Eine gebrochen rationale Funktion (Polynom) f: D_f -> **R** ist vom Typ:

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

(für natürliche Zahlen m, n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n, b_0, …, b_m). Gebrochen rationale Funktion sind Brüche von ganz rationalen Funktionen, Quotienten aus Zähler- und Nennerpolynom.

Die Kurvendiskussion ermittelt die Besonderheiten der aus einer Funktion f(x) sich ergebenden Kurve im x-y-Koordinatensystem, des Graphen von f(x). Hinsichtlich einer gebrochen rationalen Funktion f(x) heißt das:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion

Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{a_n (x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2} \cdot ... \cdot R_1(x)}{b_m (x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l} \cdot ... \cdot R_2(x)}$

I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen:

a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich)

b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ -> x_{N1}, x_{N2}, …

c) Auswertung:

– Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert f*(x_P) vor.

– Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->-∞ (x->x_P, x>x_P) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, x<x_P) und f(x)->∞ (x->x_P, x>x_P)).

– Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).

II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt:

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n < m \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n = m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n > m \end{cases}$$

III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)

IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f'(x) einsetzen):

a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, …

b) f'(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f'(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f'(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f'(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …

V. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen):

a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, …

b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …

Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt:
f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion

VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach I., IV.]; bei Hoch- und Tiefpunkten sowie senkrechten Asymptoten x_1, x_2, …, x_n mit x_1 < x_2 < … < x_n, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

– Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x<x_1), f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_1, x>x_1), f'(x_0)<0);

– Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, x_1 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_1, x>x_1), x_2 als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, x_2 als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_2, x<x_2), f'(x_0)>0); …

– Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, x_n als Polstelle mit f(x)->∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, x_n als Polstelle mit f(x)->-∞ (x->x_n, x>x_n), f'(x_0)>0)

VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach I., V.]; bei Wendepunkten sowie senkrechten Asymptoten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):

– Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ $(x\to x_1, x<x_1)$, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ $(x\to x_1, x<x_1)$, $f''(x_0)>0$);

– Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ $(x\to x_1, x>x_1)$, x_2 als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ $(x\to x_2, x<x_2)$, $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_1 als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ $(x\to x_1, x>x_1)$, x_2 als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ $(x\to x_2, x<x_2)$, $f'(x_0)>0$); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x)\to-\infty$ $(x\to x_n, x>x_n)$, $f'(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, x_n als Polstelle mit $f(x)\to\infty$ $(x\to x_n, x>x_n)$, $f'(x_0)>0$); …

VIII. Symmetrie:

a) Achsensymmetrie (zur y-Achse; für gerade Funktionen): f(-x) = f(x) oder:

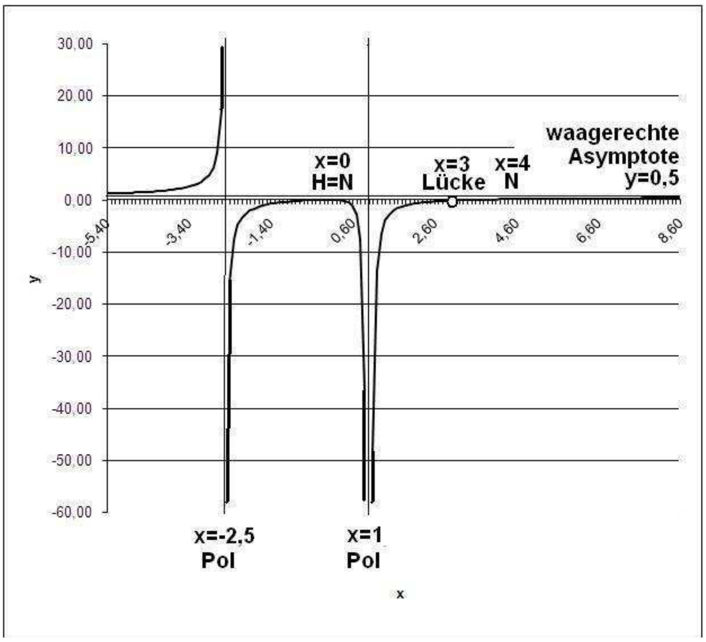
Zähler gerade, Nenner gerade -> f(x) gerade
Zähler ungerade, Nenner ungerade -> f(x) gerade

b) Punktsymmetrie (zum Ursprung; für ungerade Funktionen): f(-x) = -f(x) oder:

Zähler gerade, Nenner ungerade -> f(x) ungerade
Zähler ungerade, Nenner gerade -> f(x) ungerade

c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.
f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen



$$f(x) = \frac{x^2(x-4)(x-3)}{(2x+5)(x-3)(x-1)^2}$$