos x dx=\sin x\,,$$

$$\int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)\,,\ \int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

(trigonometrische Funktionen)

$$\int e^x dx=e^x\,,\ \int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b} \quad \text{(natürliche Exponentialfunktionen)}$$

Es gilt damit für verkettete Funktionen (innere Funktion: y = ax+b, äußere Funktion: $(.)^n$, sin(.), cos(.), $e^{(.)}$) die Umkehrung der Kettenregel für Ableitungen (beim Aufleiten also: aufgeleitete äußere Funktion : innere Ableitung).

Ist F(x) eine Stammfunktion zu f(x), so ergibt sich als bestimmtes Integral mit den Integrationsgrenzen a,bε**R**:

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

gemäß:

Vorgehensweise
Bestimmung einer Stammfunktiion F(x) zu f(x)
Einsetzen der oberen und der unteren Grenze in die Stammfunktion
Stammfunktionswert der oberen Grenze minus Stammfunktionswert der unteren Grenze bilden

Bestimmtes Integral

Hinsichtlich der bestimmten Integrale und der Integrationsgrenzen gilt noch (für reelle a, b, c):

$$\int_a^a f(x)dx=0\,,\ \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\,,\ \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

sowie weiter: $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Unter bestimmten Voraussetzungen ist das bestimmte Integral der Wert einer <u>Fläche</u>, wobei für Flächen zwischen Funktion f(x) und x-Achse über die Funktion f(x) integriert wird, für Flächen zwischen Funktion f(x) und g(x) über die Differenzfunktion f(x) – g(x). Dabei gilt:

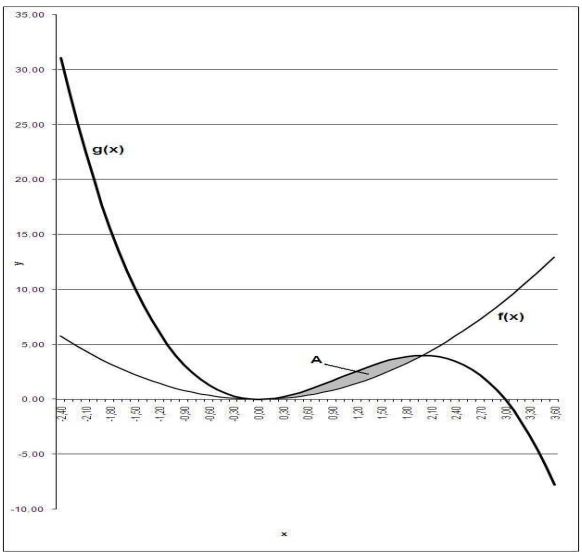
Vorgehensweise
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_{21}}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_2}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Fläche zwischen Funktion und x.-Achse

bzw.:

Vorgehensweise
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_{21}}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_2}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Fläche zwischen zwei Funktionen



<u>Beispiele</u> (Flächen):

1. Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ und der x-Achse im Intervall [2; 5] ist zu bestimmen.

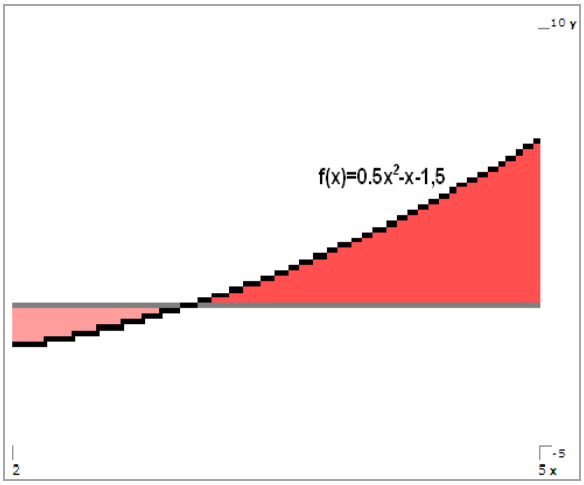
<u>Lösung</u>: I. <u>Nullstellen</u>: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow [x = -1] \vee x = 3$ als Nullstellen,

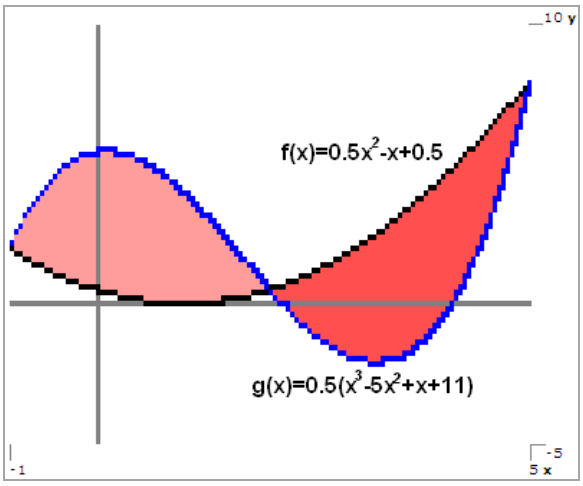
wobei x = -1 außerhalb des zu betrachtenden Intervalls [2; 5] liegt. II. Stammfunktion: Aus $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ ergibt sich als eine Stammfunktion: $F(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$. III. Fläche: Die zwei Teilflächen sind:

$$A_1=\left|\int_2^3(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})dx\right|=\left|\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_2^3\right|=\left|\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{4}{3}-2-3\right)\right|=\left|-\frac{5}{6}\right|=\frac{5}{6};$$

$$A_2=\left|\int_3^5(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})dx\right|=\left|\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_3^5\right|=\left|\left(\frac{125}{6}-\frac{25}{2}-\frac{15}{2}\right)-\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)\right|=\left|\frac{32}{6}\right|=\frac{32}{6}.$$

Die Gesamtfläche A ist: $A=A_1+A_2=\frac{5}{6}+\frac{32}{6}=\frac{37}{6}$.





2. Die Fläche zwischen den beiden Funktionen $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ und $g(x)=\frac{1}{2}(x^3-5x^2+x+11)$ ist zu bestimmen.

Lösung: I. Schnittpunkte: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^3-5x^2+x+11$
$\Leftrightarrow x^3-6x^2+3x+10=0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)(x-5)=0\Leftrightarrow\ x=-1\vee x=2\vee x=5$ und damit die Schnittpunkte: x_1=-1, x_2=2, x_3=5. II. Stammfunktion: $\int(f(x)-g(x))dx=\frac{1}{2}\int\left[(x^2-2x+1)-(x^3-5x^2+x+11)\right]dx$
$=\frac{1}{2}\int\left[-x^3+6x^2-3x-10\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]$. III. Fläche: Die zwei Teilflächen sind:

$$A_1=\frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{2}(-x^3+6x^2-3x-10)dx\right|=\frac{1}{2}\left|\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]_{-1}^{2}\right|=\left|\frac{1}{2}(-4+16-6-10)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-2-\frac{3}{2}+10\right)\right|=\frac{81}{8},$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left|\int_2^5(-x^3+6x^2-3x-10)dx\right|=\frac{1}{2}\left|\left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{3}{2}x^2-10x\right]_2^5\right|=\frac{81}{8}.$$

Die Gesamtfläche A ist: $A=A_1+A_2=\frac{81}{4}$.

3. Die Fläche zwischen der Funktion $f(x)=e^{-x}$ und der x-Achse auf dem Intervall [0; ln2] ist zu berechnen.

Lösung: f(x) liegt oberhalb der x-Achse, daher gilt: $A=\left|\int_0^{\ln 2}e^{-x}dx\right|=\int_0^{\ln 2}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=-e^{-\ln 2}-(-e^0)=$
$=\left(-e^{\ln\frac{1}{2}}\right)-(-1)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

Aufgabenblatt: Integrale, Aufleitungen, Flächen

1. Bilde eine Stammfunktion F(x) zu den nachstehenden Funktionen f(x):

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{11}{5}$

b) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x + 1$

c) $f(x) = \frac{2}{5}x^2(x+12)$

d) $f(x) = 8x^2 + 2x - 17 + \cos 4x$

e) $f(x) = \frac{3}{4}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 2x$

f) $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{4}x) + 2$

g) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{3}e^x$

h) $f(x) = 10 - 2e^{-2x}$

i) $f(x) = 3e^{-4x} + 4e^{3x}$

j) $f(x) = 3 + \frac{1}{5}e^{-0,5x}$

k) $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-0,2x+3}$

2. Berechne die bestimmten Integrale!

a) $\int_1^4 (5x-3)dx$

b) $\int_{-1}^3 (8x^2 - 4x)dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \sin x)dx$

d) $\int_0^{\pi} (2\cos 3x - 3\sin 2x)dx$

e) $\int_0^1 (4 + e^{2x})dx$

f) $\int_{-2}^1 (\frac{1}{2}x + 1 + 4e^{-0,5x})dx$

3. Berechne die Fläche zwischen Funktion und x-Achse!

a) $f(x) = 2x^2 - x^3$, Nullstellen

b) $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$, Nullstellen

c) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$, Nullstellen

d) $f(x) = 1 + \sin(x)$, $-\pi/2 \le x \le 3\pi/2$

e) $f(x) = x + 2\cos(\frac{x}{2})$, $0 \le x \le 2\pi$

f) $f(x) = 8 - 2 \cdot e^{-0,2x}$, -5·ln4 ≤ x ≤0

g) $f(x) = -2x - 1 + e^{0,5x}$, Nullstellen

4. Berechne die Fläche zwischen zwei Funktionen!

a) $f(x) = x^2 - 8$, $g(x) = 2x + 7$

b) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 4$

c) $f(x) = 2x + \sin(x)$, $g(x) = 2x$, 0≤x≤π

d) $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = 10e^x - 16$

5.a) Berechne die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^3 - 8$ und der Tangente an der Funktion in x_0 = -1.

b) Berechne die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ und der Normalen im Wendepunkt.

c) Berechne die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ und der Tangente im Hochpunkt.

6. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden Flächenstücke zueinander, die der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x(x-1)(x+6)$ jeweils mit der x-Achse einschließt?

7. Wie groß ist der exakte Inhalt der Fläche, die von den Funktionen $f(x) = \cos(2x)$ und $g(x) = \sin(2x)$ und der y-Achse eingeschlossen wird?

8. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die von den Funktionen $f(x) = e^{-2x}$ und $g(x) = \frac{1}{2} + \cos x$ und der y-Achse im 2. Quadranten des Koordinatensystems eingeschlossen wird?

9.a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + 2x$. Die Senkrechte x = u, u > 0, begrenze die Fläche zwischen Funktion und x-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems. Wie muss u gewählt werden, damit die Fläche den Flächeninhalt 3 hat?

b) Die Funktion $f(x) = 4x^2 - x^3$ begrenzt zusammen mit der x-Achse eine Fläche. Die Senkrechte x = u, 0 < u < 4, unterteilt diese Fläche in zwei Teilflächen. Wie muss u gewählt werden, damit beide Teilflächen denselben Flächeninhalt haben? Wie muss u gewählt werden, damit die Flächeninhalte der linken und rechten Teilfläche im Verhältnis 3:1 stehen?

<u>Lösungen</u>: 1. F(x) = / 1a) $-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{5}x$ / 1b) $\frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^2 + x$ / 1c) $\frac{1}{10}x^4 + \frac{8}{5}x^3$ /
1d) $\frac{8}{3}x^3 + x^2 - 17x + \frac{1}{4}\sin 4x$ / 1e) $\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{4}\cos 2x$ / 1f) $-\frac{12}{\pi}\cos(\frac{\pi}{4}x) + 2x$ / 1g) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}e^x$ /
1h) $10x + e^{-2x}$ / 1i) $-\frac{3}{4}e^{-4x} + \frac{4}{3}e^{3x}$ / 1j) $3x - \frac{2}{5}e^{-0,5x}$ / 1k) $\frac{20}{3}e^{-0,2x+3}$
2a) 28,5 / 2b) 58 2/3 / 2c) 20,67 / 2d) 0 / 2e) 7,1945 / 2f) 19,144
3a) Nullstellen x_1=0, x_2=2 -> A = 4/3 / 3b) Nullstellen x_1=-1, x_2=2, x_3=4 -> A_1 = 15,75, A_2 = 16/3 -> A = 253/12
3c) Nullstellen x_1=-3, x_2=-2, x_3=2, x_4=3 -> A = 95,75 / 3d) A = 2π / 3e) A = 19,73 / 3f) A = 25,45 / 3g) Nullstellen x_1=0, x_2=4,67 -> A = 7,82
4a) a=-3, b=5 -> A = 85,33 / 4b) a=-1, b=2 -> A = 92 / 4c) a=0, b=π -> A = 2 / 4d) a=0,69, b=2,08 -> A = 7,82
8. Grenzen: a = -0,2, b = 0 -> A = 0,0528
9a) u = √2 / 9b) Gesamtfläche: A = 64/3, A_1 = 32/3 -> u = 2,4571, A_2 = 16 -> u = 3,0279

Datenblatt: Grafisches Auf- und Ableiten

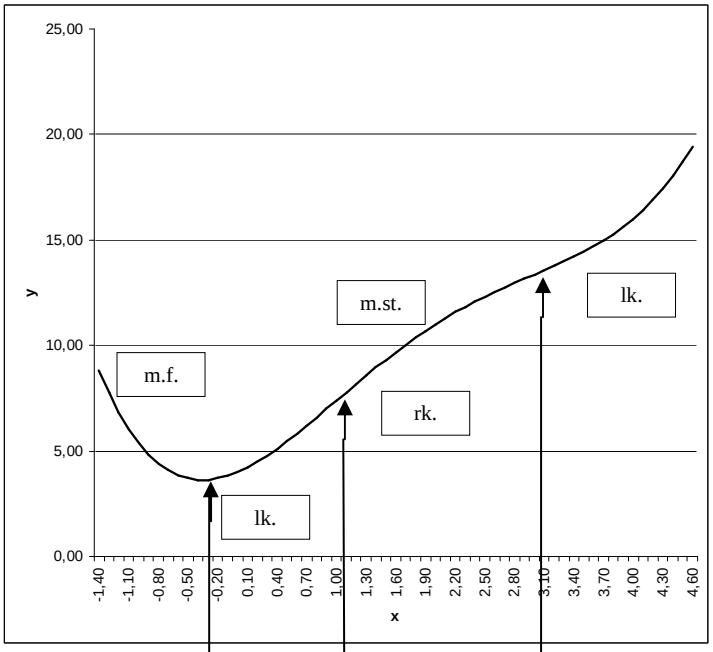
Bzgl. der Null-, Extrem- und Wendestellen sowie der Monotonie und Krümmung ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Funktionen f(x), Ableitungen f'(x), f''(x) und Stammfunktionen F(x) und bei asymptotischem Verhalten:

Stammfkt. F(x)	**Funktion f(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x
x -> ±∞: F(x) -> ax + C	x -> ±∞: f(x) -> a
x -> ±∞: F(x) -> C	x -> ±∞: f(x) -> 0

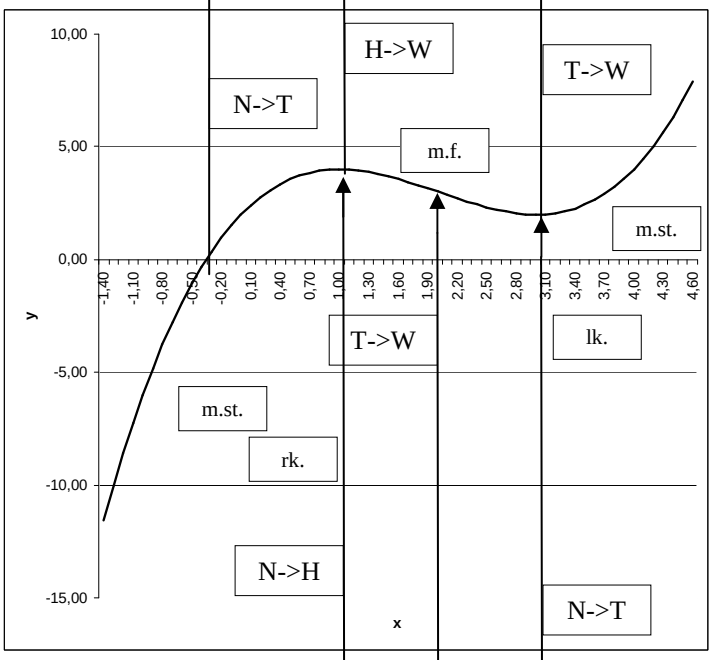
Funktion f(x)	**Ableitung f'(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f'(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f'(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x, [$f''(x) \geq 0$]
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x, [$f''(x) \leq 0$]
x -> ±∞: f(x) -> ax + C	x -> ±∞: f'(x) -> a
x -> ±∞: f(x) -> C	x -> ±∞: f'(x) -> 0

$$\begin{array}{ccccc} Wendestelle & \xrightarrow{'} & Extremstelle & \xrightarrow{'} & Nullstelle \\ \int & & \int & & \\ Nullstelle & \longrightarrow & Extremstelle & \longrightarrow & Wendestelle \end{array}$$

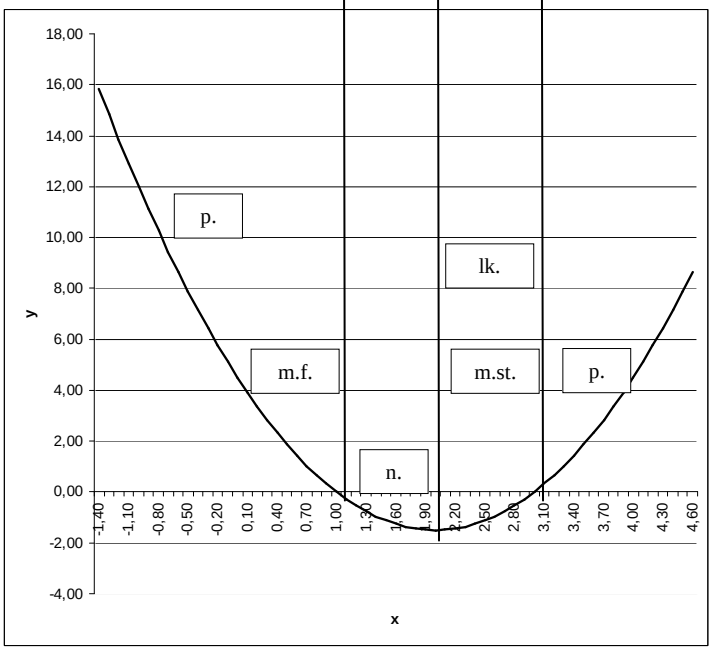
H = Hochpunkt, lk. = links gekrümmt, m.f. = monoton fallend, m.st. = monoton steigend, N = Nullstelle, n. = kleiner gleich 0, p. = größer gleich 0, rk. = rechtsgekrümmt, T = Tiefpunkt, VZW = Vorzeichenwechsel, W = Wendepunkt



F



f



f'

Datenblatt: Punkte und Vektoren

Punkte A(a_1|a_2|a_3) lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum $\mathbf{R}^3$ identifizieren mit Ortsvektoren: $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (mit: O(0|0|0) als Koordinatenursprung). Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor, der Vektor $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ Gegenvektor. Die Länge (Betrag) eines Vektors ist: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Der normierte oder Einheitsvektor ist: $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit: $\left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1$. Differenzvektoren zwischen zwei Punkten A und B(b_1|b_2|b_3) errechnen sich als: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$. Gemäß den Vektorraumgesetzen der Vektoraddition und Vektormultiplikation mit einem Skalar (reelle Zahl) können weiter Linearkombinationen von Vektoren gebildet werden: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$, $r\,\vec{a} = r\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$. Die Mitte M zwischen zwei Punkten A und B bestimmt sich als Linearkombination: $\vec{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1)/2 \\ (a_2 + b_{12}/2 \\ (a_3 + b_3)/2 \end{pmatrix}$, M$\left(\frac{a_1 + b_1}{2} \,|\, \frac{a_2 + b_2}{2} \,|\, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$.

