Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Gleichungen sind da definiert, wo beide Terme definiert sind (Definitionsbereich der Gleichung). Die Lösungsmenge einer Gleichung umfasst die Unbekannten, die die Gleichung lösen. Nach den in der Gleichung vorliegenden Termen werden Gleichungen linear, quadratisch, …, Potenz-, Exponentialgleichungen oder trigonometrische Gleichungen genannt (Typen von Gleichungen). Im Folgenden seien alle Unbekannten x und Koeffizienten reell.

Lineare Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$ax + b = 0$$

mit den Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für $a \neq 0$ dann:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Die lineare Gleichung ax + b = 0 entspricht damit grafisch der Nullstelle einer Geraden y = ax + b mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b.

Quadratische Gleichungen sind von der Form:

$ax^2 + bx + c = 0$			
$a \neq 0$, $b = 0$	$a \neq 0$, $c = 0$	$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$	$a = 1$, $b = p$, $c = q$
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax+b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}<0$), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}>0$)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (Mitternachtsformel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)
	Quadratische Gleichung hat die Form: $ax(x - x_1) = 0$ (bei 2 Lösungen $x = 0$, $x = x_1 = -\frac{b}{a}$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $a(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $(x-x_1)(x-x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit den Zahlen a_0, … a_n, $n \in \mathbf{N}$, genügen. Die Lösung der Polynomgleichung ist meist nicht über eine Formel bestimmbar (es sei denn in den Fällen $n \leq 4$), sondern vielfach über numerische Verfahren (Newton-Verfahren). Es gilt aber: Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren $p_1(x)$, $p_2(x)$, … $p_m(x)$ zerlegen, so dass folgt:

$$p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots\cdot p_m(x)=0 \Leftrightarrow p_1(x)=0 \vee p_2(x)=0 \vee \ldots p_m(x)=0$$

Durch Polynomdivision (Ausklammern) lassen sich damit Nullstellen bestimmen. Eine weitere Möglichkeit bieten Substitutionen, etwa um aus biquadratischen Gleichungen quadratische zu er halten.

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die Brüche enthalten. Bruchgleichungen einfacher Art können auf lineare und quadratische Gleichungen zurückgeführt werden durch: 1) Definitionsbereich, Umstellen/Vereinfachen der Bruchgleichung (Kürzen von Brüchen, Addition/Division/Multiplikation von Zahlen), 2) Multiplikation der Bruchgleichung mit Nennern bzw. Hauptnenner der vorkommenden Brüche, 3) Ausmultiplizieren der mit Nennern bzw. Hauptnenner malgenommenen Terme (Summen, Differenzen), 4) Sortieren nach x^2, x und einfachen Zahlen, z.B. durch Addition und Subtraktion von Summanden zur Erzeugung einer Null auf einer Seite der Gleichung, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen und quadratischen Gleichung nach x, z.B. mit Hilfe der p-q-Formel, [7) Probe].

Potenzgleichungen sind vom Typ

$$x^n = a$$

o.ä. und durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen (n beliebige reelle Zahl, x meist ≥0).

Wurzelgleichungen sind spezielle Potenzgleichungen vom Typ

$$\sqrt[n]{x}=a \text{ bzw. } x^{\frac{1}{n}}=a$$

o.ä. und durch Potenzieren zu lösen (n beliebige reelle Zahl, x meist ≥0).

Es gelten bei Exponentialgleichungen mit auftretender Basis e = 2,71828… (Eulersche Zahl) und bei Gleichungen mit dem natürlichen Logarithmus, a, b>0, m, n, r beliebig die Potenzgesetze für die Exponentialfunktion $y = e^x$ der Basis e:

$$e^0=1,\ e^1=e,\ e^n\cdot e^m=e^{n+m},\ \frac{e^n}{e^m}=e^{n-m},\ \frac{1}{e^n}=e^{-n},\ e^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{e},$$
$$(e^n)^m=e^{n\cdot m}$$

sowie die Logarithmengesetze für den natürlichen Logarithmus y = ln*x*:

$$\ln 1=0,\ \ln e=1,\ \ln(ab)=\ln a+\ln b,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b,\ \ln(a^r)=r\cdot\ln a,$$
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$$

Außerdem gilt für reelle z:

$$e^{\ln z}=z,\ \ln e^z=z$$

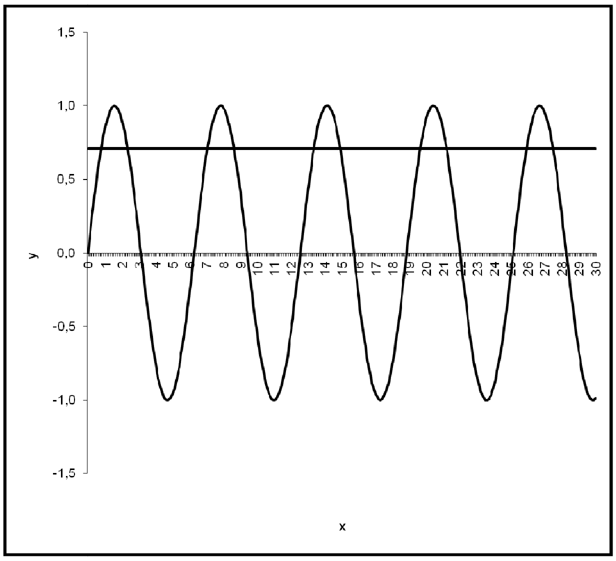
Exponentialgleichungen sind dann durch Logarithmieren, Logarithmengleichungen durch Exponieren zu lösen.

Trigonometrische Gleichungen sind von der Form: f(x) = y mit den trigonometrischen Funktionen f(x) = a·sin(b(x-c))+d bzw. f(x) = a·cos(b(x-c))+d. Sie lassen sich zurückführen auf Gleichungen der Form:

$$\sin(b(x-c))=\frac{y-d}{a} \text{ bzw. } \cos(b(x-c))=\frac{y-d}{a}$$

und weiter mit c=0 auf Gleichungen vom Typ:

$$\sin(bx)=r \text{ bzw. } \cos(bx)=r \quad (*)$$



Gleichung: $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Für <u>besondere Werte</u> von r ergeben sich bei den trigonometrischen Gleichungen auch besondere Lösungen. Die besonderen Werte sind der folgenden <u>Tabelle</u> zu entnehmen:

Funktion \ x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin*x bzw.* r	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos*x bzw.* r	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Als <u>Lösungen</u> der Gleichungen (*) ergeben sich dann mit ganzen Zahlen k = … -2, -1, 0, 1, 2, … (2k = gerade Zahl, 2k+1 = ungerade Zahl usw.): x = Grundlösung(en) + 2kπ/b.