Die (beschreibende) Statistik untersucht die hinter Zufallsexperimenten liegenden mathematischen Modelle. Sie ist neben der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Teilgebiet der Stochastik.

Bernoulli-Experiment (als Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen): p Grundwahrscheinlichkeit, n Gesamtanzahl, Zufallsvariable X als Anzahl eines günstigen Ergebnisses:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \text{ mit } \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$p(X=0) = (1-p)^n$, $p(X=n) = p^n$, $p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k)$, $p(X>k) = 1 - p(X\le k)$

$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$ usw.

Aus dem Bernoulli-Experiment ergibt sich die Binomialverteilung B(n,p) für die Zufallsvariable X der Trefferanzahl mit:

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Es gilt weiter:

$E(X) = \mu = np$ (Erwartungswert)

$\sigma=\sqrt{np(1-p)}$ (Standardabweichung)

Und weiter:

$p(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0{,}683$, $p(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0{,}954$, $p(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$ (Sigma-Regeln)

Mit Hilfe der Binomialverteilung können sog. Signifikanztests durchgeführt werden, um bei unbekannter Grundwahrscheinlichkeit p eines Bernoulli-Experiments diese Wahrscheinlichkeit anhand von Stichproben zu testen. D.h.:

Zweiseitiger Signifikanztest: H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p\ne p_0$ (Gegenhypothese) bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Annahmebereich [a; b] der Nullhypothese bei kleinstem a und b mit

$p(X\le a) > \alpha/2$, $p(X\le b) > 1-\alpha/2$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Annahmebereich bzw. sonst.

Einseitiger Signifikanztest (linksseitig): H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p<p_0$ (Gegenhypothese) bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Annahmebereich [a; n] der Nullhypothese bei kleinstem a mit

$p(X\le a) > \alpha$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Annahmebereich bzw. sonst.

Einseitiger Signifikanztest (rechtsseitig): H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p>p_0$ (Gegenhypothese) bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Annahmebereich [0; b] der Nullhypothese bei kleinstem b mit

$p(X\le b) > 1-\alpha$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Annahmebereich bzw. sonst.

Nullhypothese H_0: p = 0.25; Gegenhypothese H_1: p ≠ 0.25; Signifikanzniveau α = 0.05 = 5%

n = 20	**B(20,0.25)**	**p = 0.25**
k =	**p(X=k) =**	**p(x≤k) =**
0	0.003171	0.003171
1	0.021141	0.024313
2	0.066948	0.09126
3	0.133896	0.225156
4	0.189685	0.414842
5	0.202331	0.617173
6	0.168609	0.785782
7	0.112406	0.898188
8	0.060887	0.959075
9	0.027061	0.986136
10	0.009922	0.996058
11	0.003007	0.999065
12	0.000752	0.999816
13	0.000154	0.99997
14	0.000026	0.999996
15	0.000003	1
16	0	1
17	0	1
18	0	1
19	0	1
20	0	1

Annahmebereich [2; 9] der Nullhypothese H_0: p = 0.25 zum Signifikanzniveau α = 0.05 = 5% bei 20-maliger Versuchswiederholung des Bernoulli-Experiments und Erwartungswert μ = 5.

Michael Buhlmann, 01.2013