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Skalarprodukt die reelle Zahl:

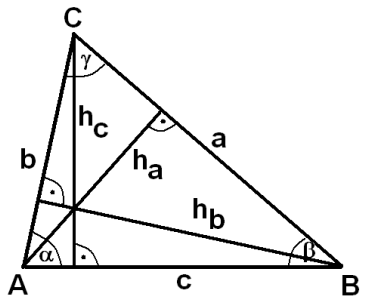
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

mit dem Winkel φ als eingeschlossenen Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Datenblatt: Vektoren und Geometrie

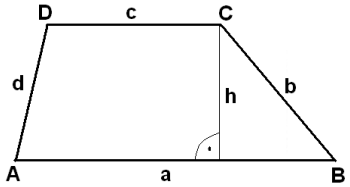
Im dreidimensionalen reellen Vektorraum $\mathbf{R}^3$ sind <u>ebene Figuren</u> durch Ecken (Ortsvektoren) A, B, C, … definierte geometrische Gebilde, die in einer Ebene liegen. Im Einzelnen folgt:

<u>Dreiecke</u> ABC besitzen die Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$; die Winkel an den Ecken A, B, C heißen α, β, γ. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{AB} \neq k\,\vec{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{BC} \neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
$c = \lvert\vec{AB}\rvert$, $b = \lvert\vec{AC}\rvert$, $a = \lvert\vec{BC}\rvert$ (Seiten), $u = \lvert\vec{AB}\rvert + \lvert\vec{AC}\rvert + \lvert\vec{BC}\rvert$ (Umfang)	
$\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{AC}\rvert$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{BC}\rvert$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\lvert\vec{BC}\rvert = \lvert\vec{AC}\rvert$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
$\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\lvert\vec{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{AC}\rvert}$, $\cos\beta = -\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\lvert\vec{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{BC}\rvert}$, $\cos\gamma = \dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{BC}}{\lvert\vec{AC}\rvert\cdot\lvert\vec{BC}\rvert}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC}\cdot\vec{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
$A = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$ (Fläche)	

Dreiecke

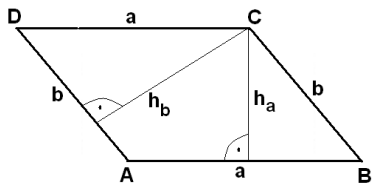
<u>Trapeze</u> ABCD besitzen die Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$; die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = k\,\vec{CD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$) $\vec{BC} = k\,\vec{AD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{BC} \parallel \vec{AD}$)	
$a = \lvert\vec{AB}\rvert$, $b = \lvert\vec{BC}\rvert$, $c = \lvert\vec{CD}\rvert$, $d = \lvert\vec{AD}\rvert$ (Seiten), $u = \lvert\vec{AB}\rvert + \lvert\vec{BC}\rvert + \lvert\vec{CD}\rvert + \lvert\vec{AD}\rvert$ (Umfang)	
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, $\lvert\vec{BC}\rvert = \lvert\vec{AD}\rvert$ => Trapez gleichschenklig $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$, $\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{CD}\rvert$ => Trapez gleichschenklig	

$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\,\vec{AD}}{\lvert\vec{AB}\rvert \cdot \lvert\vec{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\,\vec{BC}}{\lvert\vec{AB}\rvert \cdot \lvert\vec{BC}\rvert}$, $\cos\gamma = -\frac{\vec{BC}\,\vec{CD}}{\lvert\vec{BC}\rvert \cdot \lvert\vec{CD}\rvert}$, $\cos\delta = \frac{\vec{AD}\,\vec{CD}}{\lvert\vec{AD}\rvert \cdot \lvert\vec{CD}\rvert}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360°
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ => $A = \frac{a+c}{2}h$ (Fläche) $\vec{BC} \parallel \vec{AD}$ => $A = \frac{b+d}{2}h$ (Fläche)	

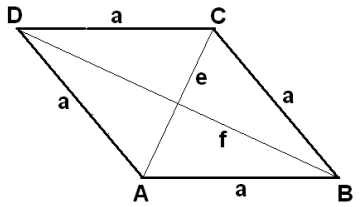
Trapeze

<u>Parallelogramme</u> ABCD besitzen die Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$; die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$ => Parallelogramm $\vec{BC} = \vec{AD}$ => Parallelogramm	
$a = \lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{CD}\rvert$, $b = \lvert\vec{BC}\rvert = \lvert\vec{AD}\rvert$ (Seiten), $u = 2\lvert\vec{AB}\rvert + 2\lvert\vec{BC}\rvert$ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\lvert\vec{AB}\rvert \cdot \lvert\vec{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\lvert\vec{AB}\rvert \cdot \lvert\vec{BC}\rvert}$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
$A = ah_a = bh_b$ (Fläche)	

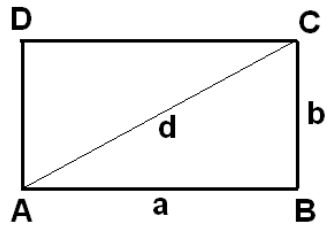
Parallelogramme

<u>Rauten</u> ABCD sind Parallelogramme mit gleich langen Seiten. Die Differenzvektoren sind: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{BC}\rvert$ => Raute $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{BC}\rvert$ => Raute	
$a = \lvert\vec{AB}\rvert = \lvert\vec{BC}\rvert = \lvert\vec{CD}\rvert = \lvert\vec{AD}\rvert$ (Seiten), $u = 4\lvert\vec{AB}\rvert$ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\lvert\vec{AB}\rvert \cdot \lvert\vec{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\lvert\vec{AB}\rvert \cdot \lvert\vec{BC}\rvert}$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
$A = \frac{\lvert\vec{AC}\rvert \cdot \lvert\vec{BD}\rvert}{2}$ (Fläche)	

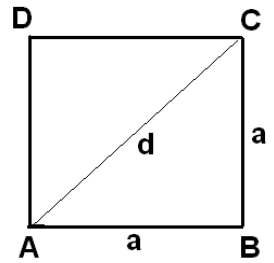
Rauten

Rechtecke ABCD sind rechtwinklige Parallelogramme mit den Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ => Rechteck $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ => Rechteck	
$a = \left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\|$, $b = \left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$ (Seiten), $u = 2\left\|\vec{AB}\right\| + 2\left\|\vec{BC}\right\|$ (Umfang)	
$A = \left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{BC}\right\|$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

Rechtecke

Quadrate ABCD sind rechtwinklige Parallelogramme mit gleich langen Seiten. Die Differenzvektoren sind: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Quadrat $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$, $\left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\|$ => Quadrat	
$a = \left\|\vec{AB}\right\| = \left\|\vec{BC}\right\| = \left\|\vec{CD}\right\| = \left\|\vec{AD}\right\|$ (Seiten), $u = 4\left\|\vec{AB}\right\|$ (Umfang)	
$A = \left\|\vec{AB}\right\|^2$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

Quadrate

Im dreidimensionalen reellen Vektorraum $\mathbf{R}^3$ sind Körper durch Ecken (Ortsvektoren) A, B, C, … definierte geometrische Gebilde, die im Raum liegen. Im Einzelnen folgt:

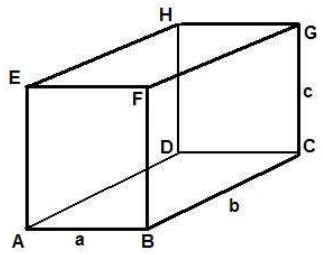
Ein (gerades) Prisma ist ein geometrischer Körper, bei dem eine (n-eckige) Grundfläche parallel zu einer dazu gleichen Deckfläche ist und die Prismenhöhe h als Verbindung zwischen entsprechenden Ecken senkrecht zu Grund- und Deckfläche steht. Wir unterscheiden bei Grundkanten a, b, c, … die Grund- und Deckfläche G, die Mantelfläche M, die Oberfläche O sowie das Volumen V. Dann gelten hinsichtlich der ein Prisma bestimmenden Größen die folgenden Formeln:

Grundfläche, Umfang: Dreieck	$G = \frac{1}{2} g h_g$	$u = a + b + c$
Grundfläche, Umfang: Quadrat	$G = a^2$	$u = 4a$
Grundfläche, Umfang: Rechteck	$G = ab$	$u = 2a + 2b$
Grundfläche, Umfang: Parallelogramm	$G = a h_a = b h_b$	$u = 2a + 2b$
Grundfläche, Umfang: Trapez	$G = \frac{1}{2}(a + c) h_{Tr}$	$u = a + b + c + d$

Mantelfläche	$M = u \cdot h$	$u = \frac{M}{h}$	$h = \frac{M}{u}$
Oberfläche	$O = 2G + M$	$M = O - 2G$	$G = \frac{O - M}{2}$
Volumen	$V = G \cdot h$	$G = \frac{V}{h}$	$h = \frac{V}{G}$

Quader (Würfel) ABCDEFGH mit Rechteck ABCD als Grund-, Rechteck EFGH als Deckfläche und rechten Winkeln. Es gilt:

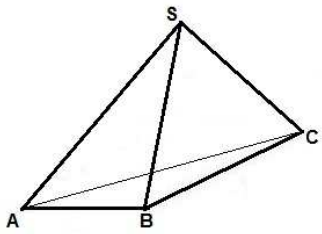
Formeln
$a = \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert$, $b = \left\lvert \overrightarrow{AD} \right\rvert$, $c = \left\lvert \overrightarrow{AE} \right\rvert$ (Kanten); a=b=c (Würfel)
G = ab (Grundfläche, Deckfläche); G = a^2 (Würfel) M = (2a+2b)c (Mantelfläche) O = 2G + M = 2(ab+ac+bc) (Oberfläche); O = $6a^2$ (Würfel)
V = abc (Volumen); V = a^3 (Würfel)



Quader (Würfel)

Dreieckpyramide ABCS mit Grundflächendreieck ABC und Spitze S. Es gilt:

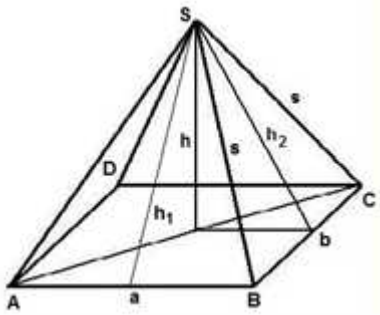
Formeln
$G = \frac{1}{2} gh$ (Grundfläche) $M = \frac{1}{2} g_1 h_1 + \frac{1}{2} g_2 h_2 + \frac{1}{2} g_3 h_3$ (Mantelfläche) O = G + M (Oberfläche)
h (Höhe) V = Gh/3 (Volumen)



Dreieckpyramide

Rechteckpyramide ABCDS mit Grundflächenrechteck ABCD und Spitze S. Es gilt:

Formeln
$a = \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert$, $b = \left\lvert \overrightarrow{AD} \right\rvert$ (Grundkanten) h (Höhe) $h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$, $h_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$ (Seitenhöhen) $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_2^2$ (Seitenkanten)
$G = \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert \cdot \left\lvert \overrightarrow{AD} \right\rvert$ (Grundfläche) $M = ah_1 + bh_2$ (Mantelfläche) O = G + M (Oberfläche)
V = Gh/3 (Volumen)



Rechteckpyramide

Bei a = b ergibt sich eine quadratische Pyramide mit:

$a = \left|\vec{AB}\right|$ (Grundkante), $G = \left|\vec{AB}\right|^2$ (Grundfläche), $h_s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$ (Seitenhöhe), M = 2ah_s (Mantelfläche), O = G + M (Oberfläche), V = Gh/3 (Volumen).

Ein gerader <u>Zylinder</u> mit einem Kreis als Grundfläche ist durch den Radius r des Kreises und durch die Zylinderhöhe h bestimmt, weiter durch die Grundfläche G, die Oberfläche O, die Mantelfläche M und das Volumen V. Es gilt:

d = 2r (Durchmesser), $G = \pi r^2$ (Grundfläche), $M = 2\pi rh$ (Mantelfläche), O = 2G+M (Oberfläche), $V = G \cdot h = \pi r^2 h$ (Volumen)

Aufgabenblatt: Punkte und Vektoren

1. Bestimme den Betrag von folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Wandle die Punkte in Ortsvektoren um und umgekehrt:

a) A(4|-10|23) b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ -4{,}5 \\ 8{,}6 \end{pmatrix}$ d) D(-2|-4|-8) e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -2 \\ -4/11 \end{pmatrix}$

3. Bestimme die Differenzvektoren zwischen den Punkten P und Q:

a) P(2|4|-5), Q(3|1|9) b) P(-4|-10|-15), Q(12|-31|4) c) P(-2,5|4,8|-10,4), Q(8|-2,1|4,4)

4. Berechne das Skalarprodukt:

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} =$ b) $\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} =$ c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$ d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} =$ e) $\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} =$

5. Überprüfe, ob die Vektoren senkrecht aufeinander stehen:

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 6 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 8/5 \\ -5/4 \end{pmatrix}$

6. Bestimme den (spitzen) Winkel zwischen den Vektoren:

a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

7. Bestimme die Seitenlängen, den Umfang, die Fläche und die Winkel im Dreieck ABC. Welche Eigenschaften hat das Dreieck?

a) A(2|-1|0), B(2|2|0), C(2|-1|4) b) A(2|2|-3), B(3|4|-5), C(4|6|-3)
c) A(-2|15|-8), B(6|-6|14), C(5|1|-12)

8. Um welche Art von Viereck ABCD handelt es sich (Trapez, Parallelogramm, Raute, Rechteck, Quadrat)?

a) A(4|-3|8), B(6|-1|8), C(8|-1|-6), D(12|3|-6) b) A(2|2|-10), B(6|0|-2), C(7|4|5), D(3|6|-3)
c) A(6|-2|-2), B(10|0|-8), C(8|0|0), D(4|-2|6) d) A(-1|2|-3), B(1|3|-2), C(3|2|-3), D(1|1|-4)

9. Ergänze den fehlenden Punkt, so dass das Viereck ABCD zu einem Parallelogramm wird:

a) A(-10|-8|-4), B(6|8|5), C(-6|-1|7) b) A(2|0|0), B(0|-4|0), D(0|0|7)
c) B(11|2|3), C(-5|1|2), D(12|-2|-5)

<u>Lösungen</u>: 1. Ansatz: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ -> Betrag: $l = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ / 1a) l=7, 1b) l=15, 1c) l=15, 1d) l=√38, 1e) l=2√10 /

2. Ortsvektor: $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ <-> Punkt: A(a_1|a_2|a_3) / 2a) $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 23 \end{pmatrix}$; 2b) B(-20|9|17); 2c) C(-2,1|-4,5|8,6);

2d) $\vec{OD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$; e) E($\frac{7}{3}$ | -2 | $-\frac{4}{11}$) /

3. Differenzvektor: $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$ / 3a) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix}$; 3b) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 16 \\ -21 \\ 19 \end{pmatrix}$; 3c) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ -6{,}9 \\ -6 \end{pmatrix}$ /

4. Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Skalarprodukt = 4a) -28; 4b) -120; 4c) -1; 4d) 16, 4e) 208 /

5. Senkrechte Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ / 5a) senkrecht; 5b) nicht senkrecht; 5c) senkrecht; 5d) senkrecht; 5e) nicht senkrecht /

6. Winkel: $\cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \Big/ \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$, spitzer Winkel $\cos\varphi = \left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| \Big/ \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$ -> Winkel φ = 6a) 90°, 6b) 109,47°, 6c) 17,43°, 6d) 20,53°, 6e) 73,22° /

7. Seitenlängen a, b, c als Beträge der Differenzvektoren, Umfang u = a+b+c, Winkel als Winkel zwischen den Differenzvektoren, Fläche / 7a) a=5, b=4, c=3, u=12, α=90°, β=53,13°, γ=36,87°, A=6, rechtwinkliges Dreieck; 7b) a=3, b=4,47, c=3, u=10,47, α=41,81°, β=96,38°, γ=41,81°, A=4,47, gleichschenkliges Dreieck; 7c) a=32,72, b=18,57, c=31,45, u=82,79, α=77,14°, β=33,54°, γ=69,31°, A=284,74, spitzwinkliges Dreieck /

8a) $2\vec{AB} = -\vec{CD}$ -> Trapez; 8b) $\vec{AB} = \vec{DC}$ -> Parallelogramm; 8c) $\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ -> Rechteck;

8d) $\vec{AB} = \vec{DC}$, $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{AD}\right|$ -> Raute.

9a) D(-22|-17|-2); 9b) C(-2|-4|7); 9c) A(28|-1|-4).

Datenblatt: Vektoren und Geraden

Linearkombinationen von Vektoren sind <u>Geraden</u> g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$, g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ mit Stützvektoren $\vec{a}$, … und Richtungsvektoren $\vec{u}$, … sowie reellem Parameter t (Parameterform der Geraden).

<u>Spurpunkte</u> sind die Schnittpunkte einer Gerade mit den Grundebenen des Koordinatensystems. Es gibt mindestens einen, höchstens drei Spurpunkte für eine Gerade. Spurpunkte errechnen sich durch Nullsetzen von einer der drei Komponenten x_1, x_2, x_3 der Parameterform der Gerade:

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Geraden**
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ mit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$	$x_1 = 0$ -> $a_1 + tu_1 = 0$ -> $t = t_1 = -a_1/u_1$ -> $S_1(0\|a_2+t_1u_2\|a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene, falls $u_1 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_1=0$) $x_2 = 0$ -> $a_2 + tu_2 = 0$ -> $t = t_2 = -a_2/u_2$ -> $S_2(a_1+t_2u_1\|0\|a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene, falls $u_2 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_2=0$) $x_3 = 0$ -> $a_3 + tu_3 = 0$ -> $t = t_3 = -a_3/u_3$ -> $S_3(a_1+t_3u_1\|a_2+t_3u_2\|0)$ (Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene, falls $u_3 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_3=0$)
	$u_1 = 0$ -> g || x_2-x_3-Ebene $u_2 = 0$ -> g || x_1-x_3-Ebene $u_3 = 0$ -> g || x_1-x_2-Ebene $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_1-Achse $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_2-Achse $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ -> g || x_3-Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	**Konstruktion**
Punkt A, Richtungsvektor $\vec{u}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u}_1$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) als zu g_1 parallele Gerade durch den Punkt A (g || g_1)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	**Lage**
Punkt P	Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ -> 1 Lösung: $P \varepsilon g$; keine Lösung: $P \notin g$

Lage Punkt – Gerade

Voraussetzung	Lage
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ (PF)	a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a}_1 + s\vec{u}_1 = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ -> unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ -> 1 Lösung: $g_1 \parallel g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief

Lage Gerade – Gerade

PF = Parameterform

Aufgabenblatt: Vektoren und Geraden

1. Stelle die Geradengleichung g aus Punkt und Richtungsvektor auf:

a) P(-2|4|5), $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) P(10|-12|-25), $\vec{r} = \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ -17 \end{pmatrix}$ c) P(-7|-9|-3), $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

2. Bestimme die Gerade g durch die Punkte P und Q:

a) P(0|1|-2), Q(1|-2|-1) b) P(4|1|-3), Q(2|-5|6) c) P(-2|0|8), Q(0|4|-6)

3. Punktprobe: Welcher Punkt liegt auf welcher Geraden?

Punkte:

A(2|-5|0), B(12|-11|29), C(7|6|-14), D(-48|50|74), E(-2|-17|24), F(-1|4|-3)

Geraden:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. Konstruiere eine Gerade h, die parallel zur Geraden g liegt und durch den Punkt P geht:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, P(3|7|12) b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, P(-2,5|4,5|-8,5)

5. Lage von Geraden: Bestimme die Spurpunkte der Geraden mit den Grundebenen des Koordinatensystems:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Lage von Geraden: Wie liegen die Geraden g und h zueinander?

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Lage von sich schneidenden Geraden: Berechne Schnittpunkt und Schnittwinkel:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ -30 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ -16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -18 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$

<u>Lösungen</u>: 1. Geradengleichung: $g: \vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{r}$ / 1a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, 1b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ -25 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ -17 \end{pmatrix}$,

1c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ /

2. Geradengleichung: $g: \vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{PQ}$ / 2a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 2b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$,

2c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$ /

3. Vorgehensweise: Punktprobe / A,F∈g, C,D∈k, E∈h /

4a) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, 4b) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 4{,}5 \\ 8{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ /

5a) $S_{23}(0|5|-5)$, $S_{13}(10/3|0|-10/3)$, $S_{12}(10|-10|0)$; 5b) $S_{23}(0|0|5)$, $S_{13}(0|0|5)$, $S_{12}(10|15|0)$; 5c) $S_{23}(0|-5|8{,}5)$, $S_{13}(5|0|6)$, $S_{12}(17|12|0)$ /

6. Vorgehensweise: g∩h, evtl. Überprüfung auf Parallelität / 6a) S(0|0|1) (s=1, t=-1); 6b) g || h; 6c) g, h windschief; 6d) S(15|5|-15) (s = 2, t = -5); 6e) g = h; 6f) S(3|6|0) (s=1, t=0) /

7. Vorgehensweise: g∩h={S}, Schnittwinkel φ / 7a) S(1|-2|3), φ=90°; 7b) S(3|2|-7), φ=78,79°; 7c) S(3|1|2), φ=70,53°; 7d) S(22|17|-16), φ=34,94°.

Aufgabenblatt: Vektorrechnung

1. Die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden ein Dreieck.

a) Bestimme die Ecken des Dreiecks.
b) Bestimme Seitenlängen und Winkel im Dreieck.
c) Ergänze das Dreieck zu einem Parallelogramm.

2. Die Punkte A(4|1|0), B(2|5|0) und C(-2|3|0) bilden ein Dreieck auf der x_1-x_2-Ebene. Zudem sei der Punkt S(1|2|10) gegeben, der mit dem Dreieck eine Dreieckspyramide bildet.

a) Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig und gleichschenklig ist.
b) Zeichne die Pyramide in ein Koordinatensystem.
c) Bestimme die Geraden der Seitenkanten der Pyramide.
d) Wie groß ist der Winkel an der Spitze S im Mantelflächendreieck ABS?
e) Berechne das Volumen der Dreieckspyramide.

3. Vom Punkt S(2|4|8) gehen die drei Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus.

a) Berechne die Punkte A, B, C, in denen die Geraden die x_1-x_2-Ebene schneiden.
b) Zeige, dass die Gerade g_1 senkrecht auf der x_1-x_2-Ebene steht.
c) Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
d) Berechne das Volumen der Dreieckspyramide ABCS.

