Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung oder Tangentensteigung von f in x_0, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Höhere Ableitungen sind: f''(x) = (f'(x))', f'''(x) = (f''(x))' usw. Die Ermittlung der Ableitungsfunktionen f'(x) usw. erfolgt über die Ableitungsregeln (für Funktionen u(x), v(x) und reelle Zahlen k, r):

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x) \text{ (Summenregel)}$$
$$(u(x)+r)' = u'(x) \text{ (additive Konstante)}$$
$$(ku(x))' = ku'(x) \text{ (multiplikative Konstante, konstanter Faktor)}$$
$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \text{ (Produktregel)}$$
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \text{ (Quotientenregel)}$$
$$(u(v(x)))' = u'(v(x))\cdot v'(x) \text{ (Kettenregel: äußere Ableitung × innere Ableitung)}$$

Für spezielle Funktionen (mit reellen a, b, n, r) stellen sich die Ableitungsregeln wie folgt dar:

$$(r)' = 0,\ (x^n)' = nx^{n-1},\ ((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1} \text{ (Potenzregel)}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (Wurzelfunktion)}$$
$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b),\ (\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$$
(trigonometrische Funktionen)
$$(e^x)' = e^x,\ (e^{ax+b})' = ae^{ax+b} \text{ (natürliche Exponentialfunktionen)}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (natürliche Logarithmusfunktion)}$$

Zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten (mit Funktionen u(x), v(x), reellen a, b, n usw.):

a) Anwendung der Potenzgesetze für die Funktionsterme und der Potenzregel für das Ableiten:

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n},\ f(x) = \frac{1}{ax^n} = \frac{1}{a}x^{-n},\ f(x) = \frac{1}{(ax+b)^n} = (ax+b)^{-n},$$
$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}},\ f(x) = \frac{1}{a\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{a}x^{-\frac{1}{n}} \text{ usw.}$$

b) Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel:

$$f(x) = \frac{a}{v(x)} = a(v(x))^{-1} \text{ mit: } f'(x) = -\frac{av'(x)}{(v(x))^2},$$
$$f(x) = \frac{a}{(v(x))^n} = a(v(x))^{-n} \text{ mit: } f'(x) = -\frac{anv'(x)}{(v(x))^{n+1}}$$

c) Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{x^n} = a_m x^{m-n} + \ldots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}$$

d) Vermeidung der Quotientenregel bei Nennern vom Typ e^{ax} u.ä. und Anwendung der Produktregel (mit Ausklammern von e^{-ax} u.ä.):

$$f(x) = \frac{u(x)}{e^{ax}} = u(x)\cdot e^{-ax} \text{ mit: } f'(x) = u'(x)\cdot e^{-ax} - au(x)\cdot e^{-ax} = (u'(x)-au(x))\cdot e^{-ax}$$

e) Anwendung der Quotientenregel vor Anwendung der Produktregel bei Bruchtermen

f) Kürzen der Ableitung nach Anwendung der Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{(v(x))^n} \text{ mit: } f'(x) = \frac{u'(x)(v(x))^n - u(x)n(v(x))^{n-1}v'(x)}{(v(x))^{2n}} = \frac{u'(x)v(x) - nu(x)v'(x)}{(v(x))^{n+1}}$$