<u>Definition</u>: Für eine Funktion f: D_f -> **R** heißt die Funktion y <u>Grenzkurve</u> (Asymptote) von f für x->∞, x->-∞ bzw. x->±∞, wenn

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y)=0 \text{ bzw. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0 \text{ bzw. } \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y)=0$$

gilt. Ist die Grenzkurve y eine Gerade, also y = mx + c, so heißt die Grenzkurve <u>Asymptote</u>. Ist hierbei m = 0, so ist y eine <u>waagerechte Asymptote</u>, für m ≠ 0 eine <u>schiefe Asymptote</u>.

Der Grenzwertbegriff ergibt sich aus dem Umfeld dieser infinitesimalen Begrifflichkeit im Zusammenhang von Stetigkeit, Ableitung und Integral.

Es gilt hinsichtlich von Funktionen f(x) und Grenzkurven y die Formulierung:

f(x) -> y für x->∞, x->-∞ bzw. x->±∞

Grenzkurven sind im Allgemeinen ganz rationale Funktionen (Polynome), jedoch können auch andere Funktionstypen auftreten.

Für <u>gebrochen rationale Funktionen</u> ergibt sich der folgende Sachverhalt:

Waagerechte, senkrechte Asymptoten, Lücken
Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\frac{a_n(x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2}\cdot...\cdot R_1(x)}{b_m(x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l}\cdot...\cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0=0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine <u>Lücke</u> mit Lückenwert f*(x_P) vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … <u>senkrechte Asymptoten</u> mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}\begin{cases} \to 0 = y & \text{falls } n < m \\ \to \frac{a_n}{b_m} = y & \text{falls } n = m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n > m \end{cases}$

Asymptoten, Lücken bei gebrochen rationalen Funktionen

Grenzkurven, senkrechte Asymptoten (Polstellen) sowie Lücken treten auch jenseits gebrochen rationaler Funktionen in Erscheinung. Für die <u>Exponentialfunktion</u> gilt:

Waagerechte Asymptoten	
Funktion: $f(x) = e^{ax}$, a>0: x->∞: f(x) -> +∞ x->-∞: f(x) -> 0 = y waagerechte Asymptote	Funktion: $f(x) = e^{ax}$, a<0: x->∞: f(x) -> 0 = y waagerechte Asymptote x->-∞: f(x) -> +∞
Funktion: $f(x) = (a_nx^n+…+a_0)e^{ax}$, a>0: x->∞: f(x) -> +∞ (a_n>0) bzw. f(x) -> -∞ (a_n<0) x->-∞: f(x) -> 0 = y waagerechte Asymptote	Funktion: $f(x) = (a_nx^n+…+a_0)e^{ax}$, a<0: x->∞: f(x) -> 0 = y waagerechte Asymptote x->-∞: f(x) -> +∞ (a_n>0, n gerade; a_n<0, n ungerade) bzw. f(x) -> -∞ (a_n<0, n gerade; a_n>0, n ungerade)

Waagerechte Asymptoten bei Exponentialfunktionen

Michael Buhlmann, 12.2013