4. Gegeben sind der Punkt P(4|5|11), die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und die Geradenschar h_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2a-2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme a so, dass der Punkt P auf der Geraden h_a liegt.
b) Wie lauten Schnittpunkt und Schnittwinkel zwischen der Gerade g und der Gerade h_1?
c) Zeige, dass die Gerade h senkrecht auf der Geraden g steht.
d) Wie lautet die zur Geraden h_{-1} parallele Gerade k durch den Punkt P?

<u>Lösungen</u>: 1a) Ecken A(2|3|8) (r=2, s=0), B(5|-6|8) (s=-3, t=-2), C(8|6|11) (r=5, t=1), 1b) a=12,73, b=7,35, c=9,49, α=97,42°, β=34,93°, γ=47,65°, 1c) D(5|15|11) /

2a) α=γ=45°, β=90°, 2c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$, $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$, 2d) Richtungsvektoren $\vec{AS}$, $\vec{BS}$ -> φ=24,62°, 2e) G=10, h=10, V=100/3 /

3a) A(2|4|0), B(2|-12|0), C(18|4|0); 3b) Richtungsvektor von g_1 zeigt nach oben; 3c) α=90°, 3d) G=128, h=8, V = 341 1/3 /

4a) a=4 (t=2) -> h_4; 4b) S(2|-3|-1), φ=76,37°, 4c) a=5/4 -> S(2|-3|-1), φ=90°, 4d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Tabellen der Form $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ heißen nxm-Matrizen mit n Zeilen und m Spalten, die die reelle Matrixelemente a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, enthalten, n-zeilige Matrizen mit einer Spalte heißen Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix}$. Die Matrix $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ ist die Nullmatrix, die nxn-Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix.

Eine Matrix wird mit einer reellen Zahl r multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit r multipliziert (Skalarmultiplikation). Matrizen mit gleicher Anzahl von Zeilen und Spalten können addiert werden (Matrixaddition), indem die entsprechenden Matrixelemente addiert werden. Zwei Matrizen können miteinander multipliziert werden, wenn die Anzahl der Spalten der linken Matrix A mit der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix B übereinstimmt (Matrix C = AB); die Matrixelemente einer Zeile der Matrix A werden mit dem jeweiligen Element einer Spalte der Matrix B multipliziert, die Produkte addiert (Matrixmultiplikation).

Matrixgleichungen sind von der Form AX + B = C o.ä. mit der Lösung $X = A^{-1}(C-B)$ o.ä. (A^{-1} als inverse Matrix zu A).

Für eine quadratische nxn-Matrix A und die nxn-Einheitsmatrix (mit 1 in der Hauptdiagonale und 0 außerhalb) heißt A^{-1} die inverse Matrix, wenn gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad (*) .$$

Voraussetzung für die Existenz der inversen Matrix A^{-1} ist dabei, dass A invertierbar ist, dass somit der Rang von A gleich n ist (rgA = n) oder die Determinante von A ungleich 0 ($\det A \neq 0$). (*) lässt sich dann in Beziehung setzen zum Gleichungssystem

$$A \cdot X = E \quad (**) .$$

(**) besitzt die Lösung $X = A^{-1}$ und führt zudem auf den von linearen Gleichungssystemen her bekannten Gaußschen Algorithmus, hier in einer allgemeineren Form. Aus dem Anfangstableau

linke Seite | rechte Seite

A | E

entsteht dabei durch die üblichen Gauß-Umformungen (Zeilenadditionen zum Erzeugen von Nullen unterhalb und oberhalb der Hauptdiagonalen der Matrix auf der linken Seite, Zeilendivision zur Erzeugung von Einsen in der Hauptdiagonale) das Endtableau:

E | A^{-1}

mit der Lösung $X = A^{-1}$ auf der rechten Seite.

Produktionsmatrizen treten auf in (industriellen) Produktionsvorgängen, wo von Rohstoffen über Zwischenprodukten Fertigprodukte hergestellt werden. Ist $\vec{r}$ der Vektor von (k) Rohstoffen, $\vec{z}$ der (m) Zwischenprodukte und $\vec{p}$ der (n) Endprodukte. Die Matrix A transformiert dann die Rohstoffe in Zwischenprodukte, die Matrix B die Zwischenprodukte in Endprodukte, die Produktionsmatrix C

die Rohstoffe in Endprodukte. Die Produktionsvorgänge können dann mit Kostenvektoren $\vec{k}_r$, $\vec{k}_z$ und $\vec{k}_p$ bewertet werden, die die Kosten für je eine Einheit Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte angeben. Insgesamt gelten die Matrixgleichungen:

$$C = A \cdot B$$

$$\vec{r} = A \cdot \vec{z}\ ,\ \vec{z} = B \cdot \vec{p}\ ,\ \vec{r} = C \cdot \vec{p}$$

$K_r = \vec{k}_r \cdot \vec{r}$, $K_z = \vec{k}_z \cdot \vec{z}$, $K_p = \vec{k}_p \cdot \vec{p}$ (Kosten)

$K = K_{fix} + K_r + K_z + K_p$ (Gesamtkosten)

$E = \vec{e} \cdot \vec{p}$ (Erlöse)

$G = E - K$ (Gewinn)

wobei C die Produktionsmatrix, K_r, K_z und K_p die Rohstoff-, Zwischen- und Endproduktkosten, K_{fix} die fixen Kosten, K die Gesamtkosten des Produktionsprozesses sind. E ist der Erlös aus dem Verkauf der Endprodukte, wobei $\vec{e}$ der Vektor der Verkaufspreise ist; G ist der Gewinn. Im Fall der Invertierbarkeit der Matrizen A, B und C gilt noch:

$$\vec{z} = A^{-1} \cdot \vec{r}\ ,\ \vec{p} = B^{-1} \cdot \vec{z}\ ,\ \vec{p} = C^{-1} \cdot \vec{r}$$

Ansonsten sind nicht mehr eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Das <u>Leontiefmodell</u> ist ein volkswirtschaftliches Gesamtmodell, das rechnerisch Zusammenhänge zwischen der Produktion und Konsumtion einer Volkswirtschaft darstellt.

I. Dazu ist zu volkwirtschaftlichen Sektoren Z_1, … Z_n eine Input-Output-Tabelle (Verflechtungstabelle) gegeben, die die Produktionsströme (Liefer- bzw. Verbrauchsmengen) zwischen den Sektoren angibt. Die n x n-Matrix der <u>Input-Output-Tabelle</u> wird dabei durch den Konsum-/ Nachfragevektor (K) und den Produktionsvektor (P) ergänzt. Insgesamt ergibt sich als <u>Verflechtungstabelle</u> X:

	Z_1	Z_2	Z_3	…	Z_n	K	P
Z_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	y_1	x_1
Z_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	y_2	x_2
Z_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	y_3	x_3
…	…	…	…	…	…	…	…
Z_n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	y_n	x_n

Gemäß den Annahmen des Leontiefmodells gilt dann:

a) $x_{ij} \geq 0$ für alle i, j = 1,… n; $y_i \geq 0$ für alle i = 1,… n
(d.h.: es werden nichtnegative Mengen produziert und konsumiert)

b) $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + y_1 = x_1$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + y_2 = x_2$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + \ldots + y_3 = x_3$
…
(d.h.: die Gesamtproduktion P ist die Summe von Einzelproduktionen und Konsum)

Aus der Verflechtungstabelle X ergibt sich gemäß der Annahme des Leontiefmodells, wonach die

Produktionsmengen im selben Verhältnis zur Gesamtproduktion steigen, die Input- oder Produktionsmatrix (Technologiematrix) A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} & \dots \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} & \dots \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Es gilt also: $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ bzw. $x_{ij} = x_j a_{ij}$ für alle i, j = 1, … n, d.h.: man erhält die Elemente der k. Spalte der Inputmatrix A durch Division mit der Gesamtproduktion der k. Zeile, die Elemente der k. Spalte der Verflechtungstabelle X durch Multiplikation der entsprechenden Elemente der Inputmatrix mit der Gesamtproduktion der k. Zeile. Weiter gilt: $0 \le a_{ij} \le 1$ für alle i, j = 1, … n.

III. Gemäß den Vorgaben der Inputmatrix A, des Produktionsvektors $\vec{x}$ und des Konsumvektors $\vec{y}$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

gilt der folgende Zusammenhang:

$$\boxed{A\vec{x} + \vec{y} = \vec{x}}$$

, was wir umformen können zu:

$$\boxed{(E - A)\,\vec{x} = \vec{y} \text{ bzw. } (E - A)^{-1}\,\vec{y} = \vec{x}}$$

(mit E als Einheitsmatrix). E–A ist die Leontiefmatrix, für die im Fall der Existenz der Leontiefinversen $(E–A)^{-1}$ gilt:

a) $[(E–A)^{-1}]^{-1} = E–A$
b) $A = E – (E–A)$
c) Bei $(E–A)^{-1} \ge O$ (mit O als Nullmatrix) kann jede beliebige Nachfrage befriedigt werden.

Insgesamt ergibt sich bzgl. des Leontiefmodells also das folgende, die rechnerischen Zusammenhänge zusammenfassende Schema:

Input-Output-Tabelle (Verflechtungstabelle) X, Produktionsvektor $\vec{x}$, Konsumvektor $\vec{y}$:

$$X = \left(\begin{array}{cccc|c|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & y_1 & x_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & y_2 & x_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & y_3 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right), \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \ \Updownarrow \ x_{ij} = x_j a_{ij}$$

Inputmatrix (Produktionsmatrix, Technologiematrix) A:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} & \dots \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} & \dots \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Leontief-Gleichungen mit Leontiefmatrix E–A und Leontiefinversen $(E-A)^{-1}$:

$$A\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}\,,\ (E-A)\vec{x}=\vec{y}\,,\ (E-A)^{-1}\vec{y}=\vec{x}$$

<u>Beispiel</u> (Produktionsmatrizen):

Für zwei Rohstoffe R, drei Zwischenprodukte Z und zwei Endprodukte E gelten die Produktionsbeziehungen:

A	Z1	Z2	Z3
R1	1	2	0
R2	1	1	1

B	E1	E2
Z1	1	0
Z2	1	1
Z3	2	1

a) Produziert werden sollen die Endprodukte E1 und E2 in den Mengen 200 bzw. 250. An Zwischenprodukten werden dafür benötigt: $\vec{z}=B\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\250\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\450\\650\end{pmatrix}$ und damit die Mengen: Z1: 200, Z2: 450, Z3: 650. An Rohstoffen werden benötigt: $\vec{r}=A\cdot\vec{z}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\450\\650\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1100\\1300\end{pmatrix}$ und damit die Mengen: R1: 1100, R2: 1300.

b) Im Fall der Produktion von 300 Einheiten E1 und 500 Einheiten E2 werden an Rohstoffen benötigt vermöge der Matrix: $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\11\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\4&2\end{pmatrix}$: $\vec{r}=C\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix}3&2\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300\\500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1900\\2200\end{pmatrix}$ und damit an Mengen: R1: 1900, R2: 2200.

c) An Rohstoffen sind folgende Mengen vorhanden: R1: 260, R2: 300. Dann können an Endprodukten hergestellt werden: $\vec{p}=C^{-1}\cdot\vec{r}=\begin{pmatrix}3&2\\4&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}260\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&\frac{-3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}260\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\70\end{pmatrix}$, also: E1: 40, E2: 70.

d) Im Fall der Produktion von 200 Einheiten E1 und 250 Einheiten E2 (siehe a)) entstehen für die Rohstoffe R1: 1100 und R2: 1300 an Kosten: $K_r=\vec{k}_r\cdot\vec{r}=\begin{pmatrix}3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1100\\1300\end{pmatrix}=3300+3900=7200$, wenn R1 pro Mengeneinheit € 3,-, R2 pro Mengeneinheit € 2,- kostet. Bei Mengeneinheitskosten von € 1,- für Z1, € 2,- für Z2 und € 3,- für Z3 entstehen an Kosten für die Zwischenprodukte mit den Mengen Z1: 200, Z2: 450, Z3: 650: $K_z=\vec{k}_z\cdot\vec{z}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\450\\650\end{pmatrix}=200+900+1950=2650$. Bei Mengeneinheitskosten von € 10,- für E1 und

€ 15,- für E2 entstehen an Kosten: $K_p = \vec{k}_p \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix} = 2000 + 3750 = 5750$ für die Endprodukte z.B. bei Verpackung und Transport. Fixe Kosten K_{fix} sollen € 3000,- betragen, so dass sich als Gesamtkosten ergeben: $K = K_{fix} + K_r + K_z + K_p = 3000 + 7200 + 2650 + 5750 = 18600$,- €.

<u>Beispiel</u> (Leontiefmodell):

Die zwei Sektoren Z_1 (Industrie, Landwirtschaft) und Z_2 (Dienstleistung) innerhalb einer Volkswirtschaft sind mit dem Konsum (K) und mit der Gesamtproduktion (P) über die folgende Verflechtungstabelle für eine Zeitperiode (hier: ein Jahrzehnt) verbunden:

	Z_1	Z_2	K	P
Z_1	x_{11}	4	10	20
Z_2	2	1	7	x_2

(

	Z_1	Z_2	K	P
Z_1	x_{11}	x_{12}	y_1	x_1
Z_2	x_{21}	x_{22}	y_2	x_2

)

Die fehlenden Größen in der Verflechtungstabelle ergeben sich als: $x_{11} = 20–10–4 = 6$, $x_2 = 2+1+7 = 10$. Die Verflechtungstabelle lautet vollständig:

	Z_1	Z_2	K	P
Z_1	6	4	10	20
Z_2	2	1	7	10

Die Inputmatrix A errechnet sich als:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{20} & \frac{4}{10} \\ \frac{2}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix E–A ist dann:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

In der folgenden Zeitperiode gilt für den Vektor der Gesamtproduktion: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}$. Der Konsumvektor $\vec{y}$ errechnet sich mit Hilfe der Matrix E–A:

$$\vec{y} = (E - A)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}6 \\ 13{,}8 \end{pmatrix}$$

Der vom Sektor Z_2 herrührende Konsum hat sich also fast verdoppelt, der vom Sektor Z_1 bereitgestellte Konsum ist leicht zurückgegangen.

1. Gegeben sind die Rohstoffe R1, R2, R3, die Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 und die Endprodukte E1, E2, E3 und deren Produktionsbeziehungen untereinander:

A	Z1	Z2	Z3
R1	0	1	1
R2	1	2	0
R3	1	0	1

B	E1	E2	E3
Z1	1	1	1
Z2	0	0	1
Z3	1	2	1

a) Wie lautet die Rohstoff-Endprodukt-Matrix?

b) Wie viel Rohstoffe und Zwischenprodukte muss man einsetzen, um die Endproduktmengen E1: 100, E2: 150, E3: 250 herzustellen?

c) Welche Kosten fallen jeweils bei den Endproduktmengen E1: 100, E2: 150, E3: 250 an, wenn folgende Fertigungskosten pro Mengeneinheit anfallen: R1: 1, R2: 2, R3: 4, Z1: 5, Z2: 20, Z3: 20, E1: 10, E2: 20, E3: 5 €.

d) Die Gesamtkosten für die Endproduktmengen E1: 100, E2: 150, E3: 250 errechnen sich aus den Produktionskosten insgesamt und den fixen Kosten in Höhe von € 8000,-. Stelle die Kosten dem Erlös gegenüber, wenn die Verkaufspreise für die Endprodukte E1: 80, E2: 120, E3: 100 € betragen.

e) An Rohstoffen sind im Lager vorhanden: R1: 200, R2: 160, R3: 300. Wie viel Endprodukte E1, E2, E3 können produziert werden, wenn der Lagerbestand voll aufgebraucht wird? Ermittle die Anzahl der anfallenden Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3.

2. Gegeben ist in einer Marktwirtschaft, die sich nach dem Leontief-System verhält, die Verflechtungsmatrix zwischen drei Sektoren A, B, C, den Markt M und Produktion P:

	A	B	C	M	P
A	a	40	40	20	120
B	20	20	c	60	160
C	20	b	20	40	100

a) Vervollständige die Verflechtungsmatrix durch Berechnung von a, b und c.

b) Wie lautet die Inputmatrix?

c) Wie groß ist die Marktabgabe, wenn A 180, B 120 und C 100 Mengeneinheiten produzieren.

<u>Lösungen</u>: 1a) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ als Rohstoff-Zwischenprodukt- und Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix -> C = A·B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ / 1b) R1: 900, R2: 1000, R3: 1150; Z1: 500, Z2: 250, Z3: 650 /

1c) Kosten für 100 E1: 100 Z1, 100 Z3, 100 R1, 100 R2, 200 R3, K_{E1} = 4600; für 150 E2: 150 Z1, 150 Z2, 300 Z3, 450 R1, 450 R2, 450 R3, K_{E2} = 15900; für 250 E3: 250 Z1, 250 Z2, 250 Z3, 500 R1, 750 R2, 500 R3, K_{E3} = 16500 / 1d) K_{ges} = 8000 + 4600 + 15900 + 16500 = 45000, E = 51000, Gewinn: G = E – K = 6000

2a) a=20, b=20, c=60 / 2b) A = $\begin{pmatrix} 1/6 & 1/4 & 2/5 \\ 1/6 & 1/8 & 3/5 \\ 1/6 & 1/8 & 1/5 \end{pmatrix}$ / 2c) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 80 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix}$

Datenblatt: Daten, Diagramme, Statistik

Mit Daten verbunden sind die zahlenmäßige Erfassung von Sachverhalten und Beobachtungen und deren grafische Darstellung. Daten ergeben damit ein mathematisches Modell, das mit Hilfe mathematischer Methoden analysiert und bewertet werden kann. Sind zu bestimmten Datenausprägungen wie Einzelwerten oder Klassen (A, B, C, …) absolute Häufigkeiten (Anzahlen) n_A, n_B, n_C, … gegeben, so lassen sich die Gesamtsumme der absoluten Häufigkeiten $n = n_A + n_B + n_C + \ldots$ und die relativen Häufigkeiten (Prozentzahlen) bestimmen.

Absolute Häufigkeiten lassen sich mit einem Balken- oder Säulendiagramm (auch Stabdiagramm, Histogramm, Häufigkeitspolygon) darstellen. Relative Häufigkeiten (Prozentzahlen) lassen sich mit einem Kreis- oder Streifendiagramm grafisch umsetzen. Beim Kreisdiagramm ergeben sich aus den Prozentzahlen die zu A, B, C, … gehörenden Winkel der entsprechenden Kreisausschnitte vermöge:

$$100\ \% \leftrightarrow 360°,\ 1\% \leftrightarrow 3{,}6°.$$

Beim Streifendiagramm entspricht der Prozentzahl die Breite des Streifenabschnitts in Zentimetern, so dass etwa gilt:

$$100\% \leftrightarrow 10\ \text{cm}.$$

Der Polygonzug verbindet die die Daten repräsentierenden Punkte im x-y-Koordinatensystem.

Eine der Größe nach geordnete Liste von Zahlen (Daten) x_1, x_2, … mit ihren absoluten Häufigkeiten H_1, H_2, … und $H_1+H_2+\ldots = n$ heißt Rangliste, die Zahlen $h_1=H_1/n$, $h_2=H_2/n$, … relative Häufigkeiten mit $h_1+h_2+\ldots = 1$. Dann gilt hinsichtlich Mittelwert und Varianz bzw. Standardabweichung:

$$\bar{x} = x_1h_1+x_2h_2+\ldots \text{ (Mittelwert)}$$
$$s^2 = (x_1-\bar{x})^2h_1+(x_2-\bar{x})^2h_2+\ldots \text{ (Varianz)}$$
$$s = \sqrt{s^2} \text{ (Standardabweichung)}$$

Klassierte Daten ergeben sich, indem man die Daten in Klassen (Intervalle) (gleicher Breite) einteilt. Ein Histogramm veranschaulicht dann die Häufigkeitsverteilung der klassierten Daten.

Klassierte Daten können dann unter gewissen statistischen Voraussetzungen angenähert werden durch eine normalverteilte Zufallsvariable X, deren Ausprägung die Häufigkeitsverteilung ist. Die stetige normalverteilte Zufallsvariable N(μ,σ) besitzt den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ. Der normalverteilten Zufallsvariablen N(0,1) liegen die Gaußsche Glockenkurve:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

als Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

als Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(X \le x)$ zugrunde. Dann gilt: $0<\Phi(x)<1$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Weiter gilt für die normalverteilte Zufallsvariable N(μ,σ):

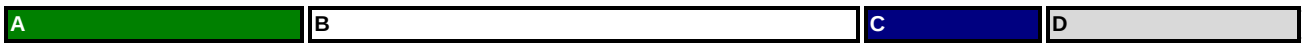
$$p(X \le a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}),\ \ p(X > a) = 1 - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$
$$p(a \le X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Bei Entsprechung von diskreten (klassierten) und stetigen Daten (Normalverteilung) wird von einer Übereinstimmung von Mittelwert und Erwartungswert sowie der Standardabweichungen ausgegangen.

