

Mathematik-Abiturprüfung

> Analysis III

Einleitung: Die Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz und gebrochen rationale, natürliche Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, grafisches Auf- und Ableiten, Modellierung (einschließlich Extremwertaufgaben), Parameterfunktionen.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): Eine ganz rationale Funktion $f(x)$ gehorcht der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 2x^3.$$

- Berechne die Nullstellen der Funktion.
- Bestimme die Punkte mit waagerechter Tangente.
- Skizziere den Graphen der Funktion.

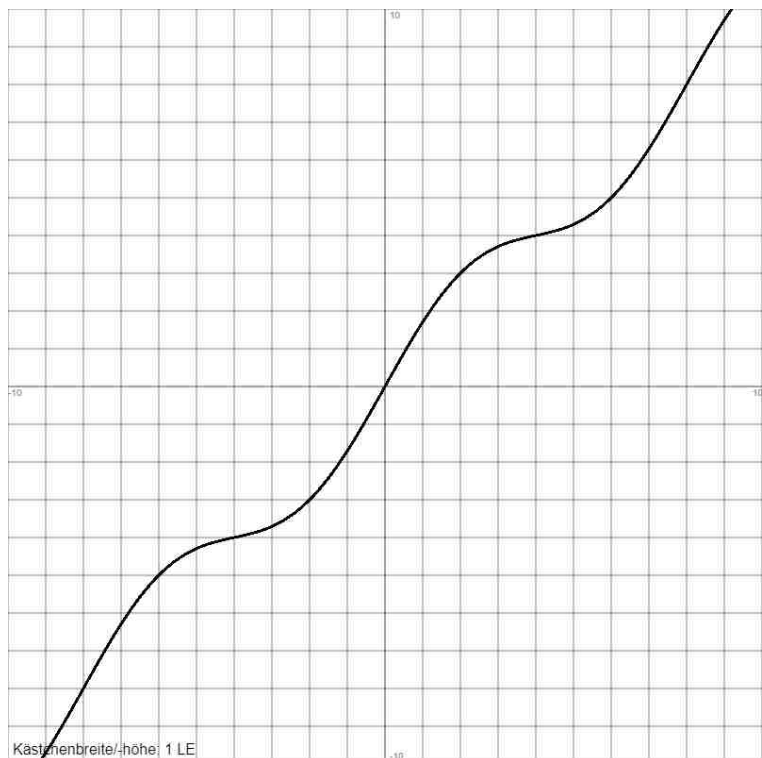
Aufgabe 2 (ohne Hilfsmittel): Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ für alle reellen Zahlen $x > 0$.

Die Stammfunktion von $f(x)$ sei $F(x)$.

- Zeige: $F(x)$ ist (streng) monoton steigend für $x > 0$.
- Zeige: $F(x)$ ist rechts gekrümmt für $x > 0$.

Aufgabe 3 (ohne Hilfsmittel): Die nebenstehende Abbildung (1 Kästchenbreite/-höhe = 1 Längeneinheit) zeigt den Graphen der Stammfunktion $H(x)$. Entscheide und begründe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- Es gilt: $f(x) > 0$.
- Es gilt: $\int_{-2}^4 f(x) dx = 7$.
- Die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.
- Es ist: $f'(0) = 0$.
- Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.
- Es ist: $f'(3) \cdot f'(5) > 0$.



Aufgabe 4 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{2x} - 6e^x$.

- Berechne die Schnittpunkte der Funktion mit den Achsen des Koordinatensystems.

- b) Wie lauten die Koordinaten des Extrempunktes (Hoch- oder Tiefpunkt?) der Funktion?
 c) Bestimme die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = c$ für jede reelle Zahl c .
 d) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und den Achsen des Koordinatensystems im dessen 3. Quadranten.

