Michael Buhlmann

Mathematik-Abiturprüfung
> Analysis II

Einleitung: Die Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz und gebrochen rationale, natürliche Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, grafisches Auf- und Ableiten, Modellierung (einschließlich Extremwertaufgaben), Parameterfunktionen.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): Bestimme zur Funktion $f(x) = 6x - 0{,}5x^2$ die Tangente in dem Kurvenpunkt, in dem die Ableitung den Wert 2 hat. Wo schneidet die Tangente die Achsen des Koordinatensystems?

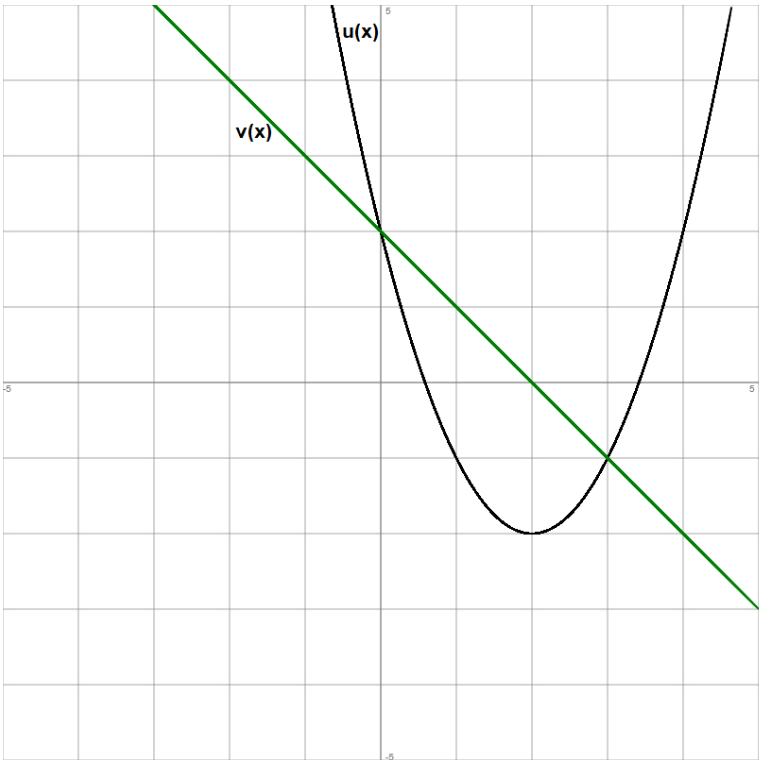
Aufgabe 2 (ohne Hilfsmittel): Bestimme den Flächeninhalt der von den Funktionen $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = x + 4$ eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe 3 (ohne Hilfsmittel): Eine trigonometrische Funktion besitzt den Tiefpunkt T(0|-1) und den Hochpunkt H(2|2). Gib eine mögliche Gleichung der Funktion an und benenne alle Extrem- und Wendepunkte der Funktion auf dem Intervall [-1,5; 4,5].

Aufgabe 4 (ohne Hilfsmittel): Gegeben sind die Funktionen u(x) und v(x) gemäß der Abbildung (1 Kästchenbreite/-höhe = 1 Längeneinheit). Es sei f(x) = u(v(x)).

a) Bestimme f(-1), f‘(0).

b) Löse die Gleichung: f(x) = 2.



