Michael Buhlmann

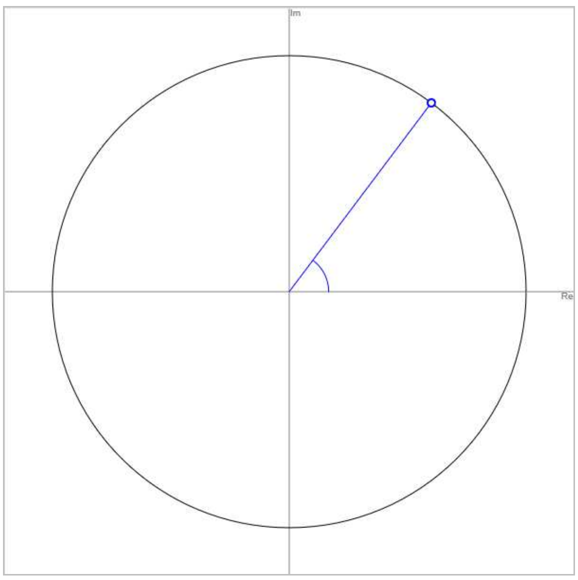
Mathematik > Komplexe Zahlen, Fundamentalsatz der Algebra, Einheitswurzeln

Carl Friedrich Gauß

Der Mathematiker und Gelehrte Carl Friedrich Gauß (*1777-†1855) studierte nach Schulausbildung und Abitur am Collegium Carolinum Braunschweig (1792-1795) und an der Universität Göttingen Mathematik (1795-1798); die Promotion erfolgte 1799, die Promotionsarbeit beschäftigte sich mit den komplexen Zahlen. Einen gewissen Abschluss fand diese erste Phase von Gauß' Forschungen über Analysis und Geometrie (1790/1800) in den *Disquisitiones Arithmeticae* (1801; daneben: Methode der kleinsten Quadrate ab 1789, geometrische Konstruktion des regulären 17-Ecks 1796, Osterfestberechnung 1800/02/07). In den folgenden Jahrzehnten (1800/20) wandte sich der auch praktisch veranlagte Gauß der Astronomie und Geodäsie zu (Landvermessungen ab 1799, Planetoidenentdeckungen 1801/07, *Theoria Motus* 1809, „Über die hypergeometrische Reihe“ 1813). 1805 wurde Gauß Professor für Astronomie an der Universität Göttingen und Direktor der dortigen (zunächst noch im Bau befindlichen) Sternwarte (astronomische Hilfstafeln 1808/12, Refraktionstafeln 1822). Die Beschäftigung mit der Geodäsie und dem Erdmagnetfeld (1820/45) führte zu Erkenntnissen bei der Erdabplattung (Geoid, 1828); 1829 veröffentlichte der Gelehrte die Schriften „Die allgemeinen Grundlagen der Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustand“ und „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“ (Prinzip des kleinsten Zwangs); 1831 erschien Gauß' „Theorie der biquadratischen Reste“ zu den komplexen Zahlen. Ausfluss von Gauß' Beschäftigung mit dem Elektromagnetismus war u.a. die telegrafische Göttinger Drahtverbindung von 1833. 1843 und 1846 folgten noch zwei „Untersuchungen über Gegenstände der Geodäsie“. Nach seinem Tod wurde Gauß als *princeps mathematicorum* gewürdigt (1855).

Komplexe Zahlen

Die Erweiterung der reellen Zahlen **R** mit i = $\sqrt{-1}$ als imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ führt auf die komplexen Zahlen **C**, die wir als Paar von reellen Zahlen (a, b) = a + ib identifizieren und auf der Gaußschen Zahlenebene als Vektoren darstellen können. Die <u>Gaußsche Zahlenebene</u> (v.1811) ist die Anordnung der komplexen Zahlen in einem kartesischen x-y-Koordinatensystem, wobei die x-Achse den reellen Anteil einer <u>komplexe Zahl</u> z = a + ib, also Re(z) = a, die y-Achse den imaginären, also Im(z) = b, wiedergibt:



Der Eintrag einer komplexen Zahl z = a + ib als zweidimensionaler Vektor (a, b) bzw. als geordnetes reelles Zahlenpaar der Gaußschen Zahlenebene lässt zudem einige Eigenschaften von komplexen Zahlen erkennen:

z = a + ib (Darstellung in kartesischen Koordinaten)
a = Re(z) (Realteil der komplexen Zahl)
b = Im(z) (Imaginärteil der komplexen Zahl)
-z = -a – ib (Gegenzahl)