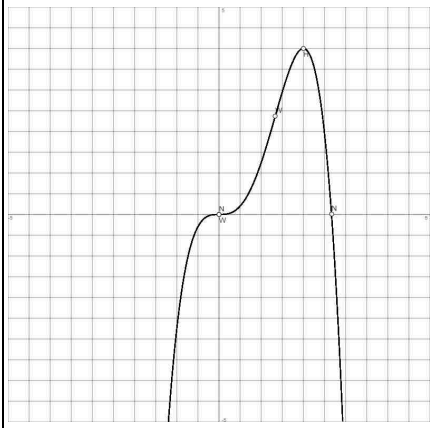
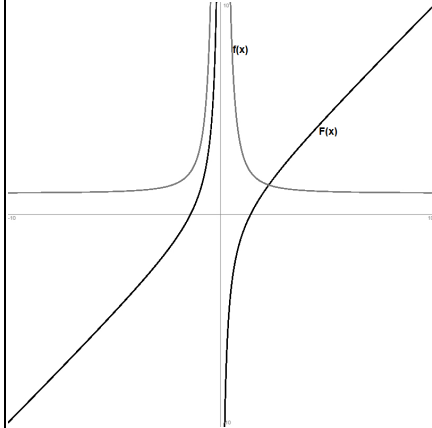
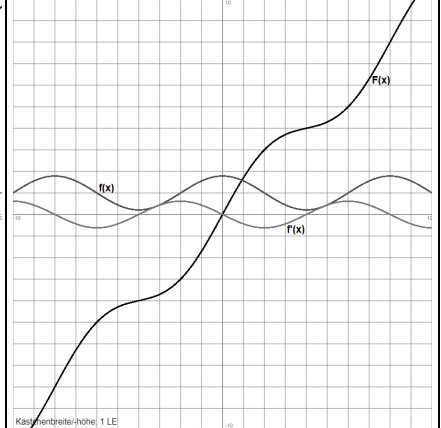
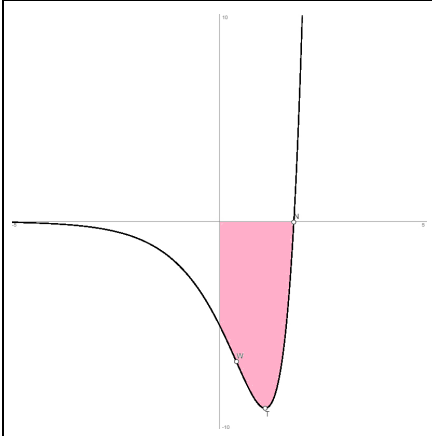
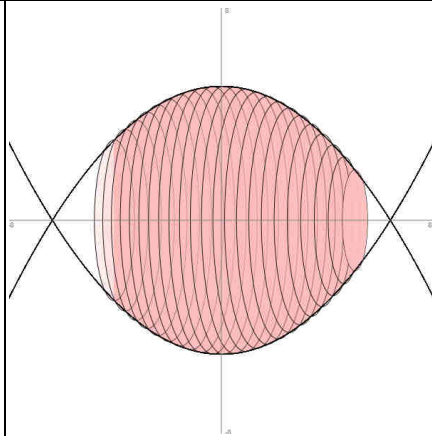
Aufgabe 5 (mit Hilfsmitteln): Eine kleine Glasvase soll als Rotationskörper designt werden.

a) Der Vasenboden ist ein Kreis mit einem Flächeninhalt von $28,3 \text{ cm}^2$. Die Vasenöffnung befindet sich in einer Höhe von 9 cm über dem Boden und hat einen Durchmesser von $3,75 \text{ cm}$. In einer Höhe von vier Zentimetern besitzt die Vase ihren maximalen Durchmesser. Der Vasenrand soll durch eine Parabel $p(x) = ax^2 + c$ dargestellt werden. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel.

b) Berechne den Querschnitt der Glasvase und wie viel Wasser Vase die aufnehmen kann.

Aufgabe 6 (mit Hilfsmitteln): Zeige: Ist die Funktion $w(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems, dann ist die Funktion $f(x) = e^{(w(x))^2}$ symmetrisch zur y -Achse des Koordinatensystems.

Lösungen: 1a) $f(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 8/3$; b) $f'(x) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt $S(0|0)$, Hochpunkt $H(2|4)$. – 2a) $f(x) > 0 \rightarrow F(x)$ ist monoton steigend, $f'(x) < 0 \rightarrow F(x)$ ist rechts gekrümmt. – 3. (1) wahr, (2) wahr, (3) falsch, (4) wahr, (5) wahr, (6) falsch. – 4a) $N(\ln(6)|0)$, $S_y(0|-5)$; b) $T(\ln(3)|-9)$; c) $c < -9: 0, c = -9: 1, -9 < c < 0: 2, c \geq 0: 1$ Lösung(en), d) $-A = \int_0^{\ln(6)} f(x) dx = -12,5 \rightarrow A = 12,5 \text{ FE}$. – 5a) Hochpunkt von $p(x)$ auf y -Achse \rightarrow Vasenrand als Funktion auf Intervall $[-4; 5]$, Vasenboden $A = 28,3 \text{ cm}^2 \rightarrow r = 3 \text{ cm} \rightarrow p(-4) = 3$, Vasenöffnung $d = 3,75 \text{ cm} \rightarrow r = 1,875 \text{ cm} \rightarrow p(5) = 1,875$, lineares Gleichungssystem $16a + c = 3, 25a + c = 1,875 \rightarrow p(x) = -0,125x^2 + 5$; b) $A = \int_{-4}^5 p(x) dx = 37,125 \text{ cm}^2, V = \pi \cdot \int_{-4}^5 (p(x))^2 dx = 500,2 \text{ cm}^3$. – 6. O-Punktsymmetrie von $w(x) \rightarrow w(-x) = -w(x) \rightarrow f(-x) = e^{(w(-x))^2} = e^{(-w(x))^2} = e^{(w(x))^2} = f(x) \rightarrow y$ -Achsensymmetrie von $f(x)$.

<p>Aufgabe 1: Funktion $f(x)$</p> 	<p>Aufgabe 2: Funktion $f(x)$, Stammfunktion $F(x)$</p> 	<p>Aufgabe 3: Funktionen $F(x), f(x), f'(x)$</p> 
<p>Aufgabe 4: Funktion $f(x)$, Fläche A</p> 	<p>Aufgabe 5: Funktion $f(x)$, Fläche A, Volumen V</p> 	<p>(FE = Flächen-, LE = Längen-, VE = Volumeneinheiten)</p>