Beispiele (Diagramme):

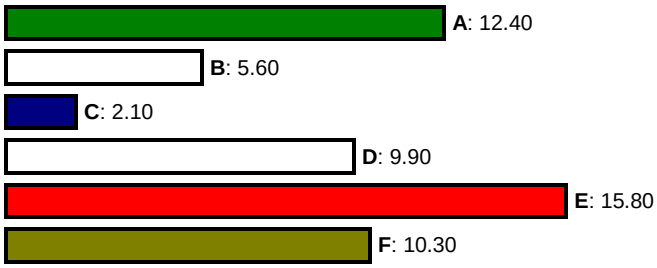
a) Datentabelle und Streifendiagramm:

Merkmal:	Wert:	Prozentsatz:
A	4.50	23.32%
B	8.40	43.52%
C	2.60	13.47%
D	3.80	19.69%



b) Datentabelle und Balkendiagramm:

Merkmal:	Wert:	Prozentsatz:
A	12.40	22.10%
B	5.60	9.98%
C	2.10	3.74%
D	9.90	17.65%
E	15.80	28.16%
F	10.30	18.36%



Beispiele (Statistik):

a) Eine Rangliste von Werten wird wie folgt in Klassen eingeteilt (Klassenbreite: 3) und mit absoluten und relativen Häufigkeiten versehen:

Nr.	Rangliste (Werte x_1, …)	Klasse	Klassen-mitte	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
1	45	43<x≤46	44,5	1	0,017
2	46,1; 46,5; 46,5; 47,2; 48	46<x≤49	47,5	5	0,083
3	49,5; 49,9; 50,1; 51,1; 51,2; 51,8; 52	49<x≤52	50,5	7	0,117
4	52,6; 52,7; 52,8; 53; 54,2; 54,5; 54,6; 54,7; 54,7; 54,8; 55; 55	52<x≤55	53,5	12	0,200
5	55,2; 55,4; 55,6; 55,9; 56; 56; 56,1; 56,4; 56,7; 57; 57,2; 57,3; 57,5; 57,6; 57,9	55<x≤58	56,5	15	0,25
6	58,4; 58,5; 58,5; 58,5; 58,9; 59; 59; 60,2; 60,5	58<x≤61	59,5	9	0,15
7	61,2; 62; 62,5; 62,8; 63; 63,5; 63,5	61<x≤64	62,5	7	0,117
8	65; 65,5; 66	64<x≤67	65,5	3	0,05
9		67<x≤70	68,5	0	0
10	72	70<x≤73	71,5	1	0,017
		Summe		60	1

Mit Hilfe der Klassenmitten lasse sich dann Mittelwert und Standardabweichung berechnen:

$$\bar{x} = 56{,}1$$
$$s^2 = 28{,}34 \Rightarrow s = 5{,}32$$

b) Es sei eine Zufallsvariable gemäß Normalverteilung N(56,1; 5,32) gegeben. Dann gilt für die Verteilungsfunktion $\Phi_{56,1;5,32}$: $\Phi_{56,1;5,32}(56{,}1–5{,}32) = \Phi_{56,1;5,32}(50{,}78) = 0{,}158655$, $\Phi_{56,1;5,32}(56{,}1) = 0{,}5$; $\Phi_{56,1;5,32}(56{,}1+5{,}32) = \Phi_{56,1;5,32}(61{,}42) = 0{,}841345$, weiter: $\Phi_{56,1;5,32}(61{,}42) – \Phi_{56,1;5,32}(50{,}78) = 0{,}841345–0{,}158655 = 0{,}68269$, d.h. rund 68,3% aller Werte finden sich im sog. 1σ-Intervall [50,78;

61,42] usw.

Allgemein gilt für die N(μ,σ)-normalverteilte Zufallsvariable X, als deren Ausprägung z.B. diskrete Daten gelten können:

$$p(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = 68{,}27\% \text{ (1σ-Intervall)}$$
$$p(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = 95{,}45\% \text{ (2σ-Intervall)}$$
$$p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = 99{,}73\% \text{ (3σ-Intervall)}$$

Weiter ist die Wahrscheinlichkeit z.B. für Zahlen aus dem Intervall [52; 64] für die N(56,1; 5,32)-normalverteilte Zufallsvariable X

$$p(52 \le X \le 64) = \Phi_{56,1;5,32}(64) - \Phi_{56,1;5,32}(52) = 0.931223 - 0{,}220449 = 0.710774 = 71{,}08\ \%$$

Berechnen lassen sich die Werte der Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}$ einer N(μ,σ)-normalverteilten Zufallsvariable X auch mit den Werten der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung N(0;1) vermöge:

$$p(52 \le X \le 64) = \Phi\left(\frac{64-56{,}1}{5{,}32}\right) - \Phi\left(\frac{52-56{,}1}{5{,}32}\right) =$$
$$\Phi(1{,}485) - \Phi(-0{,}771) = 0{,}931228 - 0{,}220353 = 0{,}710875 = 71{,}08\ \%$$

1. Gegeben sind die Daten aus der folgenden Rangliste:

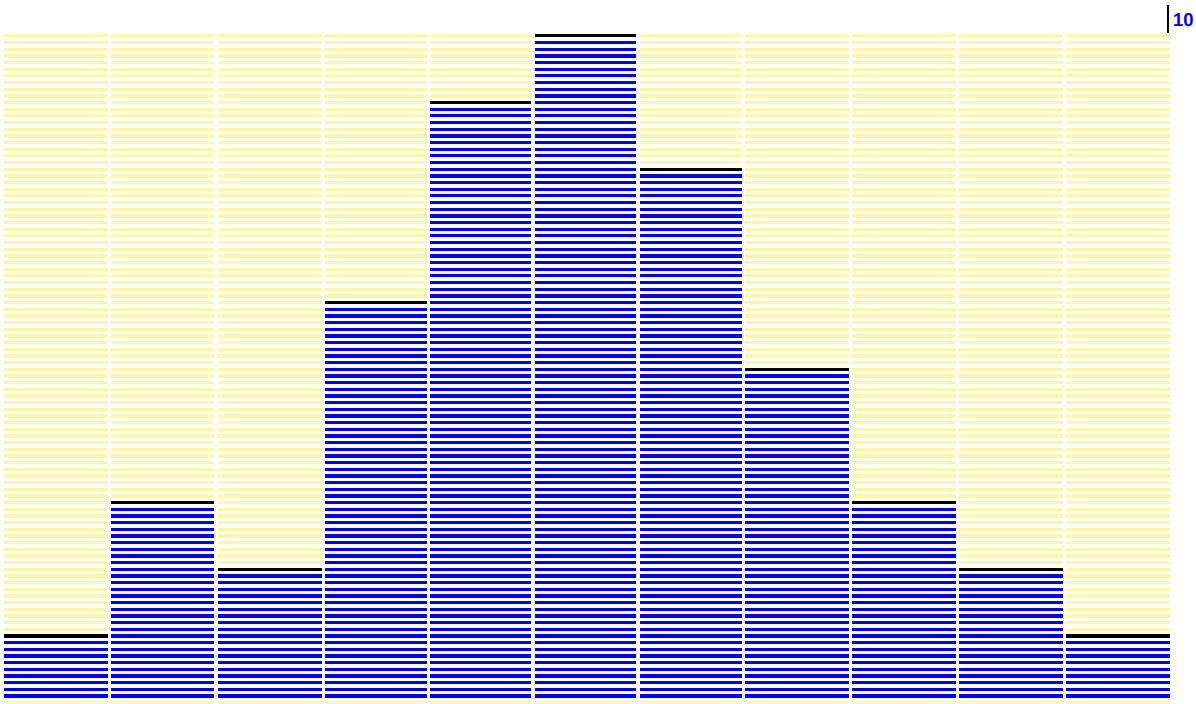
3; 4,4; 5,2; 6; 7; 8; 11; 12; 15,4; 17; 18,1; 19; 20; 21; 22; 24,5; 25,7; 28; 28,5; 29; 31; 31,3; 32; 32,5; 34; 34,8; 35; 35,5; 36; 36,4; 36,8; 37; 37,2; 37,7; 38; 38,2; 38,3; 38,5; 38,8; 39; 39,5; 41; 41,2; 42; 42,5; 43; 44; 44,5; 47; 49,5

a) Bilde Datenklassen der Breite 5, beginnend bei 0. Zeichne ein Histogramm. Berechne Mittelwert und Standardabweichung.
b) Nähere die diskrete Verteilung im Histogramm durch eine geeignete Gaußsche Normalverteilung an. Was sind Erwartungswert und Standardabweichung der normalverteilten Zufallsvariablen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden sich Zahlen im Intervall [20; 40], mit welcher Wahrscheinlichkeit im Intervall [30;50]?

2. Berechne die Wahrscheinlichkeiten unter der Voraussetzung einer Normalverteilung $N(\mu,\sigma)$:

a) $\mu=0$, $\sigma=1$: $p(X\leq 0)$, $p(-1\leq X\leq 1)$, $p(-2\leq X\leq 2)$, $p(X\geq 1)$, $p(0\leq X\leq 5)$
b) $\mu=5$, $\sigma=3$: $p(X\leq 5)$, $p(2\leq X\leq 8)$, $p(X\geq 10)$, $p(0\leq X\leq 12)$
c) $\mu=25$, $\sigma=4$: $p(17\leq X\leq 33)$, $p(13\leq X\leq 37)$, $p(X\geq 20)$, $p(X\leq 30)$, $p(X\leq 45)$

3. Eine Stichprobe von Längenabweichungen beim maschinell durchgeführten Zuschnitt von Holz (in Zehntel Millimeter) verteilt sich wie folgt:



Klasse	(-25; -20]	(-20; -15]	(-15; -10]	(-10; -5]	(-5; 0]	(0; 5]	(5; 10]	(10; 15]	(15; 20]	(20; 25]	(25; 30]
Mitte	-22.5	-17.5	-12.5	-7.5	-2.5	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5
Häufigkeit	1	3	2	6	9	10	8	5	3	2	1

a) Bestimme die relativen Häufigkeiten, den Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung s gemäß dem Histogramm. Muss die Maschine nachjustiert werden?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Abweichung betragsmäßig unter 0,5 mm, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter 1 mm, wenn man den Rechnungen die Normalverteilung $N(\bar{x}, s)$ zugrundelegt? Vergleiche mit den relativen Häufigkeiten des Histogramms.

Lösungen: 1a) $\bar{x} = 29{,}5$, $s = 12{,}41$

3a) Tabelle:

Nr.	Klasse	Klassen-mitte	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	Relative Häufigkeiten kumuliert
1	(-25; -20]	-22.5	1	0.02	0.02
2	(-20; -15]	-17.5	3	0.06	0.08
3	(-15; -10]	-12.5	2	0.04	0.12
4	(-10; -5]	-7.5	6	0.12	0.24
5	(-5; 0]	-2.5	9	0.18	0.42
6	(0; 5]	2.5	10	0.2	0.62
7	(5; 10]	7.5	8	0.16	0.78
8	(10; 15]	12.5	5	0.1	0.88
9	(15; 20]	17.5	3	0.06	0.94
10	(20; 25]	22.5	2	0.04	0.98
11	(25; 30]	27.5	1	0.02	1
		Summe:	50	1	

Mittelwert: $\bar{x} = 2.10$, Varianz: $s^2 = 117.84$, Standardabweichung: $s = 10.86$

Datenblatt: Stochastik

In Zufallsexperimenten (Zufallsversuchen mit nicht vorher bestimmten Ergebnissen) werden Ereignissen A Wahrscheinlichkeiten p = p(A) zugeordnet (relative Häufigkeit als die einem Ereignis A zugeordnete Zahl -> $p(A) = p = \frac{g}{n}$ mit: g = Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse, n = Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse).

Ein Wahrscheinlichkeitsbaum mit seinen Ästen (Pfaden) und Wahrscheinlichkeiten ist die Visualisierung ein- oder mehrstufiger Zufallsexperimente. Dabei entspricht einem Elementarereignis ein Pfad, die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades werden multipliziert. Bleiben die Wahrscheinlichkeiten bei mehrmaligem Durchführung eines Experimentes gleich, so spricht man von einem Zufallsversuch „mit Zurücklegen", ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, so von „ohne Zurücklegen". Ein beliebiges Ereignis lässt sich als Menge von Pfaden darstellen, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten, die Anzahl der Pfade, die zu einem Ereignis gehören. Der eindeutigen Zuordnung von Pfad und Elementarereignis entspricht es, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen 1 (= 100% Wahrscheinlichkeit) ergibt. Ebenso gilt:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1,\ p(\overline{A}) = 1 - p(A),\ p(A) = 1 - p(\overline{A})$$

für ein Ereignis A und dessen Gegenereignis. Obige Formeln ergeben sich aus dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten u.a.:

$0 \le p(A) \le 1$
p(A) = 0 => A unmöglich
p(A) = 1 => A sicher
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, $p(A) + p(\overline{A}) = 1$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ ($A \cap B = \{\}$)
(Additionssatz für Ereignisse)
$p(A) = 1 - p(\overline{A})$ (Gegenereignis)

Zufallsvariable X sind reellen Abbildung zur Beschreibung des Zufallsexperiments, die Ergebnissen/Ereignissen reelle Zahlen zuordnen, also: $X(a_1) = x_1$, … mit Ergebnissen a_1, … Es ergibt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung: x_1: $p(X=x_1)$, x_2: $p(X=x_2)$, … mit: $p(X=x_1)+p(X=x_2)+\ldots = 1$ und daraus der Erwartungswert

$E(X) = x_1 p(X=x_1) + x_2 p(X=x_2) + \ldots$

D.h.: Der Erwartungswert ist die Summe aller Produkte aus Zufallsvariablenwert und Wahrscheinlichkeit.
Ein Zufallsexperiment ist ein Spiel, wenn im Experiment auftretende Ereignisse A, B, … mit positiven (Gewinn) oder negativen (Verlust) Geldeinheiten (GE) g_A, g_B, … bewertet werden oder wenn Gewinnpositionen ein Spieleinsatz e (GE) gegenübersteht. Die Ereignisse haben die Wahrscheinlichkeiten p(A), p(B), … (zwischen 0 und 1), die Wahrscheinlichkeiten der sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse entsprechen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit p(A) + p(B) + … + p(sonst) = 1. Der Erwartungswert E gibt den durchschnittlichen Gewinn oder Verlust pro Spiel an (GE), d.h. es gilt:

$$E = g_A p(A) + g_B p(B) + \ldots \text{ bzw. } E = g_A p(A) + g_B p(B) + \ldots - e$$

D.h.: Der Erwartungswert ist die Summe aller Produkte, die sich aus dem Gewinn oder Verlust und der Wahrscheinlichkeit jeweils eines Ereignisses ergeben, eventuell abzüglich des Spieleinsatzes. Ist der Erwartungswert 0, so heißt das Spiel fair.

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (Treffer, Nichttreffer) und „mit Zurücklegen". p ist Grundwahrscheinlichkeit dafür, einen Treffer zu erhalten, n die Gesamtan-

zahl der Versuchsdurchgänge. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Treffer. Dann gilt die Bernoulli-Formel:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \text{ mit } \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$p(X=0) = (1-p)^n$, $p(X=n) = p^n$, $p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k)$, $p(X>k) = 1 - p(X\le k)$

$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$ usw.

Aus dem Bernoulli-Experiment ergibt sich die <u>Binomialverteilung</u> B(n,p) für die Zufallsvariable X der Trefferanzahl mit:

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Es gilt weiter:

$E(X) = \mu = np$ (Erwartungswert)

$\sigma=\sqrt{np(1-p)}$ (Standardabweichung)

Und weiter:

$p(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0{,}683$, $p(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0{,}954$, $p(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$ (Sigma-Regeln)

<u>Beispiele</u>:

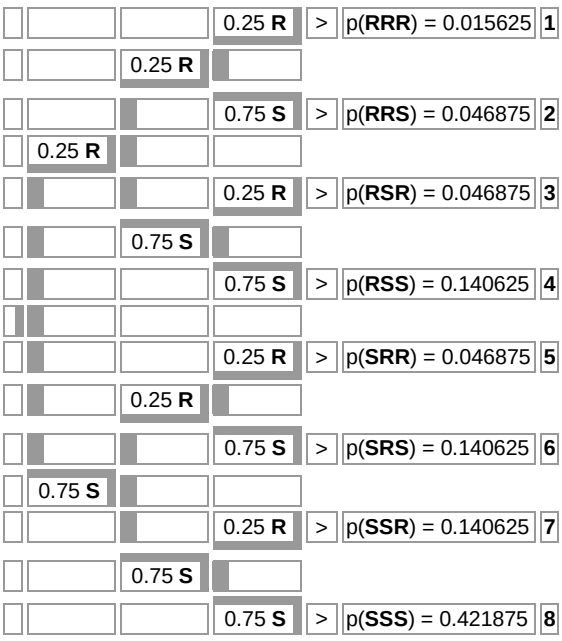
a) Bei einem Einsatz von € 2,50 wird ein Glücksrad mit den drei Farben rot, blau und grün (p(r) = 0,3; p(b) = 0,5; p(g) = 0,2) zweimal gedreht. Der Spieler gewinnt € 10,-, wenn zweimal „rot“ erscheint, € 3,-, wenn einmal „rot“ erscheint, sonst nichts. Die Wahrscheinlichkeiten sind: p(2xr) = 0,3·0,3 = 0,09, p(1xr) = 0,3·0,7 + 0,7·0,3 = 0,42 (laut Wahrscheinlichkeitsbaum). Der Erwartungswert errechnet sich als:

$$E=10\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}42-2{,}50=-0{,}34\,,$$

d.h.: der Spieler verliert pro Spiel im Durchschnitt 34 ct.

b) Eine Urne enthält 2 rote und 6 schwarze Kugeln, die dreimal mit Zurücklegen gezogen werden. Es ergibt sich mit den Grundwahrscheinlichkeiten 2/8 = 0,25, 6/8 = 0,75 (1. bis 3. Ziehung) der folgende Wahrscheinlichkeitsbaum (R = rot, S = schwarz):

Wahrscheinlichkeitsbaum und Wahrscheinlichkeiten:



Anzahl „rot“ k =	**Pfad-wahrscheinlichkeit**	**Pfad-anzahl**	**Gesamt-wahrscheinlichkeit** p(kx„rot“) =
3	0.015625	1	0.015625
2	0.046875	3	0.140625
1	0.140625	3	0.421875
0	0.421875	1	0.421875
		Summe	1
		Erwartungswert	0.75

c) In einer Urne befinden sich 1 weiße, 2 rote und 3 blaue Kugeln. I. Dreimal wird jeweils eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

1. Zug p	Kugel	2. Zug p	Kugel	3. Zug p	Kugel	p_{gesamt}
				1/6	w	1/216
		1/6	w	1/3	r	1/108
				1/2	b	1/72
				1/6	w	1/108
1/6	W	1/3	r	1/3	r	1/54
				1/2	b	1/36
				1/6	w	1/72
		1/2	b	1/3	r	1/36
				1/2	b	1/24
				1/6	w	1/108
		1/6	w	1/3	r	1/54
				1/2	b	1/36
				1/6	w	1/54
1/3	R	1/3	r	1/3	r	1/27
				1/2	b	1/18
				1/6	w	1/36
		1/2	b	1/3	r	1/18
				1/2	b	1/12
				1/6	w	1/72
		1/6	w	1/3	r	1/36
				1/2	b	1/24
				1/6	w	1/36
1/2	B	1/3	r	1/3	r	1/18
				1/2	b	1/12
				1/6	w	1/24
		1/2	b	1/3	r	1/12
				1/2	b	1/8

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, drei blaue Kugeln zu ziehen, p(bbb) = 1/8, je eine weiße, rote und blaue Kugel zu ziehen, p(1xw, 1xr, 1xb) = 1/6, zwei Kugeln gleicher Farbe zu ziehen, p = p(2xw) + p(2xr) + p(2xw) = 2/3.

II. Ein „Kugelentnahmespiel“ wird wie folgt gespielt. Der Spieler setzt einen Betrag von € 2,- ein. Zieht er ohne Zurücklegen im 1. oder 2. Zug die weiße Kugel, so erhält er € 4,-; wurde keine weiße Kugel gezogen, so kann der Spieler noch einmal ziehen. Zieht er im 3. Zug die weiße Kugel, so erhält er den Einsatz von € 2,- zurück, ansonsten verliert er den Einsatz. Es ergibt sich folgender Wahrscheinlichkeitsbaum:

1. Zug p	Kugel	2. Zug p	Kugel	3. Zug P	Kugel	p_{gesamt}
		2/5	r			1/15
1/6	W					
		3/5	b			1/10
		1/5	w			1/15
				¼	w	1/60
1/3	R	1/5	r			
				¾	b	1/20
				¼	w	1/20
		3/5	b	¼	r	1/20
				½	b	1/10
		1/5	w			1/10
				¼	w	1/20
1/2	B	2/5	r	¼	r	1/20
				½	b	1/10
				¼	w	1/20
		2/5	b	½	r	1/10
				¼	b	1/20

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeiten: p(gewonnen) = 1/15 + 1/10 + 1/15 + 1/10 = 1/3 (Gewinn in Höhe von € 2,-), p(verloren) = 1/20 + 1/20 +1/10 + 1/20 + 1/10 + 1/10 + 1/20 = ½ (Verlust in Höhe von € 2,-), p(unentschieden) = 1 – 1/3 – 1/2 = 1/6 (Rückzahlung des Einsatzes).

