

Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung oder Tangentensteigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Höhere Ableitungen sind: $f''(x) = (f'(x))'$, $f'''(x) = (f''(x))'$ usw. Die Ermittlung der Ableitungsfunktionen $f'(x)$ usw. erfolgt über die Ableitungsregeln (für Funktionen $u(x)$, $v(x)$ und reelle Zahlen k , r):

$$\begin{aligned} (u(x) + v(x))' &= u'(x) + v'(x) \quad (\text{Summenregel}) \\ (u(x) + r)' &= u'(x) \quad (\text{additive Konstante}) \\ (ku(x))' &= ku'(x) \quad (\text{multiplikative Konstante, konstanter Faktor}) \\ (u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (\text{Produktregel}) \\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \quad (\text{Quotientenregel}) \\ (u(v(x)))' &= u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (\text{Kettenregel: äußere Ableitung} \times \text{innere Ableitung}) \end{aligned}$$

Für spezielle Funktionen (mit reellen a , b , n , r) stellen sich die Ableitungsregeln wie folgt dar:

$$\begin{aligned} (r)' &= 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad ((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1} \quad (\text{Potenzregel}) \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{Wurzelfunktion}) \\ (\sin x)' &= \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \\ (\sin(ax+b))' &= a \cos(ax+b), \quad (\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b) \\ &\quad (\text{trigonometrische Funktionen}) \\ (e^x)' &= e^x, \quad (e^{ax+b})' = ae^{ax+b} \quad (\text{natürliche Exponentialfunktionen}) \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \quad (\text{natürliche Logarithmusfunktion}) \end{aligned}$$

Zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten (mit Funktionen $u(x)$, $v(x)$, reellen a , b , n usw.):

a) Anwendung der Potenzgesetze für die Funktionsterme und der Potenzregel für das Ableiten:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad f(x) = \frac{1}{ax^n} = \frac{1}{a} x^{-n}, \quad f(x) = \frac{1}{(ax+b)^n} = (ax+b)^{-n}, \\ f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}, \quad f(x) = \frac{1}{a\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{a} x^{-\frac{1}{n}} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

b) Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a}{v(x)} = a(v(x))^{-1} \quad \text{mit: } f'(x) = -\frac{av'(x)}{(v(x))^2}, \\ f(x) = \frac{a}{(v(x))^n} = a(v(x))^{-n} \quad \text{mit: } f'(x) = -\frac{anv'(x)}{(v(x))^{n+1}} \end{aligned}$$

c) Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{x^n} = a_m x^{m-n} + \dots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}$$

d) Vermeidung der Quotientenregel bei Nennern vom Typ e^{ax} u.ä. und Anwendung der Produktregel (mit Ausklammern von e^{-ax} u.ä.):

$$f(x) = \frac{u(x)}{e^{ax}} = u(x) \cdot e^{-ax} \quad \text{mit: } f'(x) = u'(x) \cdot e^{-ax} - au(x) \cdot e^{-ax} = (u'(x) - au(x)) \cdot e^{-ax}$$

e) Anwendung der Quotientenregel vor Anwendung der Produktregel bei Bruchtermen

f) Kürzen der Ableitung nach Anwendung der Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{(v(x))^n} \text{ mit: } f'(x) = \frac{u'(x)(v(x))^n - u(x)n(v(x))^{n-1}v'(x)}{(v(x))^{2n}} = \frac{u'(x)v(x) - nu(x)v'(x)}{(v(x))^{n+1}}$$