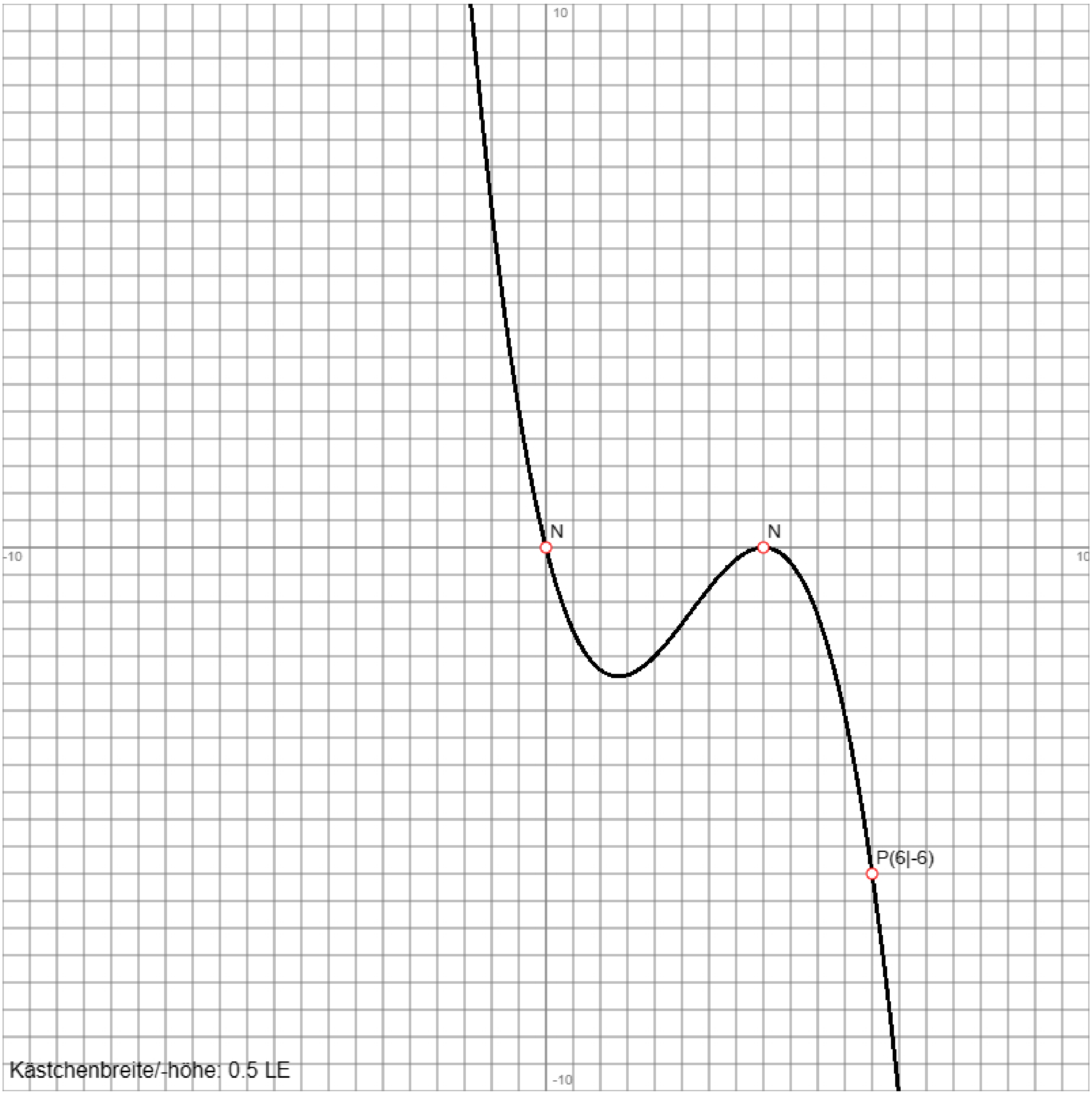
Michael Buhlmann

Mathematik-Fachabiturprüfung
> Analysis III

Einleitung: Die Mathematik-Fachabiturprüfung beinhaltet den Themenbereich Analysis, gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz rationale Funktionen, Differentiation und Integration, Bestimmungsaufgaben, Extremwertaufgaben.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): a) Gegeben ist das folgende Schaubild seiner Funktion f(x):



Begründe, dass nur einer der folgenden Funktionsterme zum abgebildeten Graphen gehört:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 11x\,,\ g(x) = -\frac{1}{4}x(x-4)^2\,,\ h(x) = \frac{3}{2}x^2(x-4)^2\,,\ k(x) = \frac{3}{4}x^2(4-x)\,.$$

b) Es ist $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 11x$. Berechne alle Nullstellen der Funktion.

c) Bestimme die erste Ableitung der Funktion $h(x) = \frac{3}{2}x^2(x-4)^2$.

d) Berechne die Wendestelle der Funktion $k(x) = \frac{3}{4}x^2(4-x)$.

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): a) Der Graph einer ganz rationalen Funktion f(x) 3. Grades besitzt auf der y-Achse einen Hochpunkt, hat auf der x-Achse an der Stelle x = 4 einen Tiefpunkt und verläuft den Punkt P(-1|25). Bestimme die Funktionsgleichung von f(x). Bestimme die Funktionsgleichung von f(x).

b) Es ist $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$. Berechne den Schnittpunkt S der zwei Tangenten an die Funktion f(x) in den Punkten Q(-2|f(-2)) und R(1|f(1)).

c) Berechne den (zweiten) Schnittpunkt T zwischen der Tangente im Hochpunkt der Funktion f(x) und der Funktion f(x).

d) Berechne den Steigungswinkel der Normalen im Wendepunkt der Funktion f(x).

