Michael Buhlmann

Mathematik-Abiturprüfung
> Analysis I

Einleitung: Die Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz und gebrochen rationale, natürliche Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, grafisches Auf- und Ableiten, Modellierung (einschließlich Extremwertaufgaben), Parameterfunktionen.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): Leite ab und vereinfache: $f(x) = (\frac{1}{3}x + 2)^3 e^{-x}$.

Aufgabe 2 (ohne Hilfsmittel): Bestimme zu $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ diejenige Stammfunktion F(x), auf deren Schaubild der Punkt P(1|-2) liegt.

Aufgabe 3 (ohne Hilfsmittel): Löse die Gleichung: $e^x + 5 = \frac{14}{e^x}$.

Aufgabe 4 (ohne Hilfsmittel): Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2 \cdot (1 + \cos(\frac{\pi}{2}x))$.

a) Erläutere, wie die Funktion f(x) aus der Kosinusfunktion y = cos(x) entsteht.

b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und den Achsen im 1. Quadranten des Koordinatensystems.

Aufgabe 5 (mit Hilfsmitteln): a) Eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades besitzt im Ursprung des Koordinatensystems einen Tiefpunkt und eine Nullstelle bei x = 4, an der die Steigung den Wert m = -2 hat. Bestimme die Funktionsgleichung.

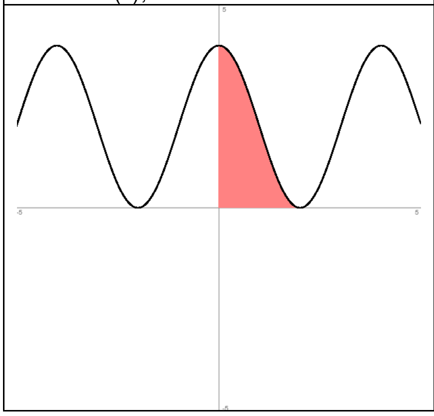
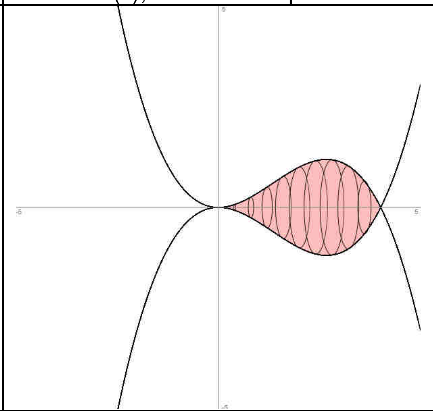
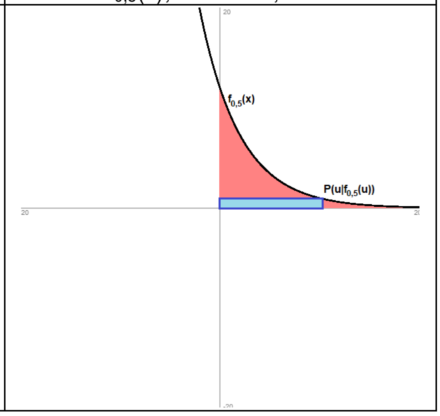
b) Durch Rotation der von Funktion f(x) und x-Achse eingeschlossenen Fläche um die x-Achse entsteht ein Designer-Rotationskörper aus Metall. Berechne dessen Volumen sowie dessen maximalen Durchmesser.

c) Ein zweiter Metallkörper stellt einen Metallzylinder dar, der dieselbe Höhe wie der Designer-Rotationskörper besitzt sowie denselben Flächeninhalt der Querschnittsfläche. Berechne den Radius des Zylinders und dessen Volumen. Um wie viel Prozent weicht das Volumen des Zylinders von dem des Designer-Rotationskörpers ab?