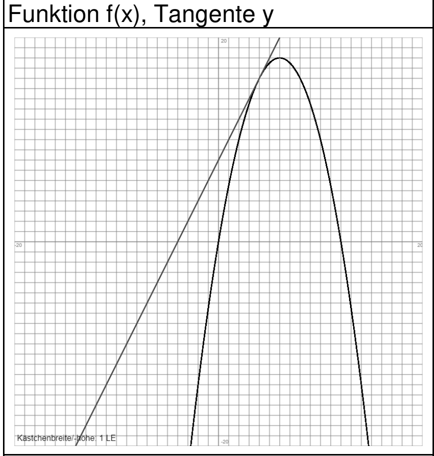
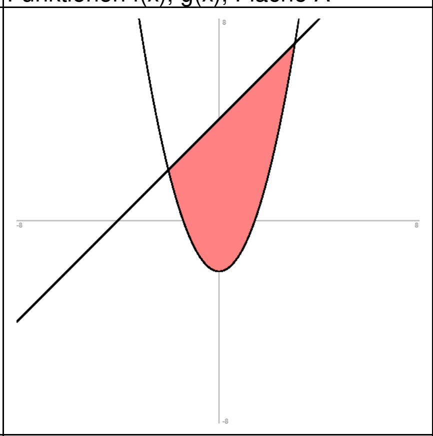
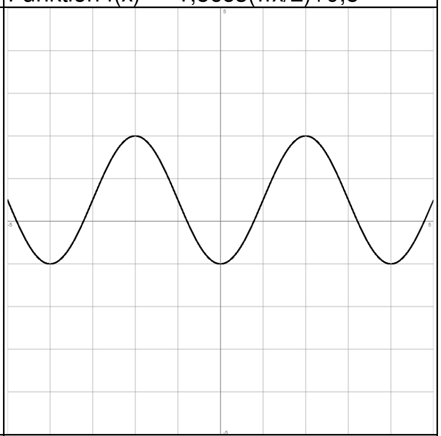
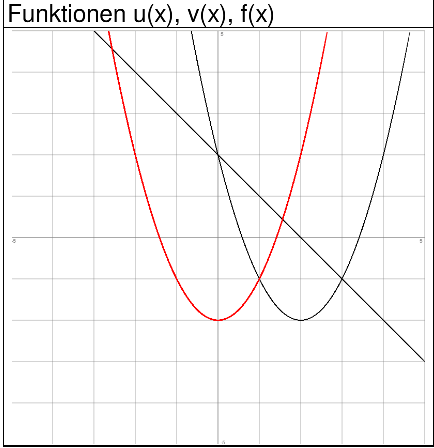
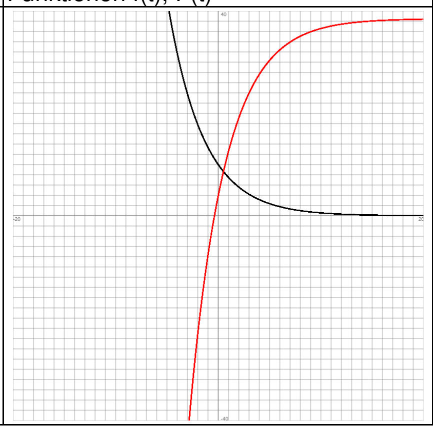
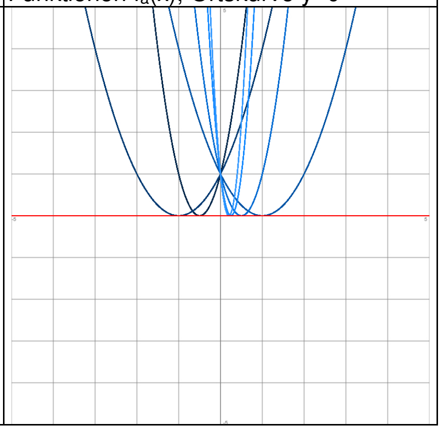
Aufgabe 5 (mit Hilfsmitteln): a) Beim Wachstum von Bakterien in einer Petrischale wird davon ausgegangen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit exponentiell abnimmt. In der Tat liegt die Halbwertzeit der Geschwindigkeit bei 2,4 Stunden (h), während die Geschwindigkeit zu Beginn der Messung (t=0) 10 Quadratzentimeter pro Stunde (cm^2/h) beträgt. Modelliere eine passende Exponentialfunktion. Wann hat die Wachstumsgeschwindigkeit den Wert 1,6 cm^2/h erreicht?

b) Bestimme eine Funktion, die den Bestand an Bakterien in Quadratzentimetern zählt, wenn bei Beobachtungsbeginn die Bakterien eine Fläche von 3,9 Quadratzentimetern einnehmen. Wie viel Quadratzentimeter der Petrischale sind nach 5 Stunden von Bakterien erfasst? Zu welchem Zeitpunkt sind 95 Prozent der Petrischale von Bakterien belegt? Berechne den Durchmesser der kreisförmigen Petrischale.

Aufgabe 6 (mit Hilfsmitteln): Zeige, dass alle Funktionen der Parabelschar $f_a(x) = a^2x^2 – 2ax + 1$, $a≠0$, Tiefpunkte als Nullstellen besitzen. Durch welchen gemeinsamen Punkt verlaufen die Graphen der Parabelschar?