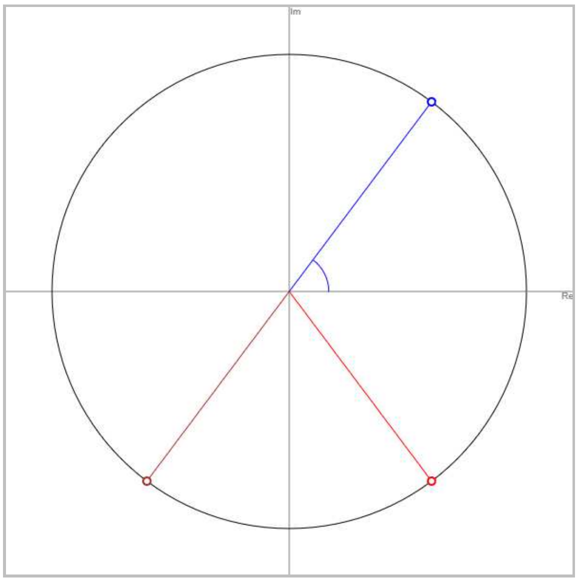
$\bar{z}$ = a – ib (konjugiert-komplexe Zahl)

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Betrag der komplexen Zahl)

$\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) = \arg z$ (Winkel, Argument der komplexen Zahl)

$z = r \cdot e^{i\varphi}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (Exponentialform, trigonometrische Form;
Eulersche Gleichung: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$).

Konjugiert-komplexe Zahl $\bar{z}$ = a – ib und Gegenzahl -z = -a – ib einer komplexen Zahl z = a + ib ergeben sich auf der Gaußschen Zahlenebene durch Spiegelung an der x-Achse bzw. durch Punktspiegelung um den Koordinatenursprung:



Die komplexen Zahlen **C** bilden bzgl. Addition + und Multiplikation · einen Zahlenkörper, d.h. es gelten die vom Reellen her bekannten Gesetzmäßigkeiten vermöge der Grundrechenarten für komplexe Zahlen z = z_1 = a + ib, z_2 = c + id:

$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$
$z_1 – z_2 = (a-c) + i(b-d)$
$z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$
$z_1/z_2 = (a+ib)/(c+id) = (a+ib)(c-id)/[(c+id)(c-id)] = [ac-iad+ibc-i^2bd]/(c^2-i^2d^2) =$
$[(ac+bd)+i(bc-ad)]/(c^2+d^2) = (ac+bd)/(c^2+d^2) + i(bc-ad)/(c^2+d^2)$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Auf der Grundlage der dargelegten Rechenarten bestimmen sich die komplexen Zahlen wie folgt als Körper (**C**, +, ·):

a) (**C**, +) ist eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung „+“ (Addition) mit neutralem Element 0 (= 0 + 0·i), inversen Elementen (als Gegenzahl -z = -a–bi zu z = a+bi), Assoziativgesetz $((z_1+z_2) + z_3 = z_1 + (z_2+z_3))$ und Kommutativgesetz $(z_1 + z_2 = z_2 + z_1)$.
b) (**C**\{0}, ·) ist eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung „·“ (Multiplikation) mit neutralem Ele-

ment 1 (= 1 + 0·i), inversen Elementen (als Gegenzahl $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ zu z), Assoziativgesetz (($z_1 \cdot z_2$) · z_3 = z_1 · ($z_2 \cdot z_3$)) und Kommutativgesetz ($z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$).

c) Die Verknüpfungen „+" und „·" sind verbunden über die Distributivgesetze ($z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ bzw. $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$).

Zu den Grundrechenarten und einigen weiterführenden Rechnungen sei hier das folgende Beispiel aufgeführt:

1. komplexe Zahl: **z_1** = 3 + 4*i = 5*(cos(0.9273)+i*sin(0.9273)) = 5*(cos(53.1301°)+i*sin(53.1301°))
Real-, Imaginärteil: Re z_1 = 3, Im z_1 = 4; Betrag: $|z_1| = r_1$ = 5, Winkel: φ_1 = 53.1301°
Konjugiert-komplexe Zahl: z_1^- = 3 - 4*i = 5*(cos(5.35589)+i*sin(5.35589)) = 5*(cos(306.8699°)+i*sin(306.8699°))
Gegenzahl: -z = -3 - 4*i = 5*(cos(4.06889)+i*sin(4.06889)) = 5*(cos(233.1301°)+i*sin(233.1301°))

2. komplexe Zahl: **z_2** = -1 + 1*i = 1.41421*(cos(2.35619)+i*sin(2.35619)) = 1.41421*(cos(135°)+i*sin(135°))
Real-, Imaginärteil: Re z_2 = -1, Im z_2 = 1; Betrag: $|z_2| = r_2$ = 1.41421, Winkel: φ_2 = 135°
Konjugiert-komplexe Zahl: z_2^- = -1 - 1*i = 1.41421*(cos(3.92699)+i*sin(3.92699)) = 1.41421*(cos(225°)+i*sin(225°))
Gegenzahl: -z = 1 - 1*i = 1.41421*(cos(5.49779)+i*sin(5.49779)) = 1.41421*(cos(315°)+i*sin(315°))

Addition: **$z_1 + z_2$** = 2 + 5*i = 5.38516*(cos(1.19029)+i*sin(1.19029)) = 5.38516*(cos(68.19859°)+i*sin(68.19859°)); Betrag: |z| = r = 5.38516, Winkel: φ = 68.19859°

Subtraktion: **$z_1 - z_2$** = 4 + 3*i = 5*(cos(0.6435)+i*sin(0.6435)) = 5*(cos(36.8699°)+i*sin(36.8699°)); Betrag: |z| = r = 5, Winkel: φ = 36.8699°

Multiplikation: **$z_1 * z_2$** = -7 - 1*i = 7.07107*(cos(3.28349)+i*sin(3.28349)) = 7.07107*(cos(188.1301°)+i*sin(188.1301°)); Betrag: |z| = r = 7.07107, Winkel: φ = 188.1301°

Division: **z_1 / z_2** = 0.5 - 3.5*i = 3.53553*(cos(4.85429)+i*sin(4.85429)) = 3.53553*(cos(278.1301°)+i*sin(278.1301°)); Betrag: |z| = r = 3.53553, Winkel: φ = 278.1301°

Potenzieren: **z_1^{z2}** = 0.06142 + 0.04988*i = 0.07912*(cos(0.68214)+i*sin(0.68214)) = 0.07912*(cos(39.0839°)+i*sin(39.0839°)); Betrag: |z| = r = 0.07912, Winkel: φ = 39.0839°

Logarithmieren: **$\log_{z2} z_1$** = 0.48357 - 0.61194*i = 0.77994*(cos(5.38114)+i*sin(5.38114)) = 0.77994*(cos(308.31652°)+i*sin(308.31652°)); Betrag: |z| = r = 0.77994, Winkel: φ = 308.31652°

(**C**, +, ·) ist (ein kommutativer Ring und) ein Körper. Die algebraische Struktur (**C**, +, ·) ist – anders als bei den reellen Zahlen – auch algebraisch abgeschlossen, d.h. es gilt der algebraische Hauptsatz der komplexen Zahlen oder Fundamentalsatz der Algebra, wonach jedes komplexe Polynom $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ mit komplexen Zahlen a_0, a_1, … a_n und $a_n \neq 0$ (f(z) hat also den Grad n≥1) mindestens eine Nullstelle z_0 (mit $f(z_0) = 0$) besitzt.

Fundamentalsatz der Algebra

Wir betrachten im Folgenden zunächst reellwertige ganz rationale Funktionen vom Typ $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, … a_n, $a_n \neq 0$, n als Grad der ganz rationalen Funktion. Die „Erfindung" der komplexen Zahlen hängt dann auch mit der Bestimmung von Nullstellen x_0 solcher Funktionen zusammen (mit: $f(x_0) = 0$). Denn nicht jede reellwertige ganz rationale Funktion besitzt Nullstellen wie das Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$ zeigt. Nullsetzen des Funktionsterms führt nämlich auf die im Reellen nicht lösbare Gleichung:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$.

