Michael Buhlmann

Mathematik-Fachabiturprüfung
> Analysis II

Einleitung: Die Mathematik-Fachabiturprüfung beinhaltet den Themenbereich Analysis, gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz rationale Funktionen, Differentiation und Integration, Bestimmungsaufgaben, Extremwertaufgaben.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel):

a) Bestimme die Lösungen der Gleichung:

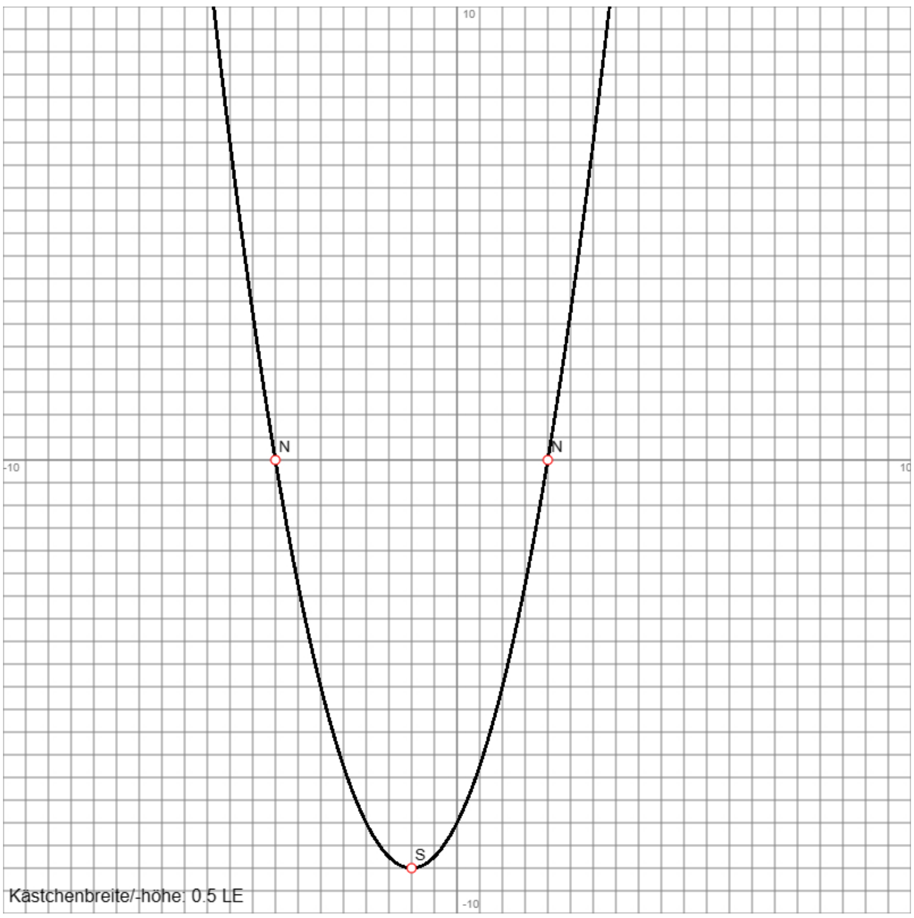
$$x^3 - 9x^2 + 6x + 16 = 0.$$

b) Bestimme die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ -x_1 + 2x_2 &= -6 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned}$$

c) Bestimme die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{3}{4}\left(x^4 - \frac{2}{x} + 6\right)$.

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): a) Gegeben ist der nachstehende Graph einer quadratischen Funktion f(x) = ax^2 + bx + c in einem x-y-Koordinatensystem:



Bestimme die Funktionsgleichung von f(x).

b) Zeige, dass sich die Funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 8$ und $g(x) = 4x - 9$ an der Stelle $x = 1$ berühren.

