

Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Gleichungen sind da definiert, wo beide Terme definiert sind (Definitionsbe- reich der Gleichung). Die Lösungsmenge einer Gleichung umfasst die Unbekannten, die die Gleichung lösen. Nach den in der Gleichung vorliegenden Termen werden Gleichungen linear, quadratisch, ..., Potenz-, Exponentialgleichungen oder trigonometrische Gleichungen genannt (Typen von Gleichungen). Im Folgenden seien alle Unbekannten x und Koeffizienten reell.

Lineare Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$ax + b = 0$$

mit den Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für $a \neq 0$ dann:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Die lineare Gleichung $ax + b = 0$ entspricht damit grafisch der Nullstelle einer Geraden $y = ax + b$ mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b.

Quadratische Gleichungen sind von der Form:

| $ax^2 + bx + c = 0$ | | | |
|---|--|--|---|
| $a \neq 0, b = 0$ | $a \neq 0, c = 0$ | $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ | $a=1, b=p, c=q$ |
| $ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ | $ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$ | $ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | $x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ |
| Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a} < 0$), 1 Lösung (bei $c=0$), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a} > 0$) | Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen | Gemischt quadratische Gleichung (Mitternachtsformel): $D = b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei $D < 0$) 1 Lösung (bei $D = 0$) 2 Lösungen (bei $D > 0$) | Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei $D < 0$) 1 Lösung (bei $D = 0$) 2 Lösungen (bei $D > 0$) |
| | Quadratische Gleichung hat die Form: $ax(x - x_1) = 0$ (bei 2 Lösungen $x = 0$, $x = x_1 = -\frac{b}{a}$) | Quadratische Gleichung hat die Form: $a(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1, x = x_2$) | Quadratische Gleichung hat die Form: $(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1, x = x_2$) |

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit den Zahlen $a_0, \dots, a_n, n \in \mathbf{N}$, genügen. Die Lösung der Polynomgleichung ist meist nicht über eine Formel bestimmbar (es sei denn in den Fällen $n \leq 4$), sondern vielfach über numerische Verfahren (Newton-Verfahren). Es gilt aber: Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ zerlegen, so dass folgt:

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_m(x) = 0 \Leftrightarrow p_1(x) = 0 \vee p_2(x) = 0 \vee \dots \vee p_m(x) = 0$$

Durch Polynomdivision (Ausklammern) lassen sich damit Nullstellen bestimmen. Eine weitere Möglichkeit bieten Substitutionen, etwa um aus biquadratischen Gleichungen quadratische zu erhalten.

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x , die Brüche enthalten. Bruchgleichungen einfacher Art können auf lineare und quadratische Gleichungen zurückgeführt werden durch: 1) Definitionsbereich, Umstellen/Vereinfachen der Bruchgleichung (Kürzen von Brüchen, Addition/Division/Multiplikation von Zahlen), 2) Multiplikation der Bruchgleichung mit Nennern bzw. Hauptnenner der vorkommenden Brüche, 3) Ausmultiplizieren der mit Nennern bzw. Hauptnenner malgenommenen Terme (Summen, Differenzen), 4) Sortieren nach x^2 , x und einfachen Zahlen, z.B. durch Addition und Subtraktion von Summanden zur Erzeugung einer Null auf einer Seite der Gleichung, 6) Auflösen der so erhaltenen linearen und quadratischen Gleichung nach x , z.B. mit Hilfe der p-q-Formel, [7] Probe].

Potenzgleichungen sind vom Typ

$$x^n = a$$

o.ä. und durch Ziehen der n-ten Wurzel zu lösen (n beliebige reelle Zahl, x meist ≥ 0).

Wurzelgleichungen sind spezielle Potenzgleichungen vom Typ

$$\sqrt[n]{x} = a \text{ bzw. } x^{\frac{1}{n}} = a$$

o.ä. und durch Potenzieren zu lösen (n beliebige reelle Zahl, x meist ≥ 0).

Es gelten bei Exponentialgleichungen mit auftretender Basis $e = 2,71828\dots$ (Eulersche Zahl) und bei Gleichungen mit dem natürlichen Logarithmus, $a, b > 0$, m, n, r beliebig die Potenzgesetze für die Exponentialfunktion $y = e^x$ der Basis e :

$$e^0 = 1, e^1 = e, e^n \cdot e^m = e^{n+m}, \frac{e^n}{e^m} = e^{n-m}, \frac{1}{e^n} = e^{-n}, e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e},$$

$$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$$

sowie die Logarithmengesetze für den natürlichen Logarithmus $y = \ln x$:

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1, \ln(ab) = \ln a + \ln b, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \ln(a^r) = r \cdot \ln a,$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

Außerdem gilt für reelle z :

$$e^{\ln z} = z, \ln e^z = z$$

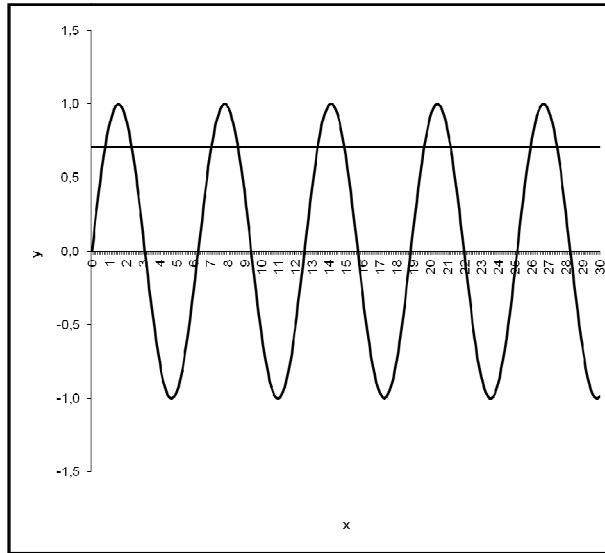
Exponentialgleichungen sind dann durch Logarithmieren, Logarithmengleichungen durch Exponieren zu lösen.

Trigonometrische Gleichungen sind von der Form: $f(x) = y$ mit den trigonometrischen Funktionen $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$. Sie lassen sich zurückführen auf Gleichungen der Form:

$$\sin(b(x-c)) = \frac{y-d}{a} \text{ bzw. } \cos(b(x-c)) = \frac{y-d}{a}$$

und weiter mit $c=0$ auf Gleichungen vom Typ:

$$\sin(bx) = r \text{ bzw. } \cos(bx) = r \quad (*)$$



Gleichung: $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Für besondere Werte von r ergeben sich bei den trigonometrischen Gleichungen auch besondere Lösungen. Die besonderen Werte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

| Funktion \ x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|--------------|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|
| sinx bzw. r | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| cosx bzw. r | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Als Lösungen der Gleichungen (*) ergeben sich dann mit ganzen Zahlen $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ($2k =$ gerade Zahl, $2k+1 =$ ungerade Zahl usw.): $x = \text{Grundlösung(en)} + 2k\pi/b$.