Michael Buhlmann

Mathematik-Abiturprüfung
> Analysis III

Einleitung: Die Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz und gebrochen rationale, natürliche Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, grafisches Auf- und Ableiten, Modellierung (einschließlich Extremwertaufgaben), Parameterfunktionen.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): Eine ganz rationale Funktion f(x) gehorcht der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 2x^3$.

a) Berechne die Nullstellen der Funktion.

b) Bestimme die Punkte mit waagerechter Tangente.

c) Skizziere den Graphen der Funktion.

Aufgabe 2 (ohne Hilfsmittel): Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ für alle reellen Zahlen x>0.

Die Stammfunktion von f(x) sei F(x).

a) Zeige: F(x) ist (streng) monoton steigend für x > 0.

b) Zeige: F(x) ist rechts gekrümmt für x > 0.

Aufgabe 3 (ohne Hilfsmittel): Die nebenstehende Abbildung (1 Kästchenbreite/-höhe = 1 Längeneinheit) zeigt den Graphen der Stammfunktion F(x) einer Funktion f(x). Entscheide und begründe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(1) Es gilt: f(x) > 0.

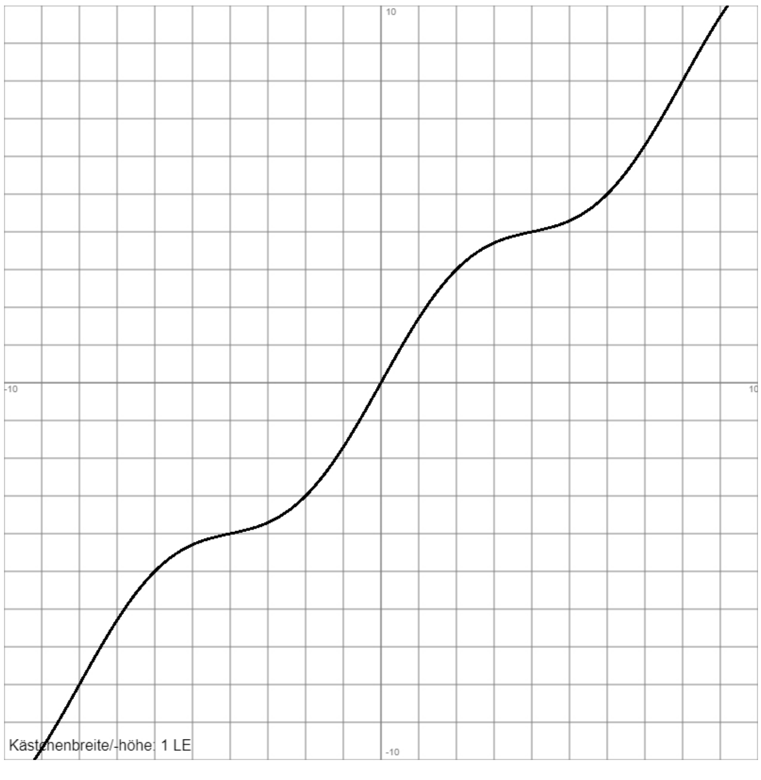
(2) Es gilt: $\int_{-2}^{4} f(x)dx = 7$.

(3) Die Funktion f(x) besitzt an der Stelle x = 0 einen Tiefpunkt.

(4) Es ist: f‘(0) = 0.

(5) Die Ableitungsfunktion f‘(x) ist symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

(6) Es ist: f‘(3)·f‘(5) > 0.



Aufgabe 4 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{2x} - 6e^x$.

a) Berechne die Schnittpunkte der Funktion mit den Achsen des Koordinatensystems.

b) Wie lauten die Koordinaten des Extrempunktes (Hoch- oder Tiefpunkt?) der Funktion?

c) Bestimme die Anzahl der Lösungen der Gleichung f(x) = c für jede reelle Zahl c.

d) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und den Achsen des Koordinatensystems in dessen 3. Quadranten.

