

Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$a_{11}x_1 + b_1x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad (m)$$

mit den reellen Variablen x_1, \dots, x_n , den reellen Koeffizienten a_{11}, \dots, a_{mn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, \dots, b_m . Sind alle Zahlen $b_1, \dots, b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen ($n > m$) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen ($n < m$) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Im Falle einer beliebigen Anzahl von m Gleichungen und n Unbekannten gilt hinsichtlich des Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems die folgende Vorgehensweise:

Lösen von linearen Gleichungssystemen (Gauß-Algorithmus)

1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; einer Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*)). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die entsprechende Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Diagonalgestalt gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy + dz = e \Leftrightarrow cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: $\mathbf{L} = \{(l|m|\dots|t)\}$ mit reellen Zahlen l, m, \dots, t .

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f \neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung: $\mathbf{L} = \{ \}$.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die dazugehörige rechte Seite ebenfalls ein Element $= 0$ enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z , dessen Diagonalelement $= 0$ ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ $\mathbf{L} = \{(l(r)|m(r)|\dots|t(r))\} \ r \in \mathbf{R}$ mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, ..., $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, \dots zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, \dots .

Eine entsprechende Vorgehensweise ergibt sich, wenn man das Gleichungssystem statt in eine (gestaffelte) Dreiecksgestalt in eine (modifizierte) Diagonalgestalt bringt.