Aufgabe 6 (mit Hilfsmitteln): a) Zur Funktionenschar $f_t(x) = \frac{12}{e^{t^2 x}}$, t>0, ist die (unendlich lange) Fläche zwischen Funktion und x-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems zu berechnen. Für welches t ist der Flächeninhalt 3?

b) Es sei t = 0,5. Im 1. Quadranten des Koordinatensystems werden unterhalb der Funktion $f_{0,5}(x)$ achsenparallele Rechtecke einbeschrieben mit Eckpunkte im Ursprung des Koordinatensystems und auf der Funktionskurve. Welche Abmessungen hat das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt?

Lösungen: 1. $f'(x) = -(x/3+2)^2(x/3+1)e^{-x}$. – 2. $F(x) = 2x - 3\ln|x| - 4$. – 3. $e^x + 5 = 14/e^x \Leftrightarrow e^{2x} + 5e^x = 14 \Leftrightarrow e^{2x} + 5e^5 - 14 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 5z - 14 = 0 \Leftrightarrow z = 2, z = -7 \Leftrightarrow e^x = 2, e^x = -7 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. – 4a) $y = \cos(x)$ -> Stauchung entlang der x-Achse (Periode $p = 4$) -> $y = \cos(\pi x/2)$ -> Streckung entlang der y-Achse (Amplitude $a = 2$) -> $y = 2\cos(\pi x/2)$ -> Verschiebung nach oben entlang der y-Achse (Mittellinie $d = 2$) -> $f(x) = 2\cos(\pi x/2) + 2$ (gemäß der allgemeinen Form einer Kosinusfunktion $f(x) = a\cdot\cos(b(x-c)) + d$); b) Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, Fläche als Integral: $A = \int_0^2 f(x)dx = 4$ mit Stammfunktion $F(x) = 4/\pi\cdot\sin(\pi x/2) + 2x$. – 5a) $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$, $T(0|0)$ ($f(0)=0$, $f'(0)=0$), $N(4|0)$ ($f(4)=0$, $f'(4)=-2$) -> $f(x) = -x^3/8 + x^2/4$; b) Volumen des Rotationskörpers $V = \pi\cdot\int_0^4 (f(x))^2dx = \pi\cdot\int_0^4 (-x^3/8+x^2/4)^2dx = 7{,}66$ VE, $f'(x) = 0$ -> $H(4/3|1{,}19)$ -> maximaler Durchmesser $d = 2{,}38$ LE; c) Zylinderradius r = Mittelwert $m = \int_0^4 f(x)dx/4 = 0{,}67$ LE, Zylinderhöhe $h = 4$ LE -> Zylindervolumen $V = \pi r^2 h = 5{,}64$ VE, prozentuale Abweichung -26,4%. – 6a) $A_t(z) = \int_0^z f_t(x)dx = 12/t^2 - 12e^{-t\cdot t\cdot x}/t^2$ -> $12/t^2 = A_t$ ($z \to +\infty$), $A_t = 3 \Leftrightarrow 12/t^2 = 3 \Leftrightarrow t = 2$, b) $t = 0{,}5$ -> $f_{0,5}(x) = 12e^{-0{,}25x}$, Rechteckecken $O(0|0)$, $P(u|f_{0,5}(u))$, $u \geq 0$, Rechteckfläche $A = ab$ als $A(u) = u^2e^{-0{,}25u}$ -> $A'(u) = (2u-0{,}25u^2)e^{-0{,}25u} = 0 \Leftrightarrow u = 0, u = 8$ -> maximaler Flächeninhalt bei $u = 8$ mit $a = 8$, $b = e^{-2}$ als Rechteckseiten (Randstellen: $u=0$: $A(0) = 0$, $u \to \infty$: $A(u) \to 0$).

Aufgabe 4: Funktion $f(x)$, Fläche A	Aufgabe 5: Funktion $f(x)$, Rotationskörper	Aufgabe 6: Funktion $f_{0,5}(x)$, Fläche A, Rechteck
		

(FE = Flächen-, LE = Längen-, VE = Volumeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Mathematik-Abiturprüfung: Analysis I / Aufgaben 1604-1609