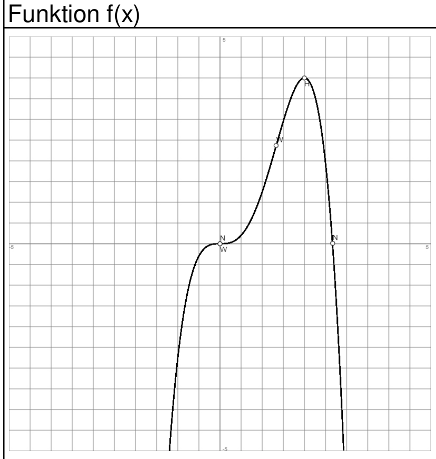
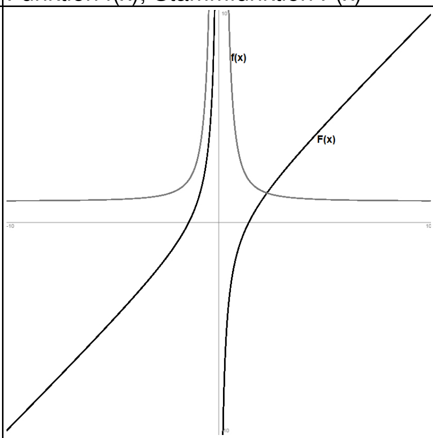
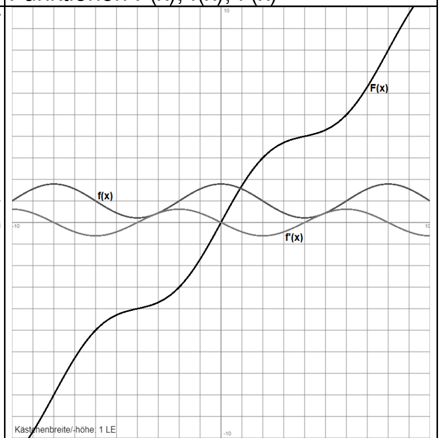
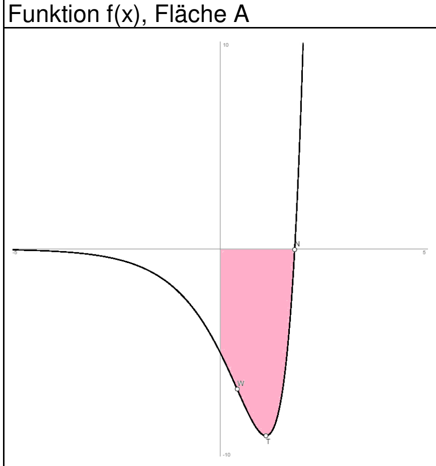
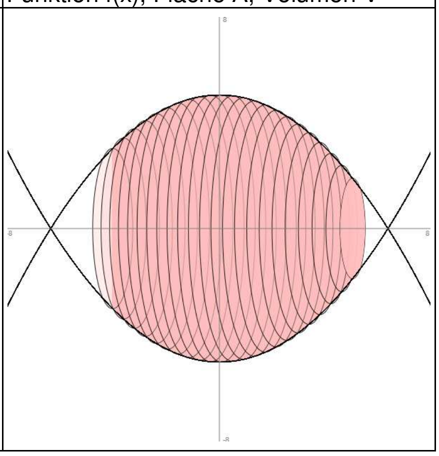
Aufgabe 5 (mit Hilfsmitteln): Eine kleine Glasvase soll als Rotationskörper designt werden.

a) Der Vasenboden ist ein Kreis mit einem Flächeninhalt von 28,3 Quadratzentimetern (cm^2). Die Vasenöffnung befindet sich in einer Höhe von 9 Zentimetern (cm) über dem Boden und hat einen Durchmesser von 3,75 Zentimetern. In einer Höhe von vier Zentimetern besitzt die Vase ihren maximalen Durchmesser. Der Vasenrand soll durch eine Parabel $p(x) = ax^2 + c$ dargestellt werden. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel.

b) Berechne den Vasenquerschnitt senkrecht zur Öffnung und wie viel Wasser die Vase aufnehmen kann.

Aufgabe 6 (mit Hilfsmitteln): Zeige: Ist die Funktion w(x) punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems, dann ist die Funktion $f(x) = e^{(w(x))^2}$ symmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems.

Lösungen: 1a) f(x) = 0 -> x = 0, x = 8/3; b) f'(x) = 0 -> Sattelpunkt S(0|0), Hochpunkt H(2|4). – 2a) f(x)>0 -> F(x) ist monoton steigend, f'(x) < 0 -> F(x) ist rechts gekrümmt. – 3. (1) wahr, (2) wahr, (3) falsch, (4) wahr, (5) wahr, (6) falsch. – 4a) N(ln(6)|0), $S_y(0|-5)$; b) T(ln(3)|-9); c) c<-9: 0, c=-9: 1, -9<c<0: 2, c≥0: 1 Lösung(en), d) $-A = \int_0^{\ln(6)} f(x)dx = -12{,}5$ -> A = 12,5 FE. – 5a) Hochpunkt von p(x) auf y-Achse -> Vasenrand als Funktion auf Intervall [-4; 5], Vasenboden A = 28,3 cm^2 -> r = 3 cm -> p(-4) = 3, Vasenöffnung d = 3,75 cm -> r = 1,875 cm -> p(5) = 1,875, lineares Gleichungssystem 16a+c = 3, 25a+c = 1,875 -> $p(x) = -0{,}125x^2+5$; b) $A = \int_{-4}^{5} p(x)dx = 37{,}125\ cm^2$, $V = \pi\cdot\int_{-4}^{5}(p(x))^2dx = 500{,}2\ cm^3$. – 6. O-Punktsymmetrie von w(x) -> w(-x) = -w(x) -> $f(-x) = e^{(w(-x))^2} = e^{(-w(x))^2} = e^{(w(x))^2}$ = f(x) -> y-Achsensymmetrie von f(x).

Aufgabe 1: Funktion f(x)	Aufgabe 2: Funktion f(x), Stammfunktion F(x)	Aufgabe 3: Funktionen F(x), f(x), f'(x)
		
Aufgabe 4: Funktion f(x), Fläche A	Aufgabe 5: Funktion f(x), Fläche A, Volumen V	
		(FE = Flächen-, LE = Längen-, VE = Volumeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Mathematik-Abiturprüfung: Analysis III / Aufgaben 1617-1622