III. X ist die Zufallsvariable, die die Ergebnisse beim „Kugelentnahmespiel" charakterisiert. X nimmt die Werte „gewonnen", „unentschieden" und „verloren" oder mit anderen Worten die Werte „2", „0" und „-2 €" an. Der Erwartungswert ist dann:

$$E(X) = = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = -\frac{1}{3}.$$

IV. X ist nun die Zufallsvariable, die die Anzahl der Züge beim „Kugelentnahmespiel" charakterisiert. Die Zufallsvariable X nimmt damit die Werte „2" und „3 Züge" an mit den Wahrscheinlichkeiten (laut dem Wahrscheinlichkeitsbaum): p(X=2) = 1/15 + 1/10 + 1/15 + 1/10 = 1/3, p(X=3) = 1 – 1/3 = 2/3. Der Erwartungswert beläuft sich auf: E(X) = $\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, so dass eher mit 3 als mit 2 Zügen beim „Kugelentnahmespiel" zu rechnen ist.

Aufgabenblatt: Stochastik

1. Eine Urne enthält 4 rote und 6 schwarze Kugeln. Es wird dreimal gezogen, wobei die gezogenen Kugeln zurückgelegt werden. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: „Alle gezogenen Kugeln sind rot.“; „Alle gezogenen Kugeln sind schwarz.“; „Es wird genau eine rote Kugel gezogen.“; „Es wird mindestens eine schwarze Kugel gezogen.“

2. A und B spielen Tennis, wobei das Match derjenige gewinnt, der zuerst zwei Sätze für sich entscheiden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass A einen Satz gewinnt, beträgt 65%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A das Tennismatch?

3. In der Urne U_1 befinden sich 5 rote und 3 gelbe Kugeln, in der Urne U_2 sind 2 rote und 5 gelbe Kugeln. Es wird zufällig eine Urne ausgewählt und daraus eine Kugel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel rot, mit welcher Wahrscheinlichkeit gelb?

4. In einer Schublade befinden sich 8 schwarze, 6 rote und 4 gelbe Socken. Im Dunkeln werden aus der Schublade zwei Socken zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man Socken mit derselben Sockenfarbe erhalten?

5a) Ein Würfel wird einmal geworfen. Mit welcher Augenzahl ist im Durchschnitt zu rechnen?
b) Ein Würfel wird dreimal geworfen. Mit wie vielen Sechsen ist im Durchschnitt zu rechnen?

6. Ein Glücksrad besteht aus den Feldern „blau“ (120°), „rot“ (180°) und „gelb“ (60°). Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: „Es erscheint zweimal blau.“; „Es erscheinen nur gleiche Farben.“; „Es erscheinen nur verschiedene Farben.“; „Es erscheinen rot und gelb.“
b) Beim „Glücksrad-Spiel“ zahlt ein Spieler für zweimaliges Drehen des Glücksrads einen Einsatz von € 2,-. Er gewinnt, wenn alle Farben gleich sind, € 5,-, wenn alle Farben „gelb“ sind, zusätzlich € 5,-.

7. Ein Glücksrad mit den Farben rot (50%), grün (40%) und weiß (10%) wird zweimal gedreht.
a) Zeichne ein Baumdiagramm.
b) Bei einem Einsatz von 1,- € gewinnt ein Spieler 5,- € bei zweimal „weiß“, 2,- € bei einmal „weiß“ pro Spiel? Ist das Spiel fair?
c) Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

8. An einem Schlüsselbund befinden sich fünf Schlüssel. Nur einer davon passt in ein Schloss. Zeichne einen Wahrscheinlichkeitsbaum, wenn der Aufschließende darauf achtet, welchen Schlüssel er probiert hat. Nach wie viel Versuchen passt im Durchschnitt ein Schlüssel ins Schloss?

9. Eine Urne enthält 8 rote und 12 schwarze Kugeln. Es wird dreimal gezogen, wobei die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden. Bei einem Einsatz von 2,- € wird folgendes Spiel gespielt: Wird dreimal „rot“ gezogen, so gewinnt der Spieler 5,- €; wenn zweimal „rot“ gezogen wurde, so beträgt der Gewinn 3,- €, wenn einmal „rot“ gezogen wurde, € 1,-. Berechne den durchschnittlichen Gewinn oder Verlust für den Spieler. Ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn sich in der Urne nur noch die Hälfte der roten und der schwarzen Kugeln befinden?

10. Eine Münze zeigt beim Werfen mit einer Wahrscheinlichkeit von 55% Wappen an. Die Münze wird in einem Spiel dreimal geworfen.
a) Zeichne ein Baumdiagramm.
b) X ist die Zufallsvariable, die die Trefferanzahl „Wappen“ zählt. Bestimme die Häufigkeitsverteilung der Zufallsvariablen und berechne den Erwartungswert.
c) X ist die Zufallsvariable, die dreimal „Wappen“ 2,- €, zweimal „Wappen“ 1,- € als Gewinn zuordnet, wenn der Einsatz pro Spiel 0,50 € beträgt. Bestimme die Häufigkeitsverteilung der Zufallsvariablen und berechne den Erwartungswert. Mit welchem Gewinn/Verlust hat der Spieler bei zehn

Spielen zu rechnen?

11. Eine Urne enthält 8 rote und 12 schwarze Kugeln. Es wird dreimal gezogen, wobei eine schwarze Kugel zurückgelegt wird, eine rote aber nicht. Bei einem Einsatz von 2,- € wird folgendes Spiel gespielt: Wird dreimal „rot“ gezogen, so gewinnt der Spieler 5,- €; endet ansonsten das Spiel mit dem Ziehen einer roten Kugel, so gewinnt der Spieler 3,- €, wenn er zweimal „rot“ gezogen hat, 1,- €, wenn er einmal „rot“ gezogen hat.
a) Zeichne ein Baumdiagramm.
b) Berechne den durchschnittlichen Gewinn/Verlust für den Spieler.

12. Eine Münze (Kopf, Zahl) wird fünfmal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es tritt fünfmal Zahl auf.
B: Es tritt zweimal Kopf auf.
C: Es tritt viermal Zahl auf.
D: Es tritt höchstens dreimal Zahl auf.
E: Es tritt mehr als zweimal Zahl auf.
F: Es tritt zwischen zwei- und viermal Kopf auf.

13. Der Anteil der Linkshänder beträgt 15%. 20 Personen werden zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Keiner der Personen ist Linkshänder.
B: 5 Personen sind Linkshänder.
C: Mindestens eine Person ist Linkshänder.
D: Mindestens 10 Personen sind Linkshänder.

Mit welcher Anzahl Linkshändern ist durchschnittlich zu rechnen?

Datenblatt: Erlös-, Kostenfunktionen

Im Rahmen der betrieblichen Organisation eines (Produktions-) Unternehmens spielt der Absatz als Endpunkt des betrieblichen Prozesses, als Verwertung des im Betrieb Er-stellten (Produkt) eine wichtige Rolle. Absatz ist damit Leistungsverwertung, d.h. Bereitstellung der betrieblichen Leistung für den Markt als Kontaktzone von Angebot und Nachfrage. Von Seiten des Betriebs gehören zum Absatz: Absatzplanung und -vorbereitung mit den Mitteln der Marktanalyse und Marktbeobachtung; Absatzpolitik mit Preis- und Mengenpolitik sowie dem (Produkt-) Marketing. Im Folgenden wird die Mengenpolitik eines Unternehmens unter den Bedingungen der vollkommenen Konkurrenz, des polypolistischen Marktes betrachtet.

Ein Unternehmen produziert ein Produkt mit einer Ausbringungsmenge x pro Zeiteinheit. Dabei entstehen fixe Gesamtkosten K_{fix} und variable Stückkosten k_{var}. Als Gesamtkosten $K = K_{ges}$ ergeben sich für eine Ausbringungsmenge x:

$$K(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + K_{var}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)$$

Variable Gesamtkosten K_{var} sind dabei: $K_{var}(x) = x \cdot k_{var}(x)$. Als Stückkosten (= Kosten pro produziertes Stück) ergeben sich die fixen Stückkosten k_{fix}, die variablen Stückkosten k_{var} und die Gesamtstückkosten k_{ges} als:

$$k_{fix} = \frac{K_{fix}}{x}$$

$$k_{var} = \frac{K_{var}}{x}$$

$$k_{ges} = k_{fix} + k_{var} = \frac{K_{fix}}{x} + \frac{K_{var}}{x} = \frac{K_{ges}}{x}$$

Bei konstanten variablen Stückkosten k_{var} ist die Gesamtkostenfunktion $K_{ges}(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)$ eine Gerade mit y-Achsenabschnitt K_{fix} und Steigung k_{var}. Die Gesamtstückkostenkurve $k_{ges} = k_{ges}(x) = \frac{K_{fix}}{x} + k_{var}$ ist eine hyperbelähnliche Funktion, die für wachsende Ausbringungsmengen x sich der Kurve der variablen Stückkosten k_{var} annähert. Die Grenzkosten $K' = K'_{ges}$ sind dann die Ableitung der Gesamtkosten $K = K_{ges}$. Der Verkauf eines Produktes durch ein Unternehmen bringt diesem Erlöse pro Zeiteinheit ein, die abhängig von der Ausbringungsmenge x des Produkts sind. Der vom Markt (bei vollständiger Konkurrenz) vorgegebene Verkaufspreis p als Stückerlös gibt den Erlös pro Stück beim Verkauf des Produkts an, der Gesamterlös E ergibt sich dann als:

$$E(x) = p \cdot x$$

und stellt damit im Koordinatensystem von Ausbringungsmenge x und Erlös eine Gerade durch den Ursprung dar mit dem Stückerlös p als Steigung:
Die Ableitung der Erlösfunktion E heißt Grenzerlös E' mit: $E'(x) = p$ und ist identisch mit dem Marktpreis p. Wegen $E(x) = px$ ist der Grenzerlös auch Stückerlös e(x), da:

$$e(x) = \frac{E(x)}{x} = \frac{px}{x} = p = E'(x)$$

Stellt man nun die Kostenfunktion der Gesamtkosten K_{ges} und die Funktion des Erlöses E gegenüber, so ergibt sich für jede Ausbringungsmenge x eine besondere Höhe der Kosten $K(x) = K_{ges}(x)$ und des Erlöses E(x). Der Gewinn G ist dann die Differenz von Erlös und Kosten:

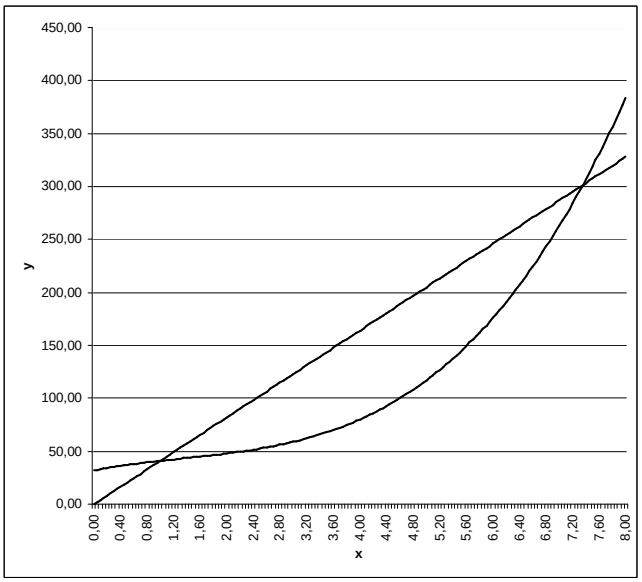
$$G(x) = E(x) - K(x)$$

und als Gewinn für positive Werte, als Verlust für negative interpretierbar. Die Ausbringungsmenge x_s mit $G(x_s) = 0$, also Gewinn = 0, heißt Nutzenschwelle. Für die Nutzenschwelle x_s gilt:

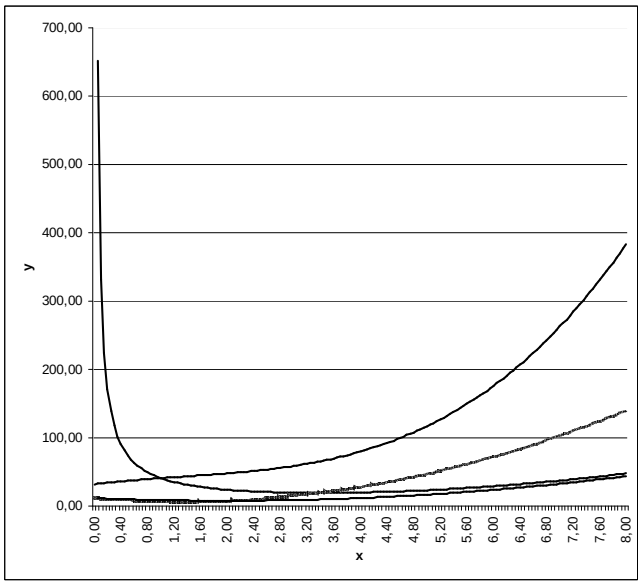
$$E(x_s) = K(x_s)$$

Bei der Nutzenschwelle (break even point) wird damit die Gewinnzone des Unternehmens erreicht. Eine eventuell existierende zweite Stelle x_G mit $G(x_G) = 0$ und $x_s < x_g$ heißt Nutzengrenze mit:

$$E(x_g) = K(x_g)$$



Erlös E(x), Gesamtkosten K(x)



Gesamtkosten K(x), Durchschnittskosten k(x), variable Durchschnittskosten $k_{var}(x)$, Grenzkosten K'(x)

Im Koordinatensystem von Ausbringungsmenge x und Erlös bzw. Kosten werden Nutzenschwelle x_s und Nutzengrenze x_g also durch den Schnittpunkt von Erlösgeraden und Kostenfunktion repräsentiert, die Gewinnzone, dargestellt durch die Ausbringungsmengen x mit $G(x) > 0$, ist damit zu umschreiben mit: $x_s < x < x_g$. Gemäß den Regeln der Differenzialrechnung erhält man das Gewinnmaximum der Gewinnfunktion $G(x) = E(x) – K(x)$, indem man die Ableitung $G'(x) = 0$ setzt. Für das Gewinnmaximum x_m gilt damit:

$$E'(x_m) = K'(x_m),\ p = K'(x_m)$$

Also sind hier Grenzerlös gleich Grenzkosten bzw. Grenzkosten gleich Stückerlös (Verkaufspreis). Auf Grund von $G''(x_m) < 0$ liegt dann in der Tat ein Maximum vor. $G_{max} = G(x_m)$ ist dann der maximale Gewinn. Für eine Ausbringungsmenge x ergibt sich der Stückgewinn g(x) als:

$$g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x)}{x} - \frac{K(x)}{x} = e(x) - k(x) = p - k(x)$$

Der Stückgewinn ist also die Differenz aus Preis und Stückkosten. Dem Betriebsminimum entspricht die Ausbringungsmenge x_{min}, bei der die variablen Stückkosten k_{var} minimal sind. Mit $k_{var} = \frac{K_{var}}{x}$ gilt im Betriebsminimum: $k'_{var}(x_{min}) = 0$ und damit:

$$K'(x_{min}) = K'_{var}(x_{min}) = \frac{K_{var}(x_{min})}{x_{min}} = k_{var}(x_{min})$$

mit: $k''_{var}(x_{min}) > 0$. D.h.: Im Betriebsminimum x_{min} stimmen die (variablen) Grenzkosten $K' = K'_{var}$ mit den variablen Stückkosten k_{var} überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der variablen Stückkosten in deren Minimum. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist dann:

$$p_{kf} = k_{var}(x_{min})$$

Sie stellt daher den Marktpreis $k_{var}(x_{min}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsminimum das Unternehmen die Warenmenge x_{min} absetzen kann, wenn es bereit ist, dabei einen Verlust in Höhe der fixen Kosten K_{fix} zu machen, also: $G(x_{min}) = –K_{fix}$. Dem Betriebsoptimum entspricht die Ausbringungsmenge x_{opt},

bei der die gesamten Stückkosten minimal sind. Mit K = K_{ges} und $k = \frac{K}{x}$ gilt im Betriebsoptimum $k'(x_{opt}) = 0$ und damit:

$$K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = k(x_{opt})$$

mit: $k''(x_{opt}) > 0$. D.h.: Im Betriebsoptimum x_{opt} stimmen die Grenzkosten K' mit den gesamten Stückkosten k überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der Stückkosten in deren Minimum. Als <u>langfristige Preisuntergrenze</u> ergibt sich:

$$p_{lf} = k(x_{opt})$$

Sie stellt daher den Marktpreis $k(x_{opt}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsoptimum das Unternehmen die Warenmenge x_{opt} absetzen kann, bei der die fixen Kosten K_{fix} und die variablen Kosten $K_{var}(x_{opt})$ gerade gedeckt sind, also: $G(x_{opt}) = 0$. Wegen $k_{var}(x) < k(x)$ ist bei $K'(x) > 0$: $x_{min} < x_{opt}$, $p_{kf} < p_{lf}$. Ein anderer Zugang zur langfristigen Preisuntergrenze ergibt sich, wenn wir uns vorstellen, die Erlöskurve E(x) um den Koordinatenursprung so zu drehen, dass sie zu einer Tangente an die Gesamtkostenfunktion K(x) wird. Wir erhalten dann mit $E_{lf}(x) = p_{lf}x$ die Erlöskurve, die in x_{opt} die Kostenkurve berührt, so dass also ebenfalls gilt:

$$K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = k(x_{opt})$$

Durch Drehung der Erlösfunktion erhalten wir entsprechend eine Tangente an die Kurve der variablen Gesamtkosten und somit das Betriebsminimum. Es bleibt noch (zusammenfassend) zu erwähnen, dass bei der Ausbringungsmenge des Betriebsoptimums die Stückkosten minimal sind, d.h. der Stückgewinn g(x) = p – k(x) maximal wird. Für die Gesamtkosten K(x) = $K_{ges}(x)$ und deren Ableitung, die Grenzkosten K'(x), ergibt sich das <u>Minimum der Grenzkosten</u> mit:

$$K''(x_{mg}) = 0$$

und mit: $K'''(x_{mg}) > 0$. Das Minimum gibt damit an, bei welcher Ausbringungsmenge x_{mg} die Gesamtkosten am geringsten steigen (minimaler Kostenzuwachs), und kennzeichnet damit den Wendepunkt der Gesamtkostenfunktion K(x). Im Betriebsminimum sind – wie gesehen – die variablen Stückkosten minimal, d.h. für die entsprechende Ausbringungsmenge x_{min} gilt: $k'_{var}(x_{min}) = 0$. Das Minimum der Grenzkosten wird erreicht bei x_{mg} mit: $K''(x_{mg}) = 0$. Dann gilt (mit einer kubischen Kostenfunktion, ganz rationalen Funktion 3. Grades) hinsichtlich des Verhältnisses der Ausbringungsmengen von minimalen Grenzkosten und Betriebsminimum:

$$x_{mg} : x_{min} = 2 : 3$$

Wir setzen im polypolistischen Rahmen eine kubische Kostenfunktion, eine ganz rationale Funktion 3. Grades voraus. Zur <u>Bestimmung von Kosten- und Erlösfunktion</u> ist mit x als ME der folgende Ansatz gültig:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Kostenfunktion)
$K_{fix} = d$ (Fixkosten)
$K_{var}(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (variable Kosten)
$K'(x) = K'_{var}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (Grenzkosten)
$k(x) = ax^2 + bx + c + d/x$ (Durchschnittskosten = Stückkosten)
$k_{fix}(x) = d/x$ (fixe Durchschnittskosten = fixe Stückkosten)
$k_{var}(x) = ax^2 + bx + c$ (variable Durchschnittskosten = variable Stückkosten)
$k'(x) = 2ax + b - d/x^2$ (Grenzdurchschnittskosten = Grenzstückkosten)
$k_{var}'(x) = 2ax + b$ (variable Grenzdurchschnittskosten = variable Grenzstückkosten)
$E(x) = px$ (Erlösfunktion, p als Markt-/Verkaufspreis)
$E'(x) = p$ (Grenzerlös)

$G(x) = E(x) – K(x) = px – ax^3 – bx^2 – cx – d$ (Gewinnfunktion)
$G'(x) = p – 3ax^2 – 2bx – c$ (Grenzgewinn)

Die Eigenschaften der Erlös- und Kostenfunktion können dann wie folgt ausgewertet werden:

Gesamtkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = y_0$
Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = y_0$
Variable Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = y_0$
Grenzkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = y_0$
Gewinn g_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $G(x_0) = px_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = g_0$
Nutzenschwelle, Nutzengrenze bei Menge x_0: $G(x_0) = px_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = 0$
Gewinnmaximum bei Ausbringungsmenge x_0: $G'(x_0) = p – 3ax_0^2 – 2bx_0 – c = 0$
Betriebsminimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}'(x_0) = 2ax_0 + b = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c = k_{var}(x_0)$
Kurzfristige Preisuntergrenze p_{kf} bei Menge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = p_{kf}$ bzw. $G(x_0) = p_{kf}x_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = -d = -K_{fix}$
Betriebsoptimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k'(x_0) = 2ax_0 + b – d/x_0^2 = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = k(x_0)$
Langfristige Preisuntergrenze p_{lf} bei Menge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = p_{lf}$ bzw. $G(x_0) = p_{lf}x_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = 0$

Es ergibt sich aus der Auswertung der Bedingungen Eigenschaften ein lineares Gleichungssystem, das mit dem Gauß-Algorithmus lösbar ist. Errechnet werden dabei die Unbekannten: a, b, c, d und p.