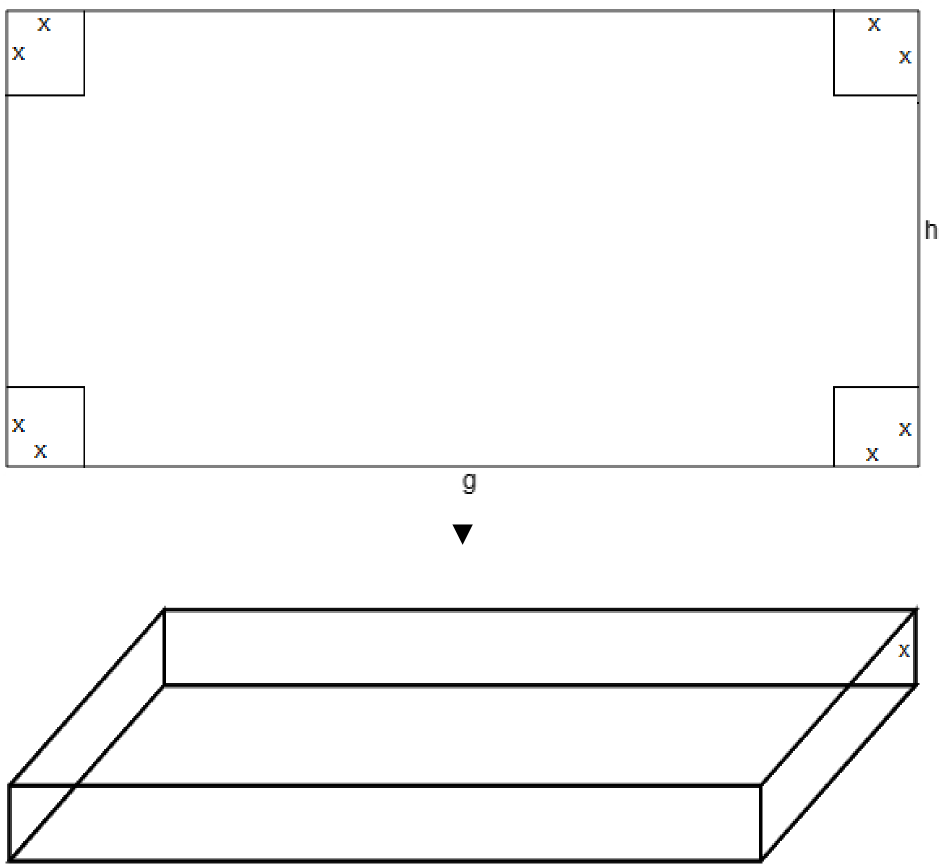
c) Gegeben ist zudem eine ganz rationale Funktion h(x) 3. Grades mit:

$$h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8.$$

Untersuche die Funktion auf Extrem- und Wendepunkte.

d) Zeichne die Funktion h(x) in das oben stehende x-y-Koordinatensystem ein. Bestimme die Schnittpunkte zwischen den Funktionen f(x) und h(x). Wo liegen die Schnittpunkte?

Aufgabe 3 (mit Hilfsmitteln): a) Aus einem Rechteck der Länge g = 40 cm und Breite h = 20 cm wird ein nach oben offener Quader gebildet, indem das Rechteck im Abstand x von den Ecken eingeschnitten wird und die Flächen zwischen den so entstandenen Quadraten als Quaderseitenflächen in einem rechten Winkel nach oben gedreht werden. Wie tief muss das Rechteck jeweils eingeschnitten werden, damit das Volumen des Quaders maximal wird? Wie groß ist das maximale Volumen, wie groß sind Länge und Breite des Quaders mit maximalem Volumen? (Runde jeweils auf zwei Nachkommastellen.)



Im Folgenden sei die Funktion $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - \frac{9}{2}x^2$ gegeben.

b) Zeige, dass die Funktionswerte von f(x) den y-Wert 6,75 nicht übersteigen.

c) Die Gerade g(x) durch die beiden Hochpunkte der Funktion f(x) schneidet die Funktion an zwei weiteren Schnittstellen. Berechne die Schnittstellen. (Runde auf zwei Nachkommastellen.)

d) Berechne die Gleichung der Normalen n an der Funktion f(x) an der Stelle $x_0 = 2$.

Lösungen: 1a) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16 = 0$, Lösung: x = 2 -> Polynomdivision: $(x^3–9x^2+6x+16):(x-2) = x^2-7x-9 = 0$ -> x=-8, x=--1 als weitere Nullstellen; b) Lösung des linearen Gleichungssystems:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$

$- 1x_1 + 2x_2 = -6$

$+ 4x_1 + 4x_2 - 1x_3 = -2$

<u>Anfangstableau</u>:

3 2 3 | 8

-1 2 0 | -6

4 4 -1 | -2

<u>1. Schritt</u>: 3*(2) + 1*(1) / 3*(3) - 4*(1) /

3 2 3 | 8

0 8 3 | -10

0 4 -15 | -38

<u>2. Schritt</u>: 2*(3) - 1*(2) /

3 2 3 | 8

0 8 3 | -10

0 0 -33 | -66

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$

$+ 8x_2 + 3x_3 = -10$

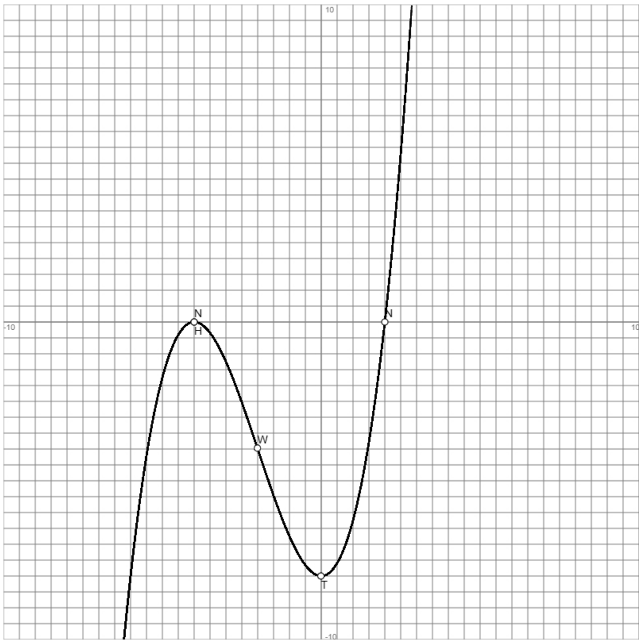
$- 33x_3 = -66$

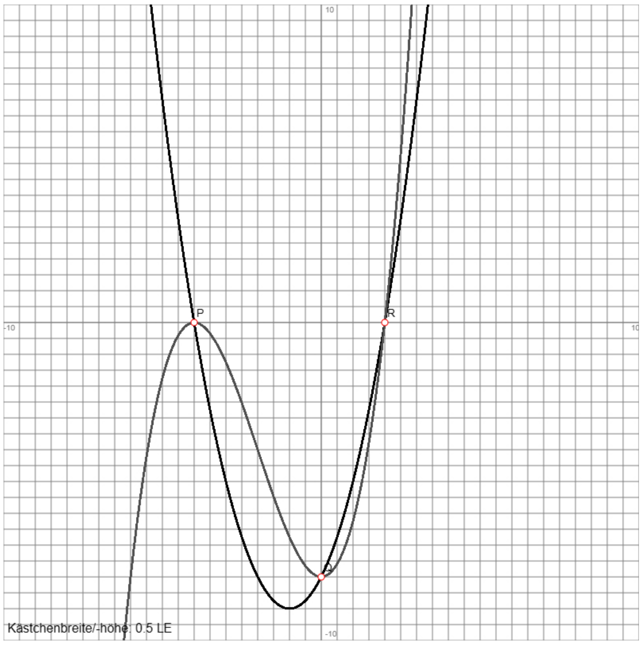
<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = 2$
$x_2 = -2$
$x_1 = 2$

c) $f(x) = 0,75(x^4-2x^{-1}+6)$ -> $f'(x) = 0,75(4x^3+2x^{-2})$, $f''(x) = 0,75(12x^2-4x^{-3})$.

2a) Scheitelpunkt S(-1|-9) bzw. Nullstellen N(-4|0), N(2|0) -> $f(x) = (x+1)^2-9 = (x+4)(x-2) = x^2+2x–8$; b) $f(x) = x^2+2x–8$, $f'(x) = 2x+2$, $g(x) = 4x-9$, $g'(x) = 4$ -> f(1) = g(1) = -5, f'(2) = g'(2) = 4 -> Berührpunkt B(1|-5); c) $h(x) = x^3/4+1,5x^2-8$ -> $h'(x) = 3x^2/4+3x$, $h''(x) = 3x/2+3$ -> Hochpunkt H(-4|0), Wendepunkt W(-2|-4), Tiefpunkt T(0|-8); d) f(x) = h(x) -> $x(x^2+2x-8) = 0$ -> Schnittpunkte P(-4|0), Q(0|-8), R(2|0) auf den Achsen des x-y-Koordinatensystems. ▶





3a) Volumenfunktion V(x) = (g-2x)(h-2x)x = (40-2x)(20-2x)x = $4x^3-120x^2+800x$, 0≤x≤10 -> $V'(x) = 12x^2-240x+800 = 0$ -> x = 4,22 mit V''(4,22) < 0, V(4,22) = 1539,6 cm^3, Länge a = 31,55 cm, Breite b = 11,55 cm, Höhe c = 4,22 cm;

◀ b) $f(x) =-3x^4/4+4x^3-4,5x^2$ -> $f'(x) = -x^3+4x^2-3x = 0$ -> Hochpunkt $H_1(0|0)$, Tiefpunkt T(1|-1,25), Hochpunkt $H_2(3|6,75)$; x -> ±∞: f(x) -> -∞ => globales Maximum H(3|6,75) -> maximaler Funktionswert y = 6,75; c) $H_1(0|0)$, $H_2(3|6,75)$ -> Ursprungsgerade g(x) = 2,25x, f(x) = g(x) $\Leftrightarrow$ $-3x^4/4+4x^3-4,5x^2-2,25x = 0$ $\Leftrightarrow$ $(-3x^3/4+4x^2-4,5x-2,25)x = 0$ $\Leftrightarrow$ x = 0, x = 3, Polynomdivision: $(-3x^3+16x^2-18x-9):(x-3) = -3x^2+7x+3 = 0$ $\Leftrightarrow$ x = -0,37, [x = 0, x = 3,] x = 2,70;
d) f(2) = 2, f'(2) = 6 -> Normale n: y = -x/6 + 7/3.

www.michael-buhlmann.de / 03.2023 / Mathematik-Fachabiturprüfung: Analysis II / Aufgaben 1819-1821