Anders sieht es aus, wenn komplexe Zahlen x vorausgesetzt werden. Dann kann weitergerechnet werden:

$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Zu erkennen ist zudem, dass mit der komplexen Zahl i auch die konjugiert-komplexe Zahl -i eine Lösung der Nullstellengleichung ist. Komplexe Lösungen treten mithin immer paarweise auf. Aus den Lösungen ergibt sich zudem die Darstellung der ganz rationalen Funktion $f(x) = x^2 + 1$ in der Produktform, denn gemäß der 3. binomischen Formel (für komplexe Zahlen) folgt:

$f(x) = x^2 + 1 = x^2 – (-1) = x^2 – i^2 = (x–i)(x+i)$.

Während die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Reellen also keine sog. Linearfaktorzerlegung besitzt, gilt dies sehr wohl im Komplexen.

Das einführende Beispiel gibt Anlass zu den folgenden Überlegungen, die Carl Friedrich Gauß im Jahr 1799 in seiner Dissertation *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* („Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale algebraische Funktion in einer Variablen in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann“) formuliert hatte. Gauß nahm damals Vermutungen und (zum Teil unvollständige) Beweise der Mathematiker Francois Viète (†1603), Peter Roth (†1617), Leonhard Euler (†1783) oder Jean d’Alembert (†1783) auf und bewies die Faktorzerlegung reellwertiger ganz rationaler Funktionen in lineare und quadratische Terme, d.h.:

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (x - x_k)^{r_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{s_1} \cdot ... \cdot (x^2 + b_l x + c_l)^{s_l}$$

mit: natürlichen Zahlen r_1, … r_k, s_1, … s_l, $r_1+…+r_k+s_1+…+s_l = n$, $x^2+b_1x+c_1$, … $x^2+b_lx+c_l$ als im Reellen irreduzible (nicht weiter zerlegbare) quadratische Terme, $0≤k, l≤n$. Die Zahlen x_1, … x_k sind die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen der ganz rationalen Funktion f(x) mit ihren Vielfachheiten r_1, … r_k und bilden die (Potenzen von) Linearfaktoren in der Faktorzerlegung der Funktion f(x). Die (Potenzen von) quadratischen Faktoren $x^2+b_1x+c_1$, … $x^2+b_lx+c_l$ können im Komplexen zerlegt werden. Ist nämlich x^2+bx+c solch ein quadratischer Faktor, so gilt:

$$x^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{-(4c - b^2)}}{2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4c - b^2}}{2} = \frac{-b}{2} \pm i\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}.$$

Damit ergibt sich die komplexzahlige Zerlegung:

$$x^2+bx+c = \left(x - \frac{b}{2} - i\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} \right)\left(x - \frac{b}{2} + i\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} \right)$$

mit den zueinander konjugiert-komplexen Nullstellen des quadratischen Terms x^2+bx+c: $x = \frac{-b}{2} + i\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$ und $x = \frac{-b}{2} - i\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$. Damit gilt aber für reellwertige (und auch komplexwertige) ganz rationale Funktionen über den komplexen Zahlen die <u>Linearfaktorzerlegung</u>:

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)^{t_1} \cdot ... \cdot (x - x_m)^{t_m} = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)^{t_i} \quad (*)$$

mit paarweise verschiedenen reellen oder komplexen Nullstellen x_1, … x_m und deren Vielfachheiten t_1, … t_m bei: $t_1+…+t_m = n$, $0≤m≤n$. Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt dabei den Grad der ganz rationalen Funktion. Ist x_0 eine komplexe Nullstelle, so ist auch die konjugiert-komplexe Zahl $\bar{x}_0$ eine Nullstelle.

Die Beziehung (*) nennt man dann den <u>Fundamentalsatz der Algebra</u>, d.h.: Jede reell- oder komplexwertige ganz rationale Funktion vom Grad n mit $n≥1$: $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ bzw. $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten kann in Linearfaktoren zerlegt werden, wenn man nur die n (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) reellen bzw. komplexen Nullstellen der Funktion kennt. Für die Nullstellen x_1, … x_n bzw. z_1, … z_n gelten die Identitäten:

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$
$$f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1) \cdot ... \cdot (z - z_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$
(**).