Im monopolistischen Fall eines Angebotsmonopols bestimmt der Anbieter den Preis seiner Ware. Dem Preis liegt die Preis-Absatz-Funktion zugrunde, also die Gerade:

$$p(x) = ax + b$$

mit $a<0$, $b>0$. Für die Erlösfunktion ergibt sich damit:

$$E(x) = p(x)\cdot x = (ax+b)x = ax^2 + bx$$

Der Erlösmaximum der Erlöskurve findet sich dann vermittelst: $E'(x) = 0$ an der Stelle:

$$x_{erl} = -\frac{b}{2a}$$

Unter der Voraussetzung der üblichen S-förmigen Kostenfunktion bestimmt sich dann das Gewinnmaximum vermöge: $G(x) = E(x) – K(x)$ wieder bei:

$$E'(x) = K'(x)$$

Die gewinnmaximale Menge x_m bestimmt den Cournotschen Preis $p_c = ax_m+b$ und den Cournotschen Punkt $C(x_m|ax_m+b)$.

Die kostentheoretischen Überlegungen z.B. hinsichtlich Betriebsminimum und Betriebsoptimum bleiben von der Situation des Angebotsmonopols unberührt.

Beispiel:

Gegeben ist ein Unternehmen im Polypol. Zu bestimmen sind zunächst die Kostenfunktion als ganz rationale Funktion 3. Grades und die linear-proportionale Erlösfunktion einer Unternehmung zu folgenden Bedingungen:

(1) Die Fixkosten haben eine Höhe von 8 GE (Geldeinheiten).
(2) Als Stückkosten ergeben sich bei einer Produktionsmenge von 4 ME (Mengeneinheiten) 6 GE.
(3) Bei einer Produktionsmenge von 3 ME befindet sich das Betriebsminimum.
(4) Der Verkaufspreis pro ME beträgt 8 GE.
(5) Der Gewinn bei einer Produktionsmenge von 5 ME beträgt 4,5 GE.

Lösung: I. Es sind daher im Folgenden die Unbekannten a, b, c, d und p von Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $E(x) = px$ zu bestimmen, wobei die vorgenannten Bedingungen (1) bis (5) Verwendung finden (Bestimmungsaufgabe für Polynome). Und zwar gilt:

(1) $K(0) = K_{fix} = \underline{d = 8}$.
(2) $k(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c + d/4 = 16a + 4b + c + 2 = 6 \Rightarrow \underline{16a + 4b + c = 4}$.
(3) $k_{var}'(3) = 2a \cdot 3 + b = 0 \Rightarrow \underline{6a + b = 0}$.
(4) $\underline{p = 8} \Rightarrow E(x) = 8x$.
(5) $G(5) = p \cdot 5 - a \cdot 5^3 - b \cdot 5^2 - c \cdot 5 - d = 40 - 125a - 25b - 5c - 8 = 4{,}5 \Rightarrow$
$\underline{125a + 25b + 5c = 27{,}5}$.

Es ergibt sich also aus der Auswertung der Bedingungen (1) bis (5) ein lineares Gleichungssystem, das mit dem Gauß-Algorithmus lösbar ist. Die Lösungen (a, b, c) lauten neben d = 8 und p = 8 auf Grund der folgenden Umformungen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 16a + 4b + 1c = 4$

$+ 6a + 1b = 0$

$+ 125a + 25b + 5c = 27{,}5$

Anfangstableau:

16 4 1 | 4

6 1 0 | 0

125 25 5 | 27.5

1. Schritt: 8*(*2*) - 3*(*1*) / 16*(*3*) - 125*(*1*)

16 4 1 | 4

0 -4 -3 | -12

0 -100 -45 | -60

2. Schritt: -1*(*3*) + 25*(*2*)

16 4 1 | 4

0 -4 -3 | -12

0 0 -30 | -240

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 16a + 4b + 1c = 4$

$- 4b - 3c = -12$

$- 30c = -240$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$\underline{c = 8}$, $\underline{b = -3}$, $\underline{a = 0.5}$.

II. Insgesamt lauten die gesuchten Funktionen:
$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8$ (Kostenfunktion [GE])
$E(x) = 8x$ (Erlösfunktion [GE])
$G(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 8$ (Gewinnfunktion [GE]; Gewinnfunktion als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion).

Nun werten wir Erlös- und Kostenfunktion aus.

III. Bei Nutzenschwelle und Nutzengrenze gilt:

$E(x) = K(x)$,

also wegen $E(x) - K(x) = 0$:

$G(x) = 0$.

Zur Bestimmung von Nutzenschwelle (break even point) und Nutzengrenze ist also die Gleichung:

$-0{,}5x^3 + 3x^2 - 8 = 0$

zu lösen. Damit ergibt sich:

$0{,}5x^3 - 3x^2 + 8 = 0$

und aus der obigen Zeichnung eine Lösung x = 2 ME und weiter wegen:

$0{,}5x^2 - 2x - 4 = 0$

die weiteren Lösungen:

[x = -3,46], x = 5,46 ,

wobei die negative Lösung wegfällt. Nutzenschwelle ist also: x = 2 ME mit G(2) = 0 GE, Nutzengrenze x = 5,46 ME mit G(5,46) = 0 GE. Die Gewinnzone des Unternehmens liegt zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze.

IV. Die Produktionsmenge x mit dem maximalen Gewinn errechnet sich aus dem Nullsetzen der Ableitung, mithin des Grenzgewinns:

G'(x) = 0

Also ergibt sich mit $G(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 8$ und $G'(x) = = -1{,}5x^2 + 6x$:

$-1{,}5x^2 + 6x = 0$
$x(-1{,}5x+6) = 0$
$x = 0,\ -1{,}5x+6 = 0$
$x = 0,\ 6 = 1{,}5x$
$[x=0],\ x = 4$

Wegen $G''(x) = -3x + 6$ und $G''(4) = -3\cdot 4 + 6 = -6 < 0$ liegt bei der Produktionsmenge x = 4 ME das Gewinnmaximum vor. Der maximale Gewinn beträgt:

G(4) = 8 GE.

V. Die Stückkostenfunktion $k(x) = K(x)/x$, $x > 0$, lautet: $k(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 8 + 8/x$. Das Minimum der Stückkosten k(x) errechnet sich mit:

k'(x) = 0 ,

also mit $k'(x) = x - 3 - 8/x^2$ aus:

$x - 3 - 8/x^2 = 0$
$x^3 - 3x^2 - 8 = 0$
$x = 3{,}6$

Aus der Durchschnittskostenfunktion kann man k(3,6) = 5,9 GE als minimale Durchschnittskosten entnehmen. Die Ausbringungsmenge der minimalen Stückkosten ist identisch mit dem Betriebsoptimum.

VI. Bzgl. der Kostenfunktion K(x) kann jetzt das Betriebsminimum oder die kurzfristige Preisuntergrenze $k_{var}(x_{min})$ bestimmt werden. Im Betriebsminimum x_{min} stimmen die (variablen) Grenzkosten $K' = K'_{var}$ mit den variablen Stückkosten k_{var} überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der variablen Stückkosten in deren Minimum. Die kurzfristige Preisuntergrenze stellt den Marktpreis $k_{var}(x_{min}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsminimum das Unternehmen die Warenmenge x_{min} absetzen kann, wenn es bereit ist, dabei einen Verlust in Höhe der fixen Kosten K_{fix} zu machen, also: $G(x_{min}) = -K_{fix}$. Grafisch stellt sich das Betriebsminimum als die Stelle dar, wo die Tangente vom Koordinatenursprung die Funktion der variablen Gesamtkosten $K_{var}(x)$ berührt. Hier ist: $K_{var}(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x$. Rechnerisch gilt auf Grund der Tatsache, dass an der Stelle x die Tangentensteigung $K_{var}'(x)$ identisch mit der Steigung der Gerade durch den Ursprung O(0|0) und den Punkt $P(x|\ K_{var}(x))$ sein muss:

$$k_{var}(x) = K_{var}(x)/x = K_{var}'(x)$$

und damit:

$$(0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x)/x = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$0{,}5x^2 - 3x + 8 = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$[x = 0],\ x = 3$$

gemäß der Bedingung (3) in 1). Die kurzfristige Preisuntergrenze $k_{var}(3) = 3{,}5$ GE liegt beträchtlich unter dem hier angenommenen Marktpreis p = 8 GE. Da sich das Betriebsminimum nur auf die variablen Stückkosten bezieht, haben Änderungen bei den Fixkosten K_{fix} (etwa Senkung um 2 GE) hierauf keine Auswirkung. Entsprechendes gilt auch für die Ausbringungsmenge im Gewinnmaximum, da die Grenzkosten dieselben bleiben und G'(x) = 0, also E'(x) = K'(x) gilt. Hingegen erhöht sich im (gleich bleibenden) Gewinnmaximum der maximale Gewinn um 2 GE, wenn die Fixkosten um 2 GE sinken.

VII. Eine weitere Vorgehensweise ergibt sich für die Ermittlung des Betriebsoptimums wie folgt. Bzgl. der Kostenfunktion K(x) entspricht das Betriebsoptimum der Ausbringungsmenge x_{opt}, bei der die gesamten Stückkosten minimal sind. Die langfristige Preisuntergrenze kann als $k(x_{opt})$ bestimmt werden. Des Weiteren lässt sich das Betriebsoptimum grafisch als die Ausbringungsmenge bestimmen, wo die Tangente vom Koordinatenursprung die Funktion der Gesamtkosten K(x) berührt mit: $K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8$.
Rechnerisch gilt:

$$k(x) = K(x)/x = K'(x)$$
$$(0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8)/x = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$0{,}5x^2 - 3x + 8 + 8/x = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$x^2 - 3x - 8/x = 0$$
$$x^3 - 3x^2 - 8 = 0$$
$$x = 3{,}6$$

Das Betriebsoptimum liegt bei x = 3,6 ME (siehe auch weiter oben), die langfristige Preisuntergrenze ist k(3,6) = 5,9 GE.

VIII. Die Ausbringungsmenge x mit minimalem Kostenzuwachs ist die Menge x_{mg} mit: $K''(x_{mg}) = 0$, also dort, wo die Kostenfunktion K(x) ihren Wendepunkt besitzt. Damit gilt hinsichtlich dieses Minimums der Grenzkosten bei:

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8$$
$$K'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$K''(x) = 3x - 6$$

die folgende Gleichung:

$$K''(x) = 0$$
$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Das Minimum gibt damit an, dass bei der Ausbringungsmenge x_{mg} = 2 ME die Gesamtkosten am geringsten steigen.

IX. Während wir bisher die Situation eines Unternehmens in einem Polypol eines vollkommenen Marktes beschrieben haben, soll nun die Unternehmung die Stellung eines Monopolisten am Markt einnehmen (Angebotsmonopol). Die Erlösfunktion (als Parabel) ist nun:

$$E^*(x) = -3x^2 + 32x$$

bei unveränderten Gesamtkosten:

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8.$$

Nutzenschwelle x = 3,3 ME und Nutzengrenze x = 6,75 ME sind aus der Gleichung

$$E^*(x) = K(x)$$

zu bestimmen, die Gewinnfunktion G(x) ist: $G(x) = E^*(x) - K(x)$, also:

$$G(x) = -0{,}5x^3 + 24x - 8$$

mit:

$$G'(x) = -1{,}5x^2 + 24$$
$$G''(x) = -3x$$

als Ableitungen. Zur Ermittlung des Gewinnmaximums ist wieder die 1. Ableitung gleich 0 zu setzen, also:

$$G'(x) = 0$$
$$-1{,}5x^2 + 24 = 0$$
$$24 = 1{,}5x^2$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Hier ist x = 4 ME die Lösung wegen $G''(4) = -12 < 0$ (Maximum) und mit G(4) = 56 GE.
Der Erlös des Unternehmens beträgt bei der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge x = 4 ME: E*(4) = 80 GE. Der Verkaufspreis p* ergibt sich als:

$$p^* = E^*(x)/x$$

und mithin als: p* = 80/4 = 20 GE. Der Verkaufspreis liegt also beträchtlich höher als p = 8 GE in der weiter oben dargestellten Polypolsituation des Unternehmens.

Aufgabe 1:

1.1. Die Funktion g(x) ist nur teilweise bekannt mit:

$$g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

g(x) hat zudem folgende Eigenschaften: Der y-Achsenabschnitt der Funktion ist -4; bei x = 1 liegt ein Hochpunkt und eine Nullstelle vor. Bestimme die Funktion g(x) vollständig.

1.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4,$$

zu der alle Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte zu bestimmen sind. Skizziere die Funktion f(x) im Bereich -3 ≤ x ≤ 5.

1.3. Bestimme an die Funktion f(x) die Tangente t, die durch den Funktionspunkt P(0|-4) geht. Bestimme, in welchem Punkt die Tangente t die Funktion f(x) außerdem noch schneidet.

1.4. Berechne exakt den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen der Funktion f(x) und der Tangente t liegt.

1.5. Für welches u, 0 ≤ u ≤ 6, ist der Abstand zwischen Tangente t und Funktion f(x) am größten?

1.6. Zeige, dass sich die Funktionen f(x) und die Parabel

$$h(x) = -x^2 + x$$

im Wendepunkt von f(x) berühren.

Lösungen: 1.1. b = -6, c = 9, d = -4 /
1.2. N(1|0), N(4|0); H(1|0), T(3|-4); W(2|-2) /
1.3. t: y = 9x-4; Q(6|50) /
1.4. A = $\int_0^6 (t(x) - f(x))dx = \int_0^6 (-x^3 + 6x^2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3\right]_0^6 = 108$ /
1.5. d(u) = $-u^3+6u^2$; u = 4 mit d(4) = 32 /
1.6 W(2|-2); h(2) = -2 = f(2); h'(2) = -3 = f'(2) mit h'(x) = -2x+1

Aufgabe 2:

2.1. Die Funktion

$$g(x) = ae^{-x} + bx + c$$

schneidet die y-Achse bei y = -1, hat im Schnittpunkt einen Tiefpunkt und besitzt an der Stelle x = -1 eine Tangente, die zur Gerade y = (1-e)x parallel ist. Bestimme a, b und c.

2.2. Bestimme – falls vorhanden – die Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = e^{-x} + x - 2 \ .$$

Skizziere die Funktion f(x) und deren Asymptote.

2.3. Berechne exakt die zwischen Funktion f(x) und Asymptote, y-Achse und Gerade x = 6 eingeschlossene Fläche.

2.4. In welchem Größenverhältnis stehen die beiden Flächen zueinander, die jeweils zwischen der Funktion f(x) und der x- und y-Achse liegen?

2.5. Wie lauten die vom Punkt P(-2|0) ausgehenden Tangenten an die Funktion f(x)?

Lösungen: 2.1. a = 1, b = 1, c = -2 /
2.2. N(-1,15|0), N(1,85|0); T(0|-1); kein Wendepunkt /
2.3. A = 1 – e^{-6} /
2.4. $A_1 = \int_{-1,15}^{0} (-f(x))dx = \left[e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1,15}^{0} = 0{,}8$; $A_2 = \int_{0}^{1,85} (-f(x))dx = \left[e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{0}^{1,85} = 1{,}13$; $A_2 : A_1 = 1{,}4$ /
2.5. Tangentensteigung = Ableitung: $3e^{-u} + ue^{-u} - 4 = 0$ => $B_1(-2{,}8|11{,}6)$, $B_2(-0{,}3|-0{,}95)$ als Berührpunkte mit den Tangenten: y = -15,4(x+2,8) + 11,6, y = -0,35(x+0,3) – 0,95

Aufgabe 3:

3.1. Die trigonometrische Funktion f(x) entsteht aus der Sinusfunktion durch Streckung um den Faktor π/4 entlang der x-Achse und um den Faktor 2 in Richtung der y-Achse, weiter durch Spiegelung um die Achse und durch die Verschiebung um 1 nach unten. Bestimme Funktionsgleichung und Periode. Zeichne den Graphen der Funktion, 0≤x≤10.

3.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -2\sin(\frac{\pi}{4}x) - 1$$

Zeige, dass an den Stellen $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$ die Funktion Wendepunkte besitzt. Wie lauten die Wendetangenten?

3.3. Wendetangenten und Funktion begrenzen eine Fläche. Bestimme den Flächeninhalt!

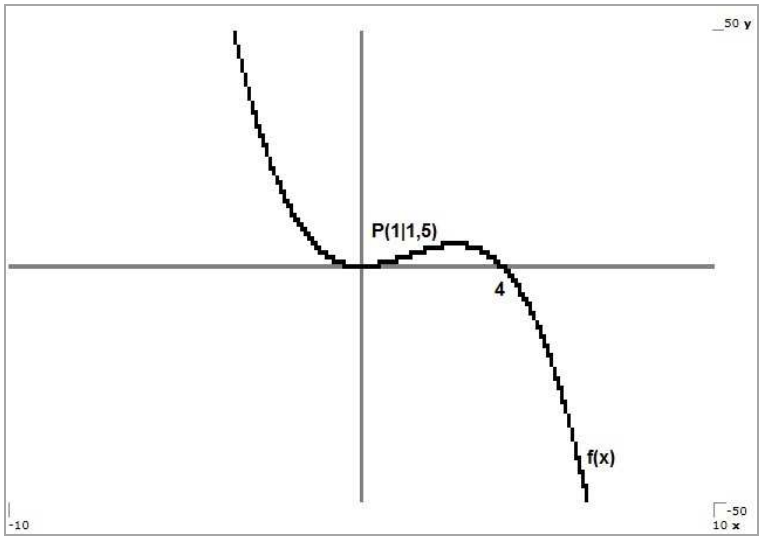
3.4. Im Bereich 4 ≤ x ≤ 8 soll die Funktion f(x) durch eine Parabel 2. Grades, benannt als g(x), angenähert werden. Die Parabel hat mit der Sinuskurve den Hochpunkt gemeinsam und verläuft durch die Wendepunkte der Funktion f(x).

3.5. Wie groß ist die maximale Abweichung zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [4;8]?

Lösungen: 3.1. f(x) = -2·sin(πx/4) – 1, p = 8 /
3.2. Wendepunkte: $W_1(4|-1)$, $W_2(8|-1)$; Wendetangenten: y = 1,57x – 7,28, y = -1,57x + 11,56
3.3. A = $2\int_4^6 (y - f(x))dx = 1{,}187$ /
3.4. $W_1(4|-1)$, $W_2(8|-1)$, H(6|1), g(x) = ax^2+bx+c, g(6) = 1, g'(6) = 1, g(4) = -1 -> g(x) = $-0{,}5x^2+6x-17$ /
3.5. d(x) = |f(x) – g(x)| maximal bei x = 4,6 bzw. x = 7,4 mit d(4,6) = d(7,4) = 0.112

Aufgabe 4:

4.1. Bestimme aus der nachstehenden Zeichnung den Funktionsterm der ganz rationalen Funktion 3. Grades.



4.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 6x^2$$

Berechne exakt die Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte der Funktion. Wo ist die Funktion monoton steigend, wo fallend, wo ist die Funktion links, wo rechts gekrümmt? Zeichne die Funktion.

4.3. Die Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle $x_0 = 5$ bildet zusammen mit der x- und y-Achse ein rechtwinkliges Dreieck im Koordinatensystem. Bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

4.4. Welchen prozentualen Anteil hat die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse an der Dreiecksfläche zwischen Tangente und Achsen?

4.5. Die Gerade x = u, 0≤u≤6, schneidet die x-Achse im Punkt R, die Funktion f(x) im Punkt S. Zusammen mit dem Koordinatenursprung O bilden die Punkte R und S das rechtwinklige Dreieck ORS. Für welches u hat dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?

Lösungen: 4.1 $f(x) = 0{,}5x^2(4–x)$ /
4.2 N(0|0)=T(0|0), W(2|16), H(4|32), N(6|0), Monotonie: fallend auf (-∞,0), (4,∞), steigend auf (0,4), Krümmung: links gekrümmt auf (-∞,2), rechts gekrümmt auf (2,∞) /
4.3 t: y = -15x+100 -> $N_t(20/3|0)$, $S_t(0|100)$ -> $A_\Delta = 1000/3$ /
4.4 Grenzen: a=0, b=6 -> A = 108 -> 108/(1000/3) = 0,324 = 32,4 % /
4.5 A(u) = uf(u)/2 -> Maximum bei u = 4,5 mit A(4,5) = 68,34, A(0) = 0, A(6) = 0

Aufgabe 5:

5.1. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = e^x - x - 5\,,\ g(x) = x^2 - 4$$

Zeichne beide Funktionen im Bereich -6≤x≤2. Bestimme die Nullstellen der Funktion f(x). Berechne exakt den Tiefpunkt von f(x). Zeige, dass f(x) immer links gekrümmt ist.

5.2. Zeige, dass sich die Funktionen f(x) und g(x) im Tiefpunkt von f(x) berühren.

5.3. Wie groß ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen f(x) und g(x) sowie der Geraden x = -4?

5.4. Wie groß ist die Fläche zwischen der Funktion f(x), deren Asymptote im Bereich -2≤x≤-1? Skizziere die Fläche in der Zeichnung.

5.5. Wie lauten die Schnittpunkte beider Funktionen f(x) und g(x)? Bestimme die maximale Differenz zwischen den Funktionen im Intervall zwischen den Schnittpunkten.

Lösungen: 5.1. N(-4,99|0), N(1,94|0); f‘(x)=0, f‘‘(0)>0 -> T(0|-4); f‘‘(x) > 0 -> Linkskrümmung /
5.2. f(0) = g(0) = -4, f‘(4) = g‘(4) = 0 /

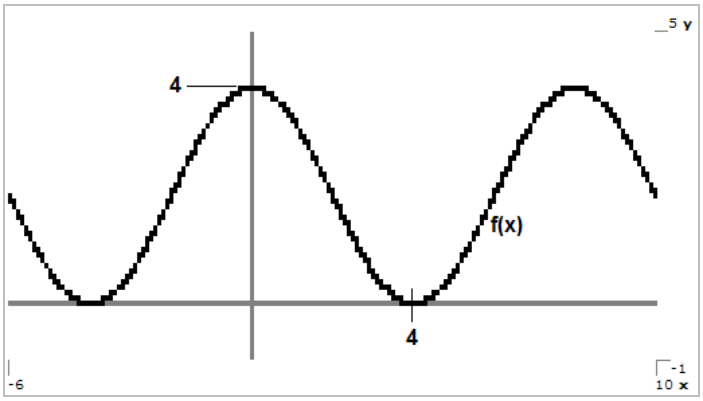
5.3. A = $\int_{-4}^{0} (g(x) - f(x))dx =$ 16,35 /

5.4. Asymptote y = -x–5, A = $\int_{-2}^{-1} (f(x) - y)dx =$ 0,23 /

5.5. Schnittpunkte T(0|-4), S(1,8|-0,78); d(x) = g(x) – f(x) -> Maximum bei x = 1,256 mit d_{max} = 0,3222

Aufgabe 6:

6.1. Bestimme aus der unten stehenden Zeichnung die Funktionsgleichung der trigonometrischen Funktion f(x).



6.2. Es sei:

$$f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{4}x) + 2\,,\ g(x) = -0{,}5x^2 + x + 4$$

Zeige, dass die Parabel die Kosinusfunktion in einem Hochpunkt und einem Tiefpunkt schneidet. Berechne mit Hilfe einer Stammfunktion den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Funktionen im 1. Quadranten des Koordinatensystems.

6.3. Gegeben ist die Funktion:

$$h(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{1}{2}$$

Zeige:

a) Die Funktion hat den Hochpunkt H(-1|0).
b) Die Funktion hat den Wendepunkt bei x = 2/3.
c) Die Funktion hat eine Nullstelle bei x = 4.

Stelle die Funktion h(x) in Produktform dar.

6.4. Wie groß ist die Fläche zwischen Funktion h(x) und der x-Achse? Rechne unter Angabe der Stammfunktion!

6.5. Die Gerade x = u, -1≤u≤4, teilt die Fläche zwischen der Funktion h(x) und der x-Achse in zwei gleiche Teile. Bestimme u.

Lösungen: 6.1. $f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{4}x) + 2$ /

6.2. $S_1(0|4)$, $S_2(4|0)$, A = $\int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{8}{\pi}\sin(\frac{\pi}{4}x)\right]_0^4 =$ 5,33 /

6.3. a) f(-1)=0, f'(-1)=0, f''(-1)<0; b) f''(2/3)=0, f'''(2/3)≠0; c) f(4)=0; f(x) = $(x+1)^2(x-4)/8$ /

6.4. -A = $\int_{-1}^4 h(x)dx = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{7}{16}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^4 =$ -6,51 -> A = 6,51 /

6.5. A/2 = 3,255 -> u = 2,072

Aufgabe 7:

7.1. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind:

a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens eine Nullstelle.
b) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat genau einen Wendepunkt.
c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 3 + e^{-0,5x}$ ist rechts gekrümmt.
d) Die Funktion $f(x) = 2x + \cos x$ ist stets monoton steigend.
e) Die Funktion $f(x) = \frac{3}{5}x^2(x+11)$ ist achsensymmetrisch.

7.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{17}{16}x^3 - 4x$$

Berechne exakt die Schnittpunkte zwischen der Funktion und der Normalen im Wendepunkt von f(x). Berechne mit Hilfe einer Stammfunktion die Fläche zwischen Funktion und Normale.

7.3. Zeige: Die Funktionen

$$g(x) = 6 - 2e^{-x} \text{ und } h(x) = 4\left(1 - \sin\left(\frac{x}{8}\right)\right)$$

schneiden sich auf der y-Achse senkrecht. Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Funktionen und der x-Achse eingeschlossen wird?

7.4. Für die Funktion

$$k(x) = e^x - \frac{e^4}{4}x$$

ist die mittlere Änderungsrate im Intervall [0; 4] zu bestimmen. An welcher Stelle hat die Funktion eine Steigung, die mit dieser mittleren Änderungsrate übereinstimmt. Wie lautet die Gerade durch die Punkte P(0|1) und Q(4|0), wie die dazu parallele Tangente an die Funktion?

Lösungen: 7.1. a) richtig; b) richtig; c) falsch; d) richtig; e) falsch /
7.2. Normale y = x/4; f(x)=y -> $S_1(-2|-0,5)$, $S_2(0|0)$, $S_3(2|0,5)$;
A = $2A_1$ mit $A_1 = \int_0^2 (y - f(x))dx = \left[-\frac{17}{64}x^4 + 2,125x^2\right]_0^2 = 4,25$ -> A = 8,5 /
7.3. g(0) = h(0) = 4, g‘(0)·h‘(0) = 2·(-1/2) = -1; a=-1,09, b=0, c=4π ->
$A_1 = \int_a^b g(x)dx = 2,59$, $A_2 = \int_b^c g(x)dx = 18,27$ -> A = A_1+A_2 = 20,86 /
7.4. m = -0,25, k‘(x) = -0,25 -> x_0 = 2,595 -> Tangente in x_0: y = -0,25x–21,37, Gerade: y = -0,25x+1

Aufgabe 8:

8.1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^x + x - 1$$

Zeige, dass gilt:

$$\int_0^2 (e^x + x - 1)dx = e^2 - 1$$

8.2. Wie groß ist die Fläche zwischen Funktion f(x) und deren Asymptote im Bereich der Geraden x = -2 und der y-Achse?

8.3. Die Funktion

$$g(t) = 113{,}1 - 98{,}2e^{-0{,}09t}\text{, } t \geq 0$$

beschreibt das (beschränkte) zeitliche Wachstum von Bakterien, die in einer kreisrunden Petrischale eine Fläche bedecken (t [h], g(t) [cm^2]). Beantworte folgende Fragen:

a) Wie groß ist die Fläche, die die Bakterien bei Beobachtungsbeginn bedecken?
b) Welche Fläche können die Bakterien maximal bedecken? Wie groß ist der Durchmesser der Petrischale?
c) Wie groß ist die bedeckte Fläche nach 5,5 Stunden?
d) Wann ist die halbe Fläche der Petrischale von Bakterien bedeckt?
e) Wie groß ist Zunahme der Bakterienfläche zum Zeitpunkt 10 Stunden?
f) Wie groß ist die durchschnittliche Änderung der Bakterienfläche in den ersten 15 Stunden?

8.4. Für die Exponentialfunktion

$$h(x) = ax + b + ce^{-0{,}5x}$$

sind die Koeffizienten a, b und c zu bestimmen. Dabei gilt:

a) Die Asymptote von h(x) geht durch die Punkte A(0|-2e) und B(2|0).
b) h(x) hat einen Tiefpunkt an der Stelle $x_0 = -2$.

Gib die Koordinaten des Tiefpunkts an. Bestimme die Nullstellen von h(x). Skizziere die Funktion im entscheidenden Bereich.

8.5. Bestimme den Term einer ganz rationalen Funktion in der Form

$$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

, deren Schaubild bei $N_1(-4|0)$ eine doppelte, bei $N_2(8|0)$ eine einfache Nullstelle besitzt und die y-Achse bei -8 schneidet.

Lösungen: 8.1. $\int_0^2 (e^x + x - 1)dx = \left[e^x + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 = (e^2 + 2 - 2) - (1 + 0 - 0) = e^2 - 1$ /

8.2. A = 0,8647 /

8.3. a) g(0)=14,9; b) A=113,1 -> d=12 cm; c) g(5,5)=53,24; d) g(t)=113,1/2=56,55 -> t=6,13;
e) g'(10)=3,59 cm^2/h; f) m = (g(15)-g(0))/(15-0) = 4,85 /

8.4. Asymptote y = ex–2e -> a=2, b=-2e, h'(x) = e-0,5ce$^{-0,5x}$ -> h'(-2) =0 -> c=2 -> h(x) = ex–2e+2e$^{-0,5x}$;
T(-2|-5,44), N(-4,3|9), N(1,68|0)

8.5. k(x) = $(x+4)^2(x-8)/16 = x^3/16 - 3x - 8$

Aufgabe 9:

9.1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 3 \cdot \cos(2x) + 5$$

Skizziere die Funktion im Intervall [-2; 4]. Berechne die dort auftretenden Hoch- und Tiefpunkte exakt. Zeige, dass die Funktion achsensymmetrisch ist.

9.2. Bestimme im ersten Wendpunkt der Funktion f(x) mit positiver x-Koordinate exakt Tangente und Normale an die Funktion. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, das durch x-Achse, Tangente und Normale begrenzt wird?

9.3. Auf dem Intervall [-2; 2] soll f(x) angenähert werden durch eine ganz rationale Funktion 4. Grades, die durch die Extrempunkte von f(x) verläuft. Berechne die Funktionsgleichung dieser ganz rationalen Funktion g(x).

9.4. Ergänze! Für die Funktion

$$g(x) = 0{,}9855x^4 - 4{,}863x^2 + 8$$

gilt:

a) g(x) ist monoton steigend für _____ < x < _____ oder x > _____.

b) g(x) hat die Steigung -2 bei x = _____, x = _____, x = _____.

c) Die Ableitung g'(x) hat Nullstellen bei x = _____, x = _____, x= _____.

d) Die Ableitung g'(x) ist negativ für x < _____ oder _____ < x < _____.

e) Die Ableitung g'(x) ist _____symmetrisch.

f) Die Stammfunktion G(x) hat an den Stellen x = _____, x = _____, x = _____ Wendepunkte.

g) Die Stammfunktion G(x) ist überall monoton _____.

h) Für die Stammfunktion G(x) gilt für x->∞: G(x) -> ____, für x-> -∞: G(x) -> ____.

i) Die Stammfunktion hat genau _____ Nullstelle/n.

Lösungen: 9.1. $T_1(-\pi/2|2)$, $H_1(0|8)$, $T_2(\pi/2|2)$, $H_2(\pi|8)$; f(-x) = f(x) /
9.2. W(π/4), t: y = -6x +3π/2 + 5, n: y = x/6 – π/24 + 5;
Nullstelle der Tangente: x_t = 1,6187, Nullstelle der Normale: x_n = -29,2088 ->
g = 30,8275, h = 5 -> A = 77,0688 /
9.3. Achsensymmetrie -> $g(x) = ax^4 + cx^2 + e$ mit g(0)=8, g(π/2)=2, g'(π/2)=0 ->
$g(x) = 0{,}9855x^4 - 4{,}863x^2 + 8$
9.4. a) –π/2<x<0, x>π/2; b) x=-1,665, x=0,218; c) x=-π/2, x=0, x=π/2; d) x<-π/2, 0<x<π/2;
e) punktsymmetrisch; f) x=-π/2, x=0, x=π/2; g) steigend; h) G(x) -> ∞, G(x) -> -∞; i) 1.

Aufgabe 10:

10.1. Die vier Punkte A(2|3|0), B(4|5|0), C(4|1|0) und S(0|0|6) bilden eine Dreieckspyramide mit Grundfläche ABC und Spitze S(0|0|6).

a) Zeichne die Pyramide ein in ein räumliches Koordinatensystem.

b) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

c) Berechne das Volumen der Dreieckspyramide.

d) Berechne im Mantelflächendreieck BCS den Winkel zwischen Seitenkante CS und Grundkante BC.

10.2. Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$ schneidet die Pyramidenkanten BS und CS in den Punkten T und U. Wie weit liegen die Punkte voneinander entfernt? Zeichne die Gerade g ein.

10.3. Gegeben ist die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$ für reelles a.

a) Wie muss a gewählt werden, damit die Gerade h durch die Pyramidenspitze läuft? Zeichne die Gerade h ein.

b) Zeige, dass für dieses a die Geraden g und h zueinander windschief sind.

c) Es ist a = 4,125. Zeige, dass sich die Geraden g und h schneiden. Gib den Schnittpunkt S an. Zeichne die neue Gerade h ein.

Lösungen: 10.1. b) α=90°, β=γ=45°, A = 4; c) V = 8; d) σ = 82,10°. /

10.2. Seitenkanten: $g_{BS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $g_{CS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ -> T(2|2,5|3) (t=0), U(3|0,75|1,5) (t=0,5) -> Abstand = 2,51. /

10.3. a) a=3 (t=2); b) g∩h = {}, g, h nicht parallel; c) lineares Gleichungssystem -> t=-3,4, u=3,2 -> S(-4,8|14,4|13,2)

Aufgabe 11:

11.1. Die Punkte A(4|4|4), B(8|3|-1), C(10|6|0) und D(6|7|5) bilden im räumlichen Koordinatensystem ein ebenes Viereck.

a) Zeichne das Viereck ABCD ein in räumliches Koordinatensystem.

b) Zeige, dass das Viereck ein Rechteck ist.

c) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks.

11.2. Durch die Punkte P(3|9|-2) und Q(9|3|4) verläuft eine Gerade g.

a) Bestimme die Geradengleichung und zeichne die Gerade in das räumliche Koordinatensystem.

b) Zeige: Die Gerade g verläuft senkrecht durch die Mitte des Rechtecks.

c) Wo schneidet die Gerade g die Grundebenen des Koordinatensystems (Spurpunkte)?

11.3. Die Punkte P und Q sind die Spitzen einer Doppelpyramide. Berechne das Volumen dieses Körpers und das Verhältnis der Rauminhalte beider Pyramidenteile. Zeichne die Doppelpyramide ein.

Lösungen: 11.1. b) $\vec{AB} = \vec{DC}$ -> Parallelogramm, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ -> Rechteck; c) Fläche G = $\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AD}\right|$ = 14√3. /

11.2. a) Gerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) Rechteckmitte M(7|5|2)εg (Punktprobe), $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{AC} = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{BD} = 0$

-> g ⊥ Rechteck; c) S_{23}(0|12|-5), S_{13}(12|0|7), S_{12}(5|7|0). /

11.3. h = $\left|\vec{PQ}\right|$ = 6√3, V = Gh/3 = 84; h_P = $\left|\vec{PM}\right|$ = 4√3, V_P = Gh_P/3 = 56, V_Q = 84–56 = 28 -> V_P:V_Q = 2:1.

Aufgabe 12:

12.1. Die drei Punkte A(4|0|0), B(4|6|0) und C(4|0|3) bilden die Seitenfläche eines Dreiecksprismas, das einen Türkeil aus weißem Kunststoff darstellt (alle Längeneinheiten im Zentimeter).

a) Zeichne die Punkte A, B und C ein in räumliches Koordinatensystem und ergänze das Dreiecksprisma durch die entsprechenden Punkte E, F und G, die die zweite Seitenfläche des Türkeils ausmachen und in der x_2-x_3-Ebene des Koordinatensystems liegen.

b) Wie groß ist der Neigungswinkel des Türkeils (Winkel bei B), wie groß sind Oberfläche und Volumen des Türkeils?

12.2. a) Von der Mitte M der Türkeilfläche AEGC wird ein Loch in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. zur Befestigung eines Griffs gebohrt. Im welchem Punkt N tritt die Bohrung aus dem Keil wieder heraus? Zeichne die Punkte M und N ein.

b) Mit Schrauben werden an den Punkten M und N zwei Metallstreifen befestigt, die jeweils zur oberen Türkeilecke G führen. Wie lang müssen die Metallstreifen mindestens sein? Wie groß ist der Winkel zwischen den Metallstreifen? Zeichne die Metallstreifen ein.

12.3. Im Punkt G wird ein Metallgriff befestigt, der im Punkt H(-2|-2|4) endet. Der Griff ist zylinderförmig und hat einen Durchmesser von 0,8 cm. Berechne das Volumen des Griffs. Zeichne den Griff ein.

Lösungen: 12.1. a) E(0|0|0), F(0|6|0), G(0|0|3); b) β=30°, G = 9 cm ^{2}, V = 36 cm^3. /

12.2. a) M(2|0|1,5), Gerade durch M und N: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, Spurpunkt auf x_2-x_3-Ebene: N(0|2|1,5) (t=2);

b) $\left|\vec{GM}\right| = \left|\vec{GN}\right| =$ 2,5 cm, γ = 68,90°. /

12.3. h = $\left|\vec{GH}\right| =$ 3 cm, r = 0,4 cm, V = 1,51 cm^3.

Aufgabe 13:

13.1. Bestimme, wenn möglich, die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} +\ 2x_1 - 3x_2 &= -4 \\ -\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} +\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ +\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ +\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} +\ 4x_1 - 3x_2 \qquad &= -2 \\ -\ 4x_1 \qquad + 2x_3 &= 2 \\ + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13.2. Löse mit E als Einheitsmatrix und den quadratischen Matrizen A, B, X gleicher Zeilen- und Spaltenzahl die nachstehende Matrizengleichung nach X auf:

$$A(X+2E) = B + 2A - 3X$$

Berechne X, wenn A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ gilt.

13.3. Gegeben sind die Rohstoffe R1, R2, R3, die Zwischenprodukte Z1, Z2 und die Endprodukte E1, E2, E3 und deren Produktionsbeziehungen untereinander:

A	Z1	Z2
R1	3	2
R2	0	3
R3	2	1

B	E1	E2	E3
Z1	2	1	3
Z2	4	3	2

a) Wie viel Rohstoffe und Zwischenprodukte werden benötigt, wenn folgende Mengen der Endprodukte hergestellt werden sollen? E1: 100, E2: 200, E3: 400. Wie lautet die Rohstoff-Endprodukt-Matrix?

b) Im Lager stehen folgende Mengen zur Verfügung: R1: 1200, R2: 720, R3: 720. Zeige, dass die Rohstoffe vollständig aufgebraucht werden, wenn von den Endprodukten die Mengen E1: 23, E2: 8, E3: 60 hergestellt werden.

c) Für die Endproduktmengen E1: 23, E2: 8, E3: 60 sind die Produktionskosten zu ermitteln, wenn folgende Fertigungskosten pro Mengeneinheit anfallen: R1: 3, R2: 2, R3: 4, Z1: 10, Z2: 20, E1: 5, E2: 10, E3: 10 €.

Lösungen: 13.1. a) $x_1=1$, $x_2=2$; b) keine Lösung; c) $x_1=-0{,}5+0{,}5t$, $x_2=2t/3$, $x_3=t$ /
13.2. Gleichungsumformungen -> $(A+3E)X = B$ -> $X = (A+3E)^{-1}X$ (falls invertierbar) ->

$$X = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ -0{,}5 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 & -3{,}25 & 7 \\ -0{,}75 & -3{,}75 & 4 \\ 2{,}5 & 3{,}5 & -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14:

14.1. Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 3 \\ +\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ +\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

14.2. a) Für die Matrizen A = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & 4 \\ 5 & b \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} c & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ und C = $\begin{pmatrix} -7 & d \\ 15 & e \\ f & -34 \end{pmatrix}$ gelte:

$$A \cdot B = C.$$

Bestimme rechnerisch die Zahlen a bis f.

b) Löse für B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0{,}5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und C = $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$BX = (E - B)X + C$$

nach der Matrix X auf.

14.3. Die Zweigwerke Z_1, Z_2 und Z_3 einer Unternehmung sind gemäß dem Leontiefmodell mit dem Markt verflochten.

a) Bestimme die Inputmatrix A, wenn gegeben ist:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}625 & 0{,}85 & -0{,}4 \\ -0{,}375 & -0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

b) Wie lautet der Konsumvektor, wenn die Zweigwerke Z_1 60 Mengeneinheiten (ME), Z_2 120 ME und Z_3 60 ME produzieren?

c) Bestimme, wie groß die Gesamtproduktion der Zweigwerke sein muss, wenn Z_1 20 ME, Z_2 40 ME und Z_3 25 Mengeneinheiten an den Markt abgibt. Wie sieht die diesbezügliche Verflechtungstabelle aus?

d) Wie stellt sich die Input-Output-Tabelle dar, wenn Zweigwerk Z_1 80 ME herstellt, die Zweigwerke Z_2 und Z_3 gleich viel produzieren und die Marktabgabe von Zweigwerk Z_2 40 ME beträgt.

