Für eine integrierbare Funktion f: D_f -> **R** ist $F(x)=\int f(x)dx+C$ eine Stammfunktion (unbestimmtes Integral) mit F'(x) = f(x) und Integrationskonstante C. Die Ermittlung der Stammfunktionen F(x) erfolgt über die Aufleitungs- oder Integrationsregeln. Die Integralfunktion (Flächenfunktion) wird definiert über das bestimmte Integral vermöge:

$$I_a(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Sie ordnet daher jedem x eine (Netto-) „Fläche" zu, die auf der einen Seite von x=a begrenzt wird. Die Integralfunktion $I_a(x)$ ist eine Stammfunktion von f(x) mit $I_a(a)=0$, es gilt:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = I_a(x_2)-I_a(x_1),\quad I_a'(x)=f(x)$$

Bei uneigentlichen Flächen A (Flächen mit unendlicher Länge, aber endlichem Flächeninhalt) zwischen Funktion und x-Achse, zwischen zwei Funktionen bzw. zwischen Funktion und Asymptote ist zunächst das bestimmte Integral A(u) mit Grenze x = u zu berechnen und dann u -> ∞ (bzw. u -> -∞) durchzuführen, also:

$$\pm A(u)=\int_{x_0}^{u} h(x)dx=\left[H(x)\right]_{x_0}^{u} \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \pm A=\int_a^{\infty} h(x)dx$$

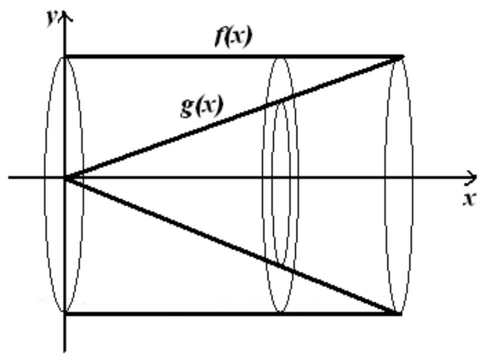
D.h.: A(u) ist eine Integralfunktion mit existierendem Grenzwert (waagerechter Asymptote) für u -> ∞ (bzw. u -> -∞).

Für eine auf dem Intervall [a; b] definierte, integrierbare Funktion f(x) (≥0) hat der Rotationskörper, der durch Drehung der Fläche zwischen Funktion und x-Achse um die x-Achse entsteht, das Volumen:

$$V=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Für zwei auf einem Intervall [a; b] integrierbare Funktionen f(x) und g(x) mit f(x) ≥ g(x) (und a, b etwa als Schnittstellen der Funktionen) berechnet sich das Volumen des um die x-Achse gedrehten Rotationskörpers „zwischen" den Funktionen als:

$$V=\pi\int_a^b \left(\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right)dx=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx-\pi\int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx$$



Analog zur Rotation um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper, wenn eine Funktion um die y-Achse rotiert. Zur integrierbaren Funktion f: [a; b] -> **R** mit y = f(x) muss dazu eine ebenso integrierbare Umkehrfunktion g: [f(a); f(b)] -> **R** mit x = g(y) = $f^{-1}(y)$ existieren. Dann ergibt sich mit y_1 = f(a), y_2 = f(b) das Volumen:

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2} \left(g(y)\right)^2 dy$$