In einer anderen Form lautet der Fundamentalsatz der Algebra (**): Jede (nicht konstante) reell- oder komplexwertige ganz rationale Funktion vom Grad n mit n≥1 besitzt im Komplexen mindestens eine Nullstelle x_0 bzw. z_0 (***). Hat nämlich die Funktion f(x) bzw. f(z) den Grad n und die Nullstelle x_1 bzw. z_1, so lässt sie sich durch Abspaltung des Linearfaktors $(x-x_1)$ bzw. $(z-z_1)$ etwa gemäß dem Hornerschema oder durch Polynomdivision zerlegen in:

$f(x) = f_1(x)(x-x_1)$
$f(z) = f_1(z)(z-z_1)$,

wobei die ganz rationale Funktion $f_1(x)$ bzw. $f_1(z)$ den Grad n-1 besitzt, für die wiederum laut dem Fundamentalsatz (***) eine Nullstelle x_2 bzw. z_2 existiert usw. Nach und nach ergibt sich damit die Linearfaktorzerlegung der ganz rationalen Funktion f(x) bzw. f(z) gemäß (**).
Gauß hat im Übrigen den in seiner Dissertation dargelegten Fundamentalsatz der Algebra später auch mit (etwas) anderen Mitteln (als den topologischen seiner Dissertation) bewiesen (Zwischenwertsatz, 1815; 1816; komplexe Zahlen, 1849).

<u>Ganz rationale Gleichungen</u>

Mit dem Fundamentalsatz der Algebra unmittelbar zusammenhängend, haben ganz rationale (Polynom-) Gleichungen vom Typ f(x) = 0 mit der (hier angenommenen) reellwertigen ganz rationalen Funktion $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, also Gleichungen vom Typ:

$$a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

genau n reelle oder komplexe Lösungen. Die Bestimmung der Lösungen kann für ganz rationale Gleichungen bis zum Grad 4 exakt erfolgen, für Gleichungen ab Grad 5 ist bis auf Ausnahmen eine exakte Lösbarkeit (im Sinne eines Formelapparats oder eines Lösungsverfahrens) nicht gegeben. Hier bieten sich numerische Verfahren wie das Newton-Verfahren (für reelle Lösungen) oder das auf Karl Weierstraß (†1897) beruhende Durand-Kerner-Verfahren (für komplexe Lösungen). Allgemein sind Vorgehensweise wie Ausklammern, Polynomdivision (Hornerschema) oder Subsititution für die Lösung von ganz rationalen Gleichungen einsetzbar. Dazu einige <u>Beispiele</u>:

a) Die reelle Gleichung $x^3 + 4x^2 + 8x = 0$ ist im Komplexen wie folgt u.a. durch Ausklammern lösbar:

$x^3 + 4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+4x+8) = 0 \Leftrightarrow x=0,\ x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$.

b) Die reelle ganz rationale Funktion $f(x) = x^4 – 16x^2 – 225$ soll in ihre Linearfaktoren zerlegt werden. Die Gleichung f(x) = 0 ergibt auch durch Substitution $z = x^2$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 – 16x^2 – 225 = 0 \Leftrightarrow z^2 – 16z – 225 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-225)}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm \sqrt{1156}}{2} = \frac{16 \pm 34}{2}$

$\Leftrightarrow z_1 = 50/2 = 25,\ z_2 = -18/2 = -9 \Leftrightarrow x^2 = 25,\ x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm5,\ x = \pm3i$.

Die Linearfaktorzerlegung lautet damit: $f(x) = x^4 – 16x^2 – 225 = (x–5)(x+5)(x–3i)(x+3i)$.

c) Die reelle ganz rationale Funktion $f(x) = x^8 + x^7 + 18{,}5x^6 – 40x^5 + 42x^4 – 22{,}5x^3$ kann über den reellen Zahlen in Linear- und quadratische Faktoren zerlegt werden, so dass:

$f(x) = x^8 + x^7 + 18{,}5x^6 – 40x^5 + 42x^4 – 22{,}5x^3 = x^3(x–1)(x^2+3x+22{,}5)(x^2–x+1)$

gilt. Die Zerlegung im Komplexen erfolgt durch die quadratischen Gleichungen:

$x^2+3x+22{,}5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22{,}5}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-81}}{2} = \frac{-3 \pm 9i}{2} = -1{,}5 \pm 4{,}5i$

$x^2 – x+1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = 0{,}5 \pm 0{,}5i\sqrt{3}$

und deren Lösungen; es gilt somit:

$f(x) = x^8 + x^7 + 18{,}5x^6 – 40x^5 + 42x^4 – 22{,}5x^3 = x^3(x–1)(x+1{,}5+4{,}5i)\ (x+1{,}5-4{,}5i)(x+0{,}5+0{,}5i\sqrt{3})(x+0{,}5-0{,}5i\sqrt{3})$.