Lösungen: 14.1. x_1=0,50,5t, x_2=0,5+0,5t, x_3=t /

14.2. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 15 & -22 \\ 23 & -34 \end{pmatrix}$ / 11.2b) (2B–E)X = C -> X = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ /

14.3. a) A = $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}625 & 0{,}15 & 0{,}4 \\ 0{,}375 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ / b) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 80 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix}$ /

c) Verflechtungstabelle:

	Z_1	Z_2	Z_3	K	P
Z_1	10	10	0	20	40
Z_2	25	15	20	40	100
Z_3	15	5	5	25	50

d) Ansatz: $\vec{y} = (E - A)\vec{x}$ -> $\begin{pmatrix} y_1 \\ 40 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}625 & 0{,}85 & -0{,}4 \\ -0{,}375 & -0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ x \\ x \end{pmatrix}$ -> x = 200, y_1 = 40, y_2 = 140 ->

Verflechtungstabelle:

	Z_1	Z_2	Z_3	K	P
Z_1	20	20	0	40	80
Z_2	50	30	80	40	200
Z_3	30	10	20	140	200

Aufgabe 15:

15.1. Eine Rubbelkarte besteht aus 9 Feldern, die zweimal mit „5“ und einmal „20“ belegt sind, ansonsten aber leer bleiben. Ein Lotteriespiel besteht darin, dass zwei Felder der Karte aufgerubbelt werden. Der Gewinn ist die Summe der aufgerubbelten Zahlen in Euro. Der Einsatz beträgt € 8,-. Mit welchem Gewinn oder Verlust kann ein Spieler im Durchschnitt rechnen? Wie lässt sich das 20-€-Feld abändern, damit das Spiel fair ist?

15.2. Ein positiver Gewinn ergibt sich beim Spielen mit der Rubbelkarte unter den anfangs genannten Bedingungen nur, wenn ein Betrag über € 8,- gewonnen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür? Wenn ein Spieler drei Rubbelkarten kauft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er

1) genau eine Karte mit positivem Gewinn
2) genau zwei Karten mit positivem Gewinn
3) höchstens vier Karten mit positivem Gewinn
4) mehr als eine Karte mit positivem Gewinn

errubbelt? Von welcher Anzahl von Rubelkarten mit positivem Gewinn kann durchschnittlich ausgegangen werden?

15.3. Für den Kauf von fünf Rubbelkarten zieht ein Spieler am Geldautomaten einen Betrag von € 100,-. Welche im Übrigen als gleich wahrscheinlich angenommenen Kombinationen von 10-, 20- und 50-Euroscheinen sind möglich? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann der Spieler beim Kauf der Rubbelkarten passend zahlen?

15.4. Die Rubbelkarten sollen bei einer Tombola als Gewinne verwendet werden. Sie werden unter die Nieten gemischt. Dabei soll es insgesamt 25 Lose geben. Wie groß muss der Anteil der Gewinnlose und der Nieten sein, damit bei zweimaligem Ziehen die Wahrscheinlichkeit, genau ein Rubbellos zu ziehen, anfangs 1/3 beträgt?

Lösungen: 15.1. Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse: p(L,L)=30/72, P(L,5)=12/72, p(L,20)=6/72, p(5,L)=12/72, p(5,5)=2/72, p(5,20)=2/72, p(20,L)=6/72, p(20,5)=2/72 (Experiment „ohne Zurücklegen“); p(5)=24/72, p(10)=2/72, p(20)=12/72, p(25)=4/72 -> E(X) = 480/72–8 = -1,33 €;
p(x)=12/72, p(x+5)=4/72, E(X) = 0 -> 120+20+12x+4(x+5) = 8·72 -> x=26 /
15.2. p(positiver Gewinn) = 18/72 = 1/4; Bernoulli-Experiment mit n=3, p=1/4; E(X) = 0,75 /

15.3. Tabelle:

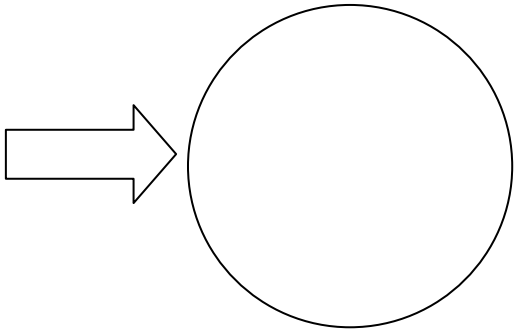
10-	20-	50-	€-Scheine
10			100,- €
8	1		100,- €
6	2		100,- €
5		1	100,- €
4	3		100,- €
3	1	1	100,- €
2	4		100,- €
1	2	1	100,- €
	5		100,- €
		2	100,- €

Gesamtanzahl: 10, 5·8 € = 40 € bei 9 Kombinationen möglich -> p = 0,9 /

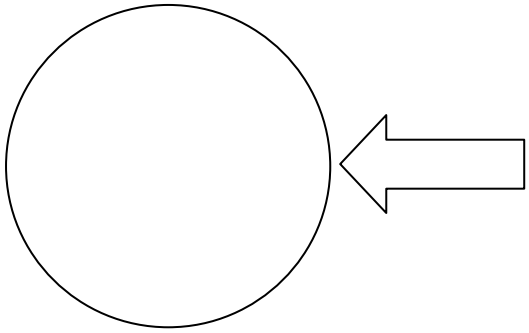
15.4. 5 Rubbellose, 20 Nieten -> Anteile 1/5, 4/5.

Aufgabe 16:

16.1. Zwei Glücksräder sind jeweils in drei verschiedenfarbige Sektoren unterteilt. Glücksrad 1 besteht aus den Sektoren Blau, Rot (36°) und Grün (144°), Glücksrad 2 aus den Sektoren Schwarz, Rot (72°) und Grün (108°) (Sektorenwinkel in Klammern). Die Glücksräder werden unabhängig voneinander jeweils einmal gedreht. Es gilt die Farbe, auf die bei Stillstand des jeweiligen Glücksrads der Pfeil zeigt.



Glücksrad 1



Glücksrad 2

a) Zeichne die Sektoren in die Glücksräder ein.

b) Zeichne ein Baumdiagramm und ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C mit:

A: Es wird zweimal Grün gedreht.
B: Mindestens ein Pfeil zeigt auf Rot.
C: Es werden verschiedene Farben angezeigt.

16.2. Ein Spieler dreht jeweils beide Glücksräder. Bei einem Einsatz von € 1,- gewinnt er € 2,-, wenn einmal die Farbe Rot erscheint, den Hauptgewinn in Höhe von € 5,-, wenn die Farbe Rot zweimal angezeigt wird.

a) Wie viel gewinnt oder verliert der Spieler im Durchschnitt pro Spiel?

b) Wie groß müsste der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

c) Wie groß müsste der Hauptgewinn sein, damit der Spielbetreiber in 20 Spielen durchschnittlich € 10,- Gewinn macht?

16.3. Das Spiel wird nun fünf Mal wiederholt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

1) keinen Hauptgewinn
2) genau einen Hauptgewinn
3) mindestens zwei Hauptgewinne

zu erzielen?

b) Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für zweimal Rot sein, damit die Wahrscheinlichkeit für genau einen Hauptgewinn 20% beträgt? Errechne für eine der gefundenen Wahrscheinlichkeiten den dazugehörigen Sektorenwinkel für Rot beim Glücksrad 1, wenn der Sektorenwinkel für Rot beim Glücksrad 2 gleich bleiben soll.

Lösungen: 16.1. a) Glücksrad 1: p(b) = 1/2, p(r) = 1/10, p(g) = 2/5; Glücksrad 2: p(s) = 1/2, p(r) = 1/5, p(g) = 3/10; b) p(bs) = 1/4, p(br) = 1/10, p(bg) = 3/20, p(rs) = 1/20, p(rr) = 1/50, p(rg) = 3/100, p(gs) = 1/5, p(gr) = 2/25, p(gg) = 6/50; c) p(A) = 6/50, p(B) = 18/25, p(C) = 43/50. /
16.2. a) X = Zufallsvariable Brutto-/Nettogewinn -> E(X) = 2·13/50 + 5·1/50 – 1 = -0,38 €; b) e = 0,62; c) E(X) = 2·13/50 + x·1/50 – 1 = 0 -> x = 24. /
16.3. a) p(0xH) = 0,9039, p(1xH) = 0,0922, p(mindestens 2xH) = 0,0039; b) $5p(1-p)^4 = 0,2$ -> p = 0,05 (auch p=0,46) -> p(rr) = 0,05 -> Glücksrad 1: p(r) = 0,25 -> Winkel α=90°.

Aufgabe 17:

17.1. Aus dem Folgenden ist die Erlös- und Gesamtkostenfunktion E(x) und K(x) eines Unternehmens am Markt zu ermitteln (x als Unternehmensoutput in ME (Mengeneinheiten)). Die Erlösfunktion ist dabei vom Typ E(x) = px, die Kostenfunktion K(x) ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades.

a) Der Marktpreis beträgt 36 GE (Geldeinheiten).
b) Die fixen Kosten sind 40 GE hoch.
c) Bei 2 ME betragen die variablen Stückkosten 42 GE.
d) Das Betriebsminimum liegt bei 7 ME, die kurzfristige Preisuntergrenze ist 17 GE groß.
e) Bei 5 ME beträgt der Gewinn 35 GE.

17.2. Gegeben sind die Erlös- und die Kostenfunktion:

$$E(x) = 36x\,,\ K(x) = x^3 - 14x^2 + 66x + 40$$

Skizziere die Erlös- und die Kostenfunktion für 0 ≤ x ≤ 11.

17.3. Erzielt das Unternehmen bei einer Produktion von 3 ME einen Gewinn? Bestimme die Nutzenschwelle und die Nutzengrenze.

17.4. Bestimme das Gewinnmaximum und die gewinnmaximale Produktionsmenge.

17.5. Bestimme grafisch und rechnerisch das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.

17.6. Das Unternehmen stellt Gartenmöbel her. Dem entsprechend verteilen sich die monatlichen Umsatzzahlen (1000 GE) wie folgt:

Januar: 18
Februar: 28
März: 73
April: 85
Mai: 128
Juni: 140
Juli: 145
August: 138
September: 91
Oktober: 34
November: 9
Dezember: 5

Stelle die Umsatzzahlen in einem Histogramm dar. Ermittle den durchschnittlichen monatlichen Umsatz.

17.7. Welche Normalverteilung kann man den Umsatzzahlen des Unternehmens zugrunde legen? Berechne mit Hilfe der Normalverteilung den Umsatz für die Monate März bis Mai bzw. August bis September und vergleiche mit den vorgegebenen Umsatzzahlen.

Lösungen: 17.1. p = 36; 4a + 2b + c = 42, 49a + 7b + c = 17, 125a + 25b + 5c = 105 ->
a = 1, b = -14, c = 66, d = 40 -> $K(x) = x^3 - 14x^2 + 66x + 40$
17.3. G(3) = -21 < 0 -> Verlust; Nutzenschwelle (break even point): x = 4, Nutzengrenze: x = 10,9 /
17.4. Gewinnmaximale Menge: x = 8,1, G(8,1) = 104,1 /
17.5. Betriebsoptimum: x = 7,37, p_{lf} = 22,56

Aufgabe 18:

18.1. Ein Unternehmen in einem Angebotsmonopol hat als von einer Ausbringungsmenge x abhängige Gesamtkostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 4x^2 + 12x + 32$$

sowie die Preis-Absatzfunktion:

$$p(x) = -4x + 52$$

Bestimme kostenseitig die Fixkosten, die Gesamtkosten bei einer Ausbringungsmenge x = 6, die variablen Stückkosten bei einer Ausbringungsmenge x = 4, die Ausbringungsmenge mit minimalen Kostenzuwachs, das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze, das Betriebsoptimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

18.2. Bestimme die Erlösfunktion des Unternehmens. Wo befindet sich das Erlösmaximum? Wie lautet die Gewinnzone zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze? Bei welcher Ausbringungsmenge liegt das Gewinnmaximum? Wie hoch ist der maximale Gewinn? Wie lautet der Cournotsche Punkt?

18.3. Die Gewinnzone soll auf das Intervall [0,5; 6,5] vergrößert werden. Dazu soll die Kostenfunktion modifiziert werden und lautet nun:

$$K_1(x) = x^3 - 4x^2 + cx + d$$

Bestimme c und d. Was bedeutet dies? Wo liegt nun das Gewinnmaximum? Um wie viel Prozent hat sich der maximale Gewinn vergrößert?

18.4. Es gilt wieder die ursprüngliche Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 4x^2 + 12x + 32$$

Durch Veränderungen am Markt ändert sich die Preis-Absatzfunktion, so dass das Erlösmaximum nun bei H(5|100) liegt. Wie lautet die Preis-Absatzfunktion? Wie groß ist nun die Gewinnzone, wo liegt das Gewinnmaximum?

Lösungen: 18.1. K(6) = 176, K_{fix} = 32, $k_{var}(4)$ = 12, x = 4/3, x_{min}=2 -> p_{kf} = 8, x_{max}=3,4 -> p_{lf} = 19,37 /
18.2. E(x) = $-4x^2+52x$ mit Hochpunkt H(6,5|169); E(x)=K(x) -> x = 0,82, x = 5,88; x_m = 3,65 -> G_{max} = 65,37; C(3,65|37,4) /
18.3. $K_1(0,5)=E(0,5)=25$, $K_1(6,5)=E(6,5)=169$ -> c=6,25, d=22,75 -> $K_1(x) = x^3-4x^2+6,25x+22,75$; Kostensenkung bei Fix- und variablen Kosten; x_m = 3,9, G_{max} = 96,36; 47,4% /
18.4. $E_1(5)=100$, $E_1'(5)=0$ -> $E_1(x) = -4x^2+40x$ -> $p_1(x) = -4x+40$; $1,2 \leq x \leq 4,58$; x_m = 3,05 -> G_{max} = 25,03

Wahrscheinlichkeitstafel: Normalverteilung N(0,1)

x|Φ(x)	_9	_8	_7	_6	_5	_4	_3	_2	_1	_0	x|Φ(x)
-3.5_	0.000115	0.000127	0.000139	0.000150	0.000162	0.000173	0.000183	0.000194	0.000205	0.000216	**-3.5_**
-3.4_	0.000227	0.000237	0.000248	0.000260	0.000271	0.000283	0.000295	0.000307	0.000319	0.000332	**-3.4_**
-3.3_	0.000345	0.000359	0.000372	0.000387	0.000401	0.000417	0.000432	0.000448	0.000465	0.000482	**-3.3_**
-3.2_	0.000500	0.000518	0.000537	0.000556	0.000576	0.000597	0.000618	0.000640	0.000663	0.000687	**-3.2_**
-3.1_	0.000711	0.000736	0.000762	0.000789	0.000816	0.000845	0.000874	0.000904	0.000935	0.000968	**-3.1_**
-3.0_	0.001001	0.001035	0.001070	0.001107	0.001144	0.001183	0.001223	0.001264	0.001306	0.001350	**-3.0_**
-2.9_	0.001395	0.001441	0.001489	0.001538	0.001589	0.001641	0.001695	0.001750	0.001807	0.001866	**-2.9_**
-2.8_	0.001926	0.001988	0.002052	0.002118	0.002186	0.002256	0.002327	0.002401	0.002477	0.002555	**-2.8_**
-2.7_	0.002635	0.002718	0.002803	0.002890	0.002980	0.003072	0.003167	0.003264	0.003364	0.003467	**-2.7_**
-2.6_	0.003573	0.003681	0.003793	0.003907	0.004025	0.004145	0.004269	0.004396	0.004527	0.004661	**-2.6_**
-2.5_	0.004799	0.004940	0.005085	0.005234	0.005386	0.005543	0.005703	0.005868	0.006037	0.006210	**-2.5_**
-2.4_	0.006387	0.006569	0.006756	0.006947	0.007143	0.007344	0.007549	0.007760	0.007976	0.008198	**-2.4_**
-2.3_	0.008424	0.008656	0.008894	0.009137	0.009387	0.009642	0.009903	0.010170	0.010444	0.010724	**-2.3_**
-2.2_	0.011011	0.011304	0.011604	0.011911	0.012224	0.012545	0.012874	0.013209	0.013553	0.013903	**-2.2_**
-2.1_	0.014262	0.014629	0.015003	0.015386	0.015778	0.016177	0.016586	0.017003	0.017429	0.017864	**-2.1_**
-2.0_	0.018309	0.018763	0.019226	0.019699	0.020182	0.020675	0.021178	0.021692	0.022216	0.022750	**-2.0_**
-1.9_	0.023295	0.023852	0.024419	0.024998	0.025588	0.026190	0.026803	0.027429	0.028067	0.028717	**-1.9_**
-1.8_	0.029379	0.030054	0.030742	0.031443	0.032157	0.032884	0.033625	0.034380	0.035148	0.035930	**-1.8_**
-1.7_	0.036727	0.037538	0.038364	0.039204	0.040059	0.040930	0.041815	0.042716	0.043633	0.044565	**-1.7_**
-1.6_	0.045514	0.046479	0.047460	0.048457	0.049471	0.050503	0.051551	0.052616	0.053699	0.054799	**-1.6_**
-1.5_	0.055917	0.057053	0.058208	0.059380	0.060571	0.061780	0.063008	0.064255	0.065522	0.066807	**-1.5_**
-1.4_	0.068112	0.069437	0.070781	0.072145	0.073529	0.074934	0.076359	0.077804	0.079270	0.080757	**-1.4_**
-1.3_	0.082264	0.083793	0.085343	0.086915	0.088508	0.090123	0.091759	0.093418	0.095098	0.096800	**-1.3_**
-1.2_	0.098525	0.100273	0.102042	0.103835	0.105650	0.107488	0.109349	0.111232	0.113139	0.115070	**-1.2_**
-1.1_	0.117023	0.119000	0.121000	0.123024	0.125072	0.127143	0.129238	0.131357	0.133500	0.135666	**-1.1_**
-1.0_	0.137857	0.140071	0.142310	0.144572	0.146859	0.149170	0.151505	0.153864	0.156248	0.158655	**-1.0_**
-0.9_	0.161087	0.163543	0.166023	0.168528	0.171056	0.173609	0.176186	0.178786	0.181411	0.184060	**-0.9_**
-0.8_	0.186733	0.189430	0.192150	0.194895	0.197663	0.200454	0.203269	0.206108	0.208970	0.211855	**-0.8_**
-0.7_	0.214764	0.217695	0.220650	0.223627	0.226627	0.229650	0.232695	0.235762	0.238852	0.241964	**-0.7_**
-0.6_	0.245097	0.248252	0.251429	0.254627	0.257846	0.261086	0.264347	0.267629	0.270931	0.274253	**-0.6_**
-0.5_	0.277595	0.280957	0.284339	0.287740	0.291160	0.294599	0.298056	0.301532	0.305026	0.308538	**-0.5_**
-0.4_	0.312067	0.315614	0.319178	0.322758	0.326355	0.329969	0.333598	0.337243	0.340903	0.344578	**-0.4_**
-0.3_	0.348268	0.351973	0.355691	0.359424	0.363169	0.366928	0.370700	0.374484	0.378280	0.382089	**-0.3_**
-0.2_	0.385908	0.389739	0.393580	0.397432	0.401294	0.405165	0.409046	0.412936	0.416834	0.420740	**-0.2_**
-0.1_	0.424655	0.428576	0.432505	0.436441	0.440382	0.444330	0.448283	0.452242	0.456205	0.460172	**-0.1_**
-0.0_	0.464144	0.468119	0.472097	0.476078	0.480061	0.484047	0.488034	0.492022	0.496011	0.500000	**-0.0_**
0.0_	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856	**0.0_**
0.1_	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345	**0.1_**
0.2_	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092	**0.2_**
0.3_	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732	**0.3_**
0.4_	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933	**0.4_**
0.5_	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405	**0.5_**
0.6_	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903	**0.6_**
0.7_	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236	**0.7_**
0.8_	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267	**0.8_**

0.9_	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913	**0.9_**
1.0_	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143	**1.0_**
1.1_	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977	**1.1_**
1.2_	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475	**1.2_**
1.3_	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736	**1.3_**
1.4_	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888	**1.4_**
1.5_	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083	**1.5_**
1.6_	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486	**1.6_**
1.7_	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273	**1.7_**
1.8_	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621	**1.8_**
1.9_	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705	**1.9_**
2.0_	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691	**2.0_**
2.1_	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738	**2.1_**
2.2_	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989	**2.2_**
2.3_	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576	**2.3_**
2.4_	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613	**2.4_**
2.5_	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201	**2.5_**
2.6_	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427	**2.6_**
2.7_	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365	**2.7_**
2.8_	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074	**2.8_**
2.9_	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605	**2.9_**
3.0_	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999	**3.0_**
3.1_	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289	**3.1_**
3.2_	0.999313	0.999337	0.999360	0.999382	0.999403	0.999424	0.999444	0.999463	0.999482	0.999500	**3.2_**
3.3_	0.999518	0.999535	0.999552	0.999568	0.999583	0.999599	0.999613	0.999628	0.999641	0.999655	**3.3_**
3.4_	0.999668	0.999681	0.999693	0.999705	0.999717	0.999729	0.999740	0.999752	0.999763	0.999773	**3.4_**
3.5_	0.999784	0.999795	0.999806	0.999817	0.999827	0.999838	0.999850	0.999861	0.999873	0.999885	**3.5_**
x|Φ(x)	**_0**	**_1**	**_2**	**_3**	**_4**	**_5**	**_6**	**_7**	**_8**	**_9**	**x|Φ(x)**