Eine ganz rationale Funktion (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Im Folgenden sei der Grad n ≤ 4.

Im Rahmen von Bestimmungsaufgaben für ganz rationale Funktionen werden die Koeffizienten des gesuchten Funktionsterms auf Grund gegebener Eigenschaften der Funktion ermittelt:

Geraden	
Funktion: y = mx + b (m als Steigung, b als y-Achsen-Abschnitt)	
Punkt $P(x_1\|y_1)$, Steigung m	Punkte $P(x_1\|y_1)$, $Q(x_2\|y_2)$
Punktsteigungsform: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$	Zweipunkteform: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Umstellen zu: $y = m(x-x_1) + y_1$	Umstellen zu: $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1$
	Steigung: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Ursprungsgerade y = mx (durch den Ursprung): $y = \frac{y_1}{x_1} x$ mit: $m = \frac{y_1}{x_1}$	

Bestimmungsaufgabe für Geraden

Parabeln	
Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform), $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform)	
Scheitelpunkt $S(x_S\|y_S)$:	$f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$
Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = a(x_1-x_S)^2 + y_S = y_1$ -> $a = \frac{y_1-y_S}{(x_1-x_S)^2}$

Bestimmungsaufgabe für Parabeln (2. Grades, Scheitelform)

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
	Funktion und Ableitungen:	
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
	Lineare Gleichungen vom Typ:	
$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 + b + c = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 + 2b = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 3bx_1^3 + 2cx_2 + d = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 6bx_3 + 2c = y_3$
	für bestimmte x- und y-Werte	

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:	
Gleichungen mit Unbekannten a, b, … gemäß den Funktionseigenschaften:	
Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$:	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	f(0) = 0
y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$:	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	f(0) = 0, f'(0) = 0
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$

Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt $H/T(x_E\|y_€)$:	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt $W(x_W\|y_W)$:	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt $S(x_S\|y_S)$::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->

Aufstellen der Funktionsgleichung:

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Funktion 2. Grades **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades** **(Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades** **(Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen

Lineare Gleichungen vom Typ:

$f(x_1) = ax_1^2 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + cx_1 = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + cx_1^2 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2cx_2 = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 2c = y_3$

für bestimmte x- und y-Werte

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

Gleichungen mit Unbekannten a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:

Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$:	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	$f(0) = 0$
y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$:	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt $H/T(x_E\|y_€)$:	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt $W(x_W\|y_W)$:	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt $S(x_S\|y_S)$::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->

Aufstellen der Funktionsgleichung:

$f(x) = ax^2 + c$	$f(x) = ax^3 + cx$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Bestimmungsaufgabe für symmetrische ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Michael Buhlmann, 02.2012