Aufgabe 7 (mit Hilfsmitteln): Es sei w(x) eine zweimal differenzierbare Funktion mit w(x) ≥ 0. Zeige: Besitzt w(x) einen Tiefpunkt, so auch an derselben Stelle die Funktion $f(x) = (w(x)+1)^3$.

Lösungen: 1. $f(x) = 6x-0{,}5x^2$, $f'(x) = 6-x = 2$ ⇔ $-x = -4$ ⇔ $x = 4$ mit $f(4) = 16$, $f'(4) = 2$ -> Tangente t: $y = f'(4)(x-4)+f(4) = 2(x-4)+16 = 2x+8$ -> y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|8)$, Nullstelle N(-4|0). – 2. Gleichsetzen: f(x) = g(x) ⇔ $x^2–2 = x+4$ ⇔ $f(x)-g(x) = x^2–x–6 = 0$ ⇔ x=-2, x=3 -> Fläche $-A = {}_{-2}\int^{3}(x^2–x–6)dx = -125/6$ => A = 125/6 FE. – 3. Mittellinie: $d = (y_H+y_T)/2 = 0{,}5$, Ampltude: $|a| = y_H-d = 1{,}5$ => a = -1,5, Periode: $p/2 = x_H-x_T = 2$ => p = 4 => b = π/2 -> Funktionsterm der Kosinusfunktion f(x) = -1,5cos(πx/2)+0,5; Extrem- und Wendepunkte: W(-1|0.5), T(0|-1), W(1|0,5), H(2|2), W(3|0,5), T(4|-1). – 4a) f(-1) = u(v(-1)) = u(3) = -1, f'(x) = u'(v(x))v'(x) (Kettenregel) -> f'(0) = u'(v(0))v'(0) = u'(2)v'(0) = 0·(-1) = 0; b) f(x) = 2 ⇔ u(v(x)) = 2 ⇔ v(x) = 0, v(x) = 4 ⇔ x = 2, x = -2. – 5. Geschwindigkeitsfunktion (cm^2/h) als Änderungsrate: $f(t) = ce^{kt}$ mit c = 10, $k = -\ln(2)/T_H = -\ln(2)/2{,}4 = -0{,}289$ -> $f(t) = 10e^{-0{,}289t}$ -> f(t) = 0,1 ⇔ t = 6,34 h; b) Bestandsfunktion (cm^2) als Stammfunktion: $F(t) = -34{,}6e^{-02{,}89t}+C$ mit : F(0) = 3,9 = -34,6+C ⇔ C = 38,5 -> $F(t) = -34{,}6e^{-02{,}89t}+38{,}5$, F(5) = 30,34 cm^2, F(t) = 0,95·38,5 = 36,58 ⇔ t = 10 h, Flächeninhalt der Petrischale: $A = \pi r^2 = 38{,}5\ cm^2$ -> r = 3,5 cm -> Durchmesser d = 7 cm. – 6. Ableitungen: $f_a'(x) = 2a^2x-2a = 0$ ⇔ x = 1/a, $f_a''(x) = 2a^2 > 0$ -> Tiefpunkte T(1/a|0) als Nullstellen N(1/a|0), gemeinsamer Schnittpunkt S(0|1). – 7. Funktion, Ableitungen: $f(x) = (w(x)+1)^3$, $f'(x) = 3(w(x)+1)^2w'(x)$, $f''(x) = 6(w(x)+1)(w'(x))^2+3(w(x)+1)^2w''(x)$, Tiefpunkt $T(x_0|w(x_0))$ -> $w'(x_0) = 0$, $w''(x_0) > 0$ -> $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0 + 3(w(x_0)+1)^2w''(x_0) > 0$ -> Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.

Aufgabe 1: Funktion f(x), Tangente y	Aufgabe 2: Funktionen f(x), g(x), Fläche A	Aufgabe 3: Funktion f(x) = -1,5cos(πx/2)+0,5
		
Aufgabe 4: Funktionen u(x), v(x), f(x)	Aufgabe 5: Funktionen f(t), F(t)	Aufgabe 6: Funktionen $f_a(x)$, Ortskurve y=0
		

(FE = Flächen-, LE = Längen-, VE = Volumeneinheiten)