Aufgabe 3 (mit Hilfsmitteln): In die quadratische Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ soll ein rechtwinkliges Dreieck zwischen x-Achse und Funktion so einbeschrieben werden, dass die Ecke A des Dreiecks der Ursprung des Koordinatensystems ist, die Grundseite des Dreiecks zwischen den Ecken A und B auf der x-Achse liegt und die Ecke C sich senkrecht über B auf der Funktion befindet.

a) Zeichne die Funktion f(x) und das Dreieck ABC in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem ein für den Fall, dass die Grundseite des Dreiecks 6 Längeneinheiten groß ist.

b) Bestimme die Grundseitenlänge u, für die der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird. Berechne Höhe und Flächeninhalt des flächenmaximalen Dreiecks.

Gegeben ist die ganz rationale Funktion g(x) 4. Grades mit $g(x) = \frac{1}{6}x^4 - 3x^2 + 2$.

c) Untersuche die Funktion g(x) auf Symmetrie und das Verhalten für x -> ±∞.

d) Bestimme die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion g(x). (Runde jeweils auf zwei Nachkommastellen.)

e) Zeichne die Funktion g(x) unter Kennzeichnung der besonderen Kurvenpunkte in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem ein.

Lösungen: 1a) Graph -> g(x) mit einfacher Nullstelle bei x = 0, doppelter Nullstelle bei x = 4, x->-∞: g(x)->+∞, x->+∞: g(x)->-∞, Punkt P auf g(x); die anderen Funktionen kommen nicht infrage; b) $f(x) = x^3/4-6x^2+11x = x(x^2/4-6x+11) = 0$ -> x=0, x=2, x=22 als Nullstellen; c) $h(x) = 1{,}5x^4-12x^3+24x^2$ -> $h'(x) = 6x^3-36x^2+48x$; d) $k(x) = 3x^2-3x^3/4$ -> $k''(x) = 6-4{,}5x = 0$ -> x=4/3 als Wendestelle mit $k'''(4/3)\neq 0$.

2a) Bestimmung der Funktionsgleichung von f(x):

I. <u>Ganz rationale Funktion</u>: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; Eigenschaften:

(1) Stelle x = 0 als Hoch-/Tiefstelle: f'(0) = 0 ->
Gleichung: $3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0$
(2) Punkt T(4|0) als Nullstelle: f(4) = 0 ->
Gleichung: $a\cdot 4^3 + b\cdot 4^2 + c\cdot 4 + d = 0$
(3) Punkt T(4|0) als Hoch-/Tiefpunkt: f'(4) = 0 ->
Gleichung: $3a\cdot 4^2 + 2b\cdot 4 + c = 0$
(4) Punkt P(-1|25): f(-1) = 25 ->
Gleichung: $a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d = 25$

II. <u>Koeffizientenbestimmung</u>: 4x4-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{aligned} &&+1c &&= 0\\ +64a + 16b &+ 4c &+ 1d &= 0\\ +48a + 8b &+ 1c &&= 0\\ -1a + 1b &- 1c &+ 1d &= 25 \end{aligned}$$

<u>Anfangstableau</u>:

0 0 1 0 | 0
64 16 4 1 | 0
48 8 1 0 | 0
-1 1 -1 1 | 25

<u>Zeilentausch</u>: (*1*) <-> (*2*) /

64 16 4 1 | 0
0 0 1 0 | 0
48 8 1 0 | 0
-1 1 -1 1 | 25

<u>1. Schritt</u>: 4*(*3*) - 3*(*1*) / 64*(*4*) + 1*(*1*) /

64 16 4 1 | 0
0 0 1 0 | 0
0 -16 -8 -3 | 0
0 80 -60 65 | 1600

<u>Zeilentausch</u>: (*2*) <-> (*3*) /

64 16 4 1 | 0
0 -16 -8 -3 | 0
0 0 1 0 | 0
0 80 -60 65 | 1600

<u>2. Schritt</u>: 1*(*4*) + 5*(*2*) /

64 16 4 1 | 0
0 -16 -8 -3 | 0
0 0 1 0 | 0
0 0 -100 50 | 1600

<u>3. Schritt</u>: 1*(*4*) + 100*(*3*) /

64 16 4 1 | 0
0 -16 -8 -3 | 0
0 0 1 0 | 0
0 0 0 50 | 1600

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} +64a + 16b + 4c + 1d &= 0\\ -16b - 8c - 3d &= 0\\ +1c &= 0\\ +50d &= 1600 \end{aligned}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:
d = 32
c = 0
b = -6
a = 1

III. <u>Funktion</u>: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$

b) $f(x) = x^3-6x^2+32$ -> $f'(x) = 3x^2-12x$, Q(-2|0), R(1|27) -> Tangenten: t_Q: y = 36x+72, t_R: y = -9x+36 -> Tangentenschnittpunkt S(-0,8|43,2); c) Tangente t_H: y = 32 -> f(x) = 32 -> Schnittpunkt T(6|32); d) $f(x) = x^3-6x^2+32$ -> $f''(x) = 6x-12$ -> Wendepunkt W(2|16) -> Wendenormale n: y= x/12 + 95/6 -> Steigungswinkel: φ = 4,76°.

3a) Parabel, Dreieck s.u.; b) Flächenfunktion $A(u) = 2u^2-u^3/4$ -> $A'(u) = 4u-3u^2/4 = 0$ -> [u=0], u=16/3 mit g=16/3, h=f(16/3) = 64/9, A(16/3) = gh/2 = 128/27 als maximaler Flächeninhalt; c) g(x) symmetrisch zu y-Achse, x->±∞: g(x)->+∞; d) N(±4,16|0), T(±3|-11,5), W(±1,73|-5,5), N(±0,83|0), H(0|2); e) Graph s.u.