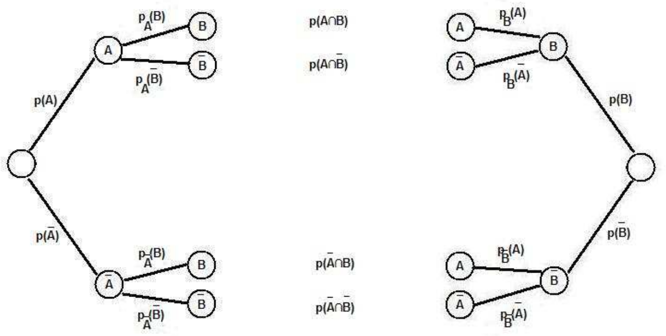
Datenblatt: Abitur > Mathematik > Stochastik
Wahrscheinlichkeitsrechnung

<u>Wahrscheinlichkeitsrechnung</u> untersucht Zufallsexperimente und die darin zugrunde liegenden mathematischen Modelle. Sie ist neben der (beschreibenden) Statistik ein Teilgebiet der Stochastik.

In <u>Zufallsexperimenten</u> (Zufallsversuchen mit nicht vorher bestimmten Ergebnissen) werden Ereignissen A <u>Wahrscheinlichkeiten</u> p = p(A) zugeordnet (relative Häufigkeit als die einem Ereignis A zugeordnete Zahl -> $p(A) = p = \frac{g}{n}$ mit: g = Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse, n = Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse). Bzgl. der Wahrscheinlichkeiten gilt dann zunächst: Ergebnismenge S = $\{a_1, \dots a_n\}$ -> Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge A, B, … $\subset$ S -> $A \cap B$ = Ereignis „A und B“, $A \cup B$ = Ereignis „A oder B“, $\overline{A}$ = Ereignis „nicht A“ (Gegenereignis), S = sicheres Ereignis, {} = unmögliches Ereignis. Und weiter:

$$0 \le p(A) \le 1$$
p(A) = 0 => A unmöglich
p(A) = 1 => A sicher
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B),\ p(A) + p(\overline{A}) = 1,\ p(A \cup B) = p(A) + p(B)\ (A \cap B = \{\})$$
(Additionssatz für Ereignisse)
$$p(A) = 1 - p(\overline{A})\ \text{(Gegenereignis)}$$

Zufallsexperimente und deren Ereignisse/Ergebnisse können verdeutlicht werden mit <u>Wahrscheinlichkeitsbäumen</u> (1-, 2-, …, n-stufig):



Es gelten hierbei die <u>Pfadregeln</u>: a) Pfad (Ast) A->B, p(A), p(B) -> $p(A \cap B) = p(A)p(B)$; b) mehrere Pfade -> Wahrscheinlichkeit als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade.

Zufallsexperimente und deren Ereignisse/Ergebnisse können auch verdeutlicht werden mit <u>Vierfeldertafeln</u>:

	A	$\overline{A}$	
B	$p(A \cap B)$	$p(\overline{A} \cap B)$	$p(B)$
$\overline{B}$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$p(\overline{B})$
	$p(A)$	$p(\overline{A})$	1

Es gilt weiter:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}\ \text{(bedingte Wahrscheinlichkeit)}$$
$$p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B)\ \text{(stochastische Unabhängigkeit)}$$

<u>Zufallsvariable</u>: X als reelle Abbildung zur Beschreibung des Zufallsexperiments -> $X(a_1) = x_1$, … mit Ergebnissen a_1, … -> Wahrscheinlichkeitsverteilung: x_1: $p(X=x_1)$, x_2: $p(X=x_2)$, … mit $p(X=x_1)+p(X=x_2)+\ldots = 1$ -> Erwartungswert $E(X) = x_1p(X=x_1) + x_2p(X=x_2) + \ldots$

<u>Bernoulli-Experiment</u> (als Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen): p Grundwahrscheinlichkeit, n Gesamtanzahl, Zufallsvariable X als Anzahl eines günstigen Ergebnisses:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ mit } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$p(X=0) = (1-p)^n,\ p(X=n) = p^n,\ p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k),\ p(X>k) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2) - p(X\le k_1) \text{ usw.}$$

Michael Buhlmann, 01.2013