Michael Buhlmann

Mathematik-Abiturprüfung
> Vektorrechnung I

Einleitung: Die Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Vektorrechnung betreffen die Aufgaben Themen wie lineare Gleichungssysteme, Punkte, Geraden, Ebenen im dreidimensionalen Vektorraum, deren Konstruktion und Lagebeziehungen zueinander.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel): Löse das lineare Gleichungssystem. Wie lässt sich die Lösung innerhalb der Vektorrechnung geometrisch deuten?

$+ 2x_1 + x_2 - x_3 = 12$

$+ x_1 + 2x_2 + x_3 = 18$

$+ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 42$

Aufgabe 2 (ohne Hilfsmittel): Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ und die Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$. Der Punkt S(4|0|1) ist der Schnittpunkt von Gerade von Ebene, der Punkt P(3|4|-5) liegt auf der Geraden. Spiegele die Gerade g an der Ebene E zur Bildgeraden g‘.

Aufgabe 3 (mit Hilfsmitteln): Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 befinden sich zum Zeitpunkt t = 0 (in Minuten) an den Punkten P(2|2|8) bzw. Q(6|4|0) (Koordinaten in Kilometern; Q: Flughafen) und bewegen sich von da in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (gleiche Zeiteinheiten t in Minuten).

a) Wie lauten die Flugbahnen der beiden Flugzeuge?

b) Wie weit sind die Flugzeuge beim Start des Flugzeugs F_2 voneinander entfernt?

c) Unter welchem Steigungswinkel startet das Flugzeug F_2 vom Flughafen?

d) Wie hoch ist die Geschwindigkeit der Flugzeuge (in km/h)?

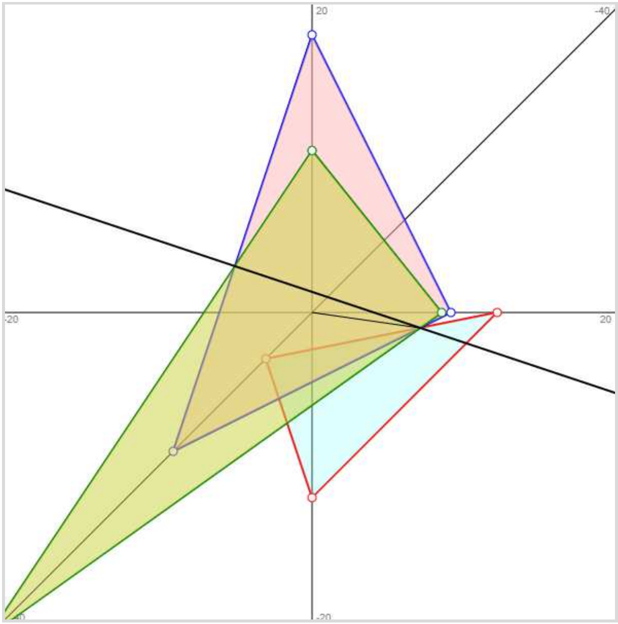
e) Bestimme die kürzeste Entfernung zwischen den Flugbahnen.

f) Flugzeug F_1 durchfliegt eine Wolkenbank, die von zwei parallelen Ebenen mit Abstand 20 km begrenzt wird. Die Gleichung der zunächst vom Flugzeug erreichten Ebene lautet: E: $6x_1 + 8x_2 = 150$. Wann und wo erreicht und verlässt das Flugzeug die Wolkenbank, wie lange hält es sich in der Wolkenbank auf?

g) Ein Ballon B startet bei Windstille vom Punkt R(10|0|0) mit einer Steiggeschwindigkeit von 4 m/s aus. Bei welchem Startzeitpunkt des Ballons kommt es zu einer Kollision mit dem Flugzeug F_2?

(Abkürzungen: h = Stunde, km = Kilometer, m = Meter, min = Minute, s = Sekunde)

Lösungen: 1. Lineares Gleichungssystem -> Gauß-Algorithmus ->



<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 12$

$+ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 18$

$+ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 42$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	R.S.
2	1	-1	12
1	2	1	18
1	5	4	42

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 1*(*1*) /

2	1	-1	12
0	3	3	24
0	9	9	72

<u>2. Schritt</u>: 1*(*3*) - 3*(*2*) /

2	1	-1	12
0	3	3	24
0	0	0	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 12$

$+ 3x_2 + 3x_3 = 24$

$0 = 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = t$, $x_2 = 8 - 1t$, $x_1 = 2 + 1t$ -> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t

-> geometrische Deutung: drei Ebenen E_1, E_2, E_3 schneiden sich in einer Schnittgeraden g.

2. Bildgerade g‘: $\vec{x} = \vec{OS} + t\,\vec{SP'}$ mit an Ebene E gespiegelten Punkt P‘ vermöge Fußpunkt F als Schnittpunkt zwischen Lotgerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + s\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ als Normalenvektor der Ebene) und Ebene, d.h.: P(3|4|-5), Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ->

Lotgerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ -> h∩E = {F} mit F(7|2|-1) (s=2) -> Spiegelformel: $\vec{OP'} = 2\cdot\vec{OF} - \vec{OP}$ mit P‘(11|0|3) ->

Bildgerade g‘: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3a) Flugzeugbahnen: F_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, F_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\left|\vec{PQ}\right|$ = 9,17 km; c) sin(φ) = 1/3 => φ = 19,5°;

d) $v_1 = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|$ = 5 km/min = 300 km/h, $v_2 = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$ = 3 km/min = 180 km/h; e) F_1, F_2 windschief -> d(F_1,F_2) = 8,21 km;

f) Wolkenbank -> Ebenen E, F: $6x_1+8x_2 = 350$ -> Schnittpunkte S_1(9,32|11,76|8) (t = 2,44), S_2(21,32|27,76|8) (t = 6,44) -> 4 min Aufenthalt in der Wolkenbank; g) Windstille (senkrechter Aufstieg), Geschwindigkeit (4 m/s = 0,24 km/min) -> Ballongerade: B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$, B∩$F_2$ -> Schnittpunkt S(10|0|2) (s = 8 1/3, t = 2) -> Kollision zwischen Ballon und Flugzeug erfolgt, wenn Ballon 8 1/3 – 2 = 6 1/3 Minuten vor Flugzeug startet.