Einheitswurzeln

Die komplexe Gleichung:

$z^n = 1$

besitzt n Lösungen, die sog. n-ten Einheitswurzeln. Vermöge der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ und mit der komplexen Darstellung $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ erhält man als Lösungen ζ_0, … ζ_{n-1} von (*): $\zeta_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, k = 0, … n-1. Zu beachten ist noch, dass die reelle Gleichung:

$x^n = 1$

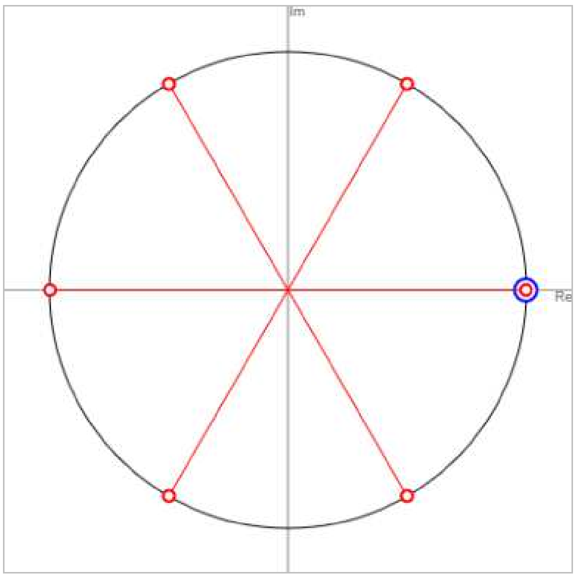
im Reellen nur eine (n gerade: x = 1) oder zwei Lösungen (n gerade: x = ±1) besitzt. Beispiele:

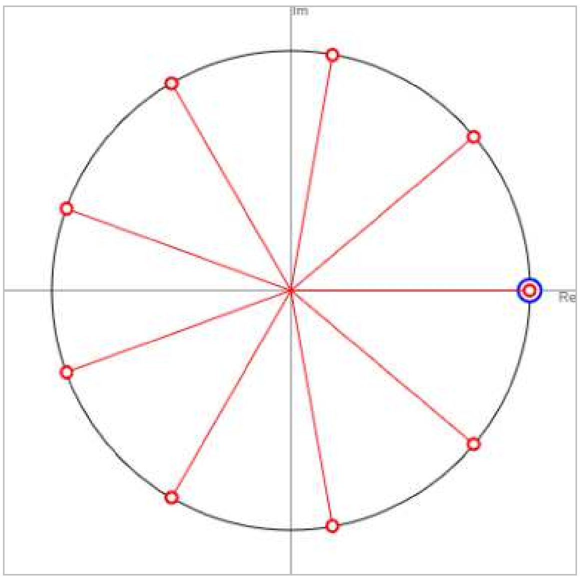
a) Die 6. Einheitswurzeln als Lösung der Gleichung $z^6 = 1$ lauten:

$\zeta_{6,0}$ = **1 + 0*i** = cos(0)+i*sin(0) = cos(0°)+i*sin(0°)
$\zeta_{6,1}$ = **0.5 + 0.866*i** = cos(1.0472)+i*sin(1.0472) = cos(60°)+i*sin(60°)
$\zeta_{6,2}$ = **-0.5 + 0.866*i** = cos(2.0944)+i*sin(2.0944) = cos(120°)+i*sin(120°)
$\zeta_{6,3}$ = **-1 + 0*i** = cos(3.1416)+i*sin(3.1416) = cos(180°)+i*sin(180°)
$\zeta_{6,4}$ = **-0.5 - 0.866*i** = cos(4.1888)+i*sin(4.1888) = cos(240°)+i*sin(240°)
$\zeta_{6,5}$ = **0.5 - 0.866*i** = cos(5.236)+i*sin(5.236) = cos(300°)+i*sin(300°)

b) Die 9. Einheitswurzeln als Lösung der Gleichung $z^9 = 1$ lauten:

$\zeta_{9,0}$ = **1 + 0*i** = cos(0)+i*sin(0) = cos(0°)+i*sin(0°)
$\zeta_{9,1}$ = **0.766 + 0.6428*i** = cos(0.6981)+i*sin(0.6981) = cos(40°)+i*sin(40°)
$\zeta_{9,2}$ = **0.1736 + 0.9848*i** = cos(1.3963)+i*sin(1.3963) = cos(80°)+i*sin(80°)
$\zeta_{9,3}$ = **-0.5 + 0.866*i** = cos(2.0944)+i*sin(2.0944) = cos(120°)+i*sin(120°)
$\zeta_{9,4}$ = **-0.9397 + 0.342*i** = cos(2.7925)+i*sin(2.7925) = cos(160°)+i*sin(160°)
$\zeta_{9,5}$ = **-0.9397 - 0.342*i** = cos(3.4907)+i*sin(3.4907) = cos(200°)+i*sin(200°)
$\zeta_{9,6}$ = **-0.5 - 0.866*i** = cos(4.1888)+i*sin(4.1888) = cos(240°)+i*sin(240°)
$\zeta_{9,7}$ = **0.1736 - 0.9848*i** = cos(4.8869)+i*sin(4.8869) = cos(280°)+i*sin(280°)
$\zeta_{9,8}$ = **0.766 - 0.6428*i** = cos(5.5851)+i*sin(5.5851) = cos(320°)+i*sin(320°)





Komplexe Gleichungen vom Typ:

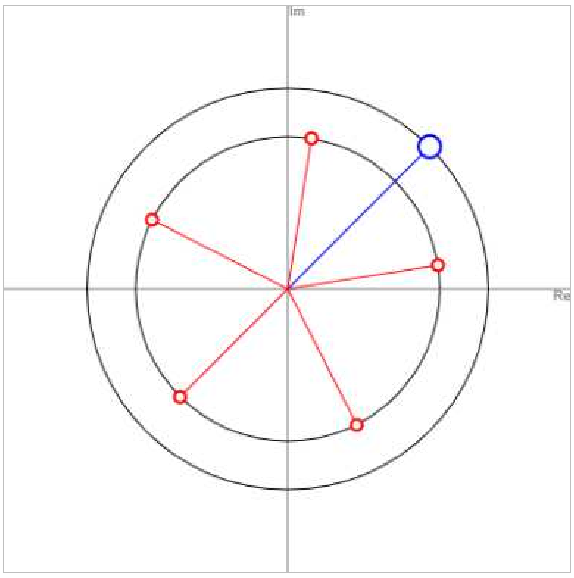
$z^n = a$

mit komplexem a haben als Lösungen: $z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right)$,

k = 0, … n-1. Beispiel:

Die Gleichung z^5 = 1+i hat mit a = 1+i = √2(cos(45°)+isin(45°)) als fünf Lösungen:

$z_{5,0}$ = **1.0586 + 0.1677*i** = 1.0718*(cos(0.1571)+i*sin(0.1571)) = 1.0718*(cos(9°)+i*sin(9°))
$z_{5,1}$ = **0.1677 + 1.0586*i** = 1.0718*(cos(1.4137)+i*sin(1.4137)) = 1.0718*(cos(81°)+i*sin(81°))
$z_{5,2}$ = **-0.955 + 0.4866*i** = 1.0718*(cos(2.6704)+i*sin(2.6704)) = 1.0718*(cos(153°)+i*sin(153°))
$z_{5,3}$ = **-0.7579 - 0.7579*i** = 1.0718*(cos(3.927)+i*sin(3.927)) = 1.0718*(cos(225°)+i*sin(225°))
$z_{5,4}$ = **0.4866 - 0.955*i** = 1.0718*(cos(5.1836)+i*sin(5.1836)) = 1.0718*(cos(297°)+i*sin(297°))



Literatur:

Carl Friedrich Gauß (de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauß; Aufruf: 20.12.2018); dtv-Atlas Schulmathematik, v. FRITZ REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.52f; Fundamentalsatz der Algebra (de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra; Aufruf: 19.12.2012); LELGEMANN, DIETER, Gauß und die Messkunst, Darmstadt 2011; PAPULA, LOTHAR, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, Bd.2, Wiesbaden [11]2007, S.182-227

Michael Buhlmann, 12.2018