

Eine ganz rationale Funktion (Polynom)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen  $n$  und reelle Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$ ).  $n$  heißt der Grad der ganz rationalen Funktion.

Die Kurvendiskussion ermittelt die Besonderheiten der aus einer Funktion  $f(x)$  sich ergebenden Kurve im  $x$ - $y$ -Koordinatensystem, des Graphen von  $f(x)$ . Hinsichtlich einer ganz rationalen Funktion  $f(x)$  heißt das:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$ $f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2 a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + \dots + 6 a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal $n$ ; Gleichung $f(x) = 0$ lösen): $f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow N(x_1 0), N(x_2 0), \dots$ (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal $n-1$ ; Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$ ; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$ ; ...
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal $n-2$ ; Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$ ; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$ ; ...
IVa. Sattelpunkte $x_0$ liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$

**Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen**

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion																		
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$ : $f(x)$ monoton steigend ( $x_1$ als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$ ) oder monoton fallend ( $x_1$ als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$ ); – Monotonieintervall $(x_1, x_2)$ : $f(x)$ monoton fallend ( $x_1$ als Hochpunkt, $x_2$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_1$ als Tiefpunkt, $x_2$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$ ); ... – Monotonieintervall $(x_n, \infty)$ : $f(x)$ monoton fallend ( $x_n$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_n$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$ )																		
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach IV.]; bei Wendepunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$ : $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0) > 0$ ) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0) < 0$ ); – Krümmungsintervall $(x_1, x_2)$ : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$ ) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$ ); ... – Krümmungsintervall $(x_n, \infty)$ : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$ ) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$ )																		
VII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur $y$ -Achse): $f(-x) = f(x)$ oder: nur gerade Exponenten im Term von $f(x)$ (gerade) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): $f(-x) = -f(x)$ oder: nur ungerade Exponenten im Term von $f(x)$ (ungerade) c) $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw. $f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.																		
VIII. Verhalten für betragsmäßig große $x$ ( $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ ) ( $n$ als Grad der ganz rationalen Funktion):																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th><math>a_n &gt; 0</math></th> <th><math>n</math> ungerade</th> <th><math>n</math> gerade</th> <th><math>a_n &lt; 0</math></th> <th><math>n</math> ungerade</th> <th><math>n</math> gerade</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>x \rightarrow \infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow \infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow \infty</math></td> <td><math>x \rightarrow \infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow -\infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow -\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>x \rightarrow -\infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow -\infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow \infty</math></td> <td><math>x \rightarrow -\infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow \infty</math></td> <td><math>f(x) \rightarrow -\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	$a_n > 0$	$n$ ungerade	$n$ gerade	$a_n < 0$	$n$ ungerade	$n$ gerade	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$a_n > 0$	$n$ ungerade	$n$ gerade	$a_n < 0$	$n$ ungerade	$n$ gerade													
$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$													
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$													

**Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen**