Definitionen: Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt (i.e.S.) achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn

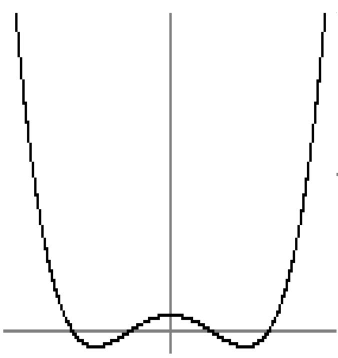
$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$

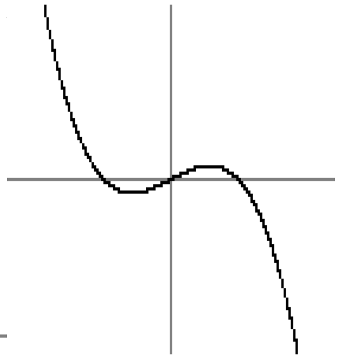
gilt. Sie heißt (i.e.S.) punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0), wenn

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$

gilt.

Achsensymmetrische, punktsymmetrische Funktion





Es gilt:

a) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von geraden Hochzahlen (0, 2, 4, …) ist achsensymmetrisch. Konstante Funktionen sind achsensymmetrisch.
b) Eine ganz rationale Funktion mit Potenzen von ungeraden Hochzahlen (1, 3, 5, …) ist punktsymmetrisch.
c) Für ganz rationale Funktionen mit Potenzen gleichzeitig von geraden und ungeraden Hochzahlen ist keine Symmetrie (i.e.S.) erkennbar.
d) Vielfache und Summen von achsensymmetrischen Funktionen sind achsensymmetrisch.
e) Vielfache und Summen von punktsymmetrischen Funktionen sind punktsymmetrisch.
f) Gemischte Summen aus achsensymmetrischen und punktsymmetrischen Funktionen sind weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

Weiter gilt für zwei Funktionen u(x) und v(x) und deren Produkt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ bzw. Quotient $f(x) = u(x)/v(x)$ der Satz:

a) u(x) achsensymmetrisch, v(x) achsensymmetrisch => f(x) achsensymmetrisch
b) u(x) punktsymmetrisch, v(x) achsensymmetrisch => f(x) punktsymmetrisch
c) u(x) achsensymmetrisch, v(x) punktsymmetrisch => f(x) punktsymmetrisch
d) u(x) punktsymmetrisch, v(x) punktsymmetrisch => f(x) achsensymmetrisch

Das durch die obigen mathematischen Gesetzmäßigkeiten formulierte Konzept der Ermittlung von Achsen- und Punktsymmetrie lässt sich damit auf Produkte von ganz rationalen Funktionen und auf gebrochen rationale Funktionen, also auf Brüche von ganz rationalen Funktionen übertragen. Bei gebrochen rationalen Funktionen ist auf die „Symmetrie" des maximalen Definitionsbereichs zu achten.

Für trigonometrische Funktionen gilt:

a) Die Sinusfunktion f(x) = sin(x) ist punktsymmetrisch.
b) Die Kosinusfunktion f(x) = cos(x) ist achsensymmetrisch.
c) Die Tangensfunktion f(x) = tan(x) ist punktsymmetrisch.

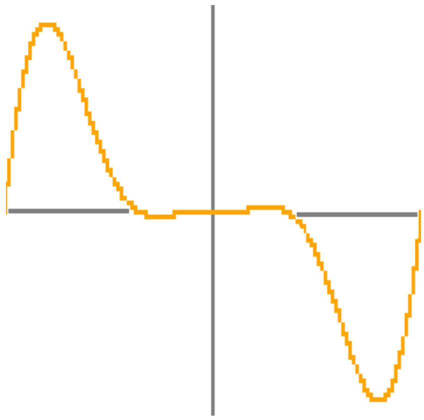
Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist selbst nicht symmetrisch, jedoch sind Exponentialfunktionen mit achsensymmetrischen Exponenten achsensymmetrisch und gewisse Summen von Exponentialfunktionen wie $f(x) = e^x + e^{-x}$ achsensymmetrisch oder wie $f(x) = e^x - e^{-x}$ punktsymmetrisch.

Symmetrieeigenschaften von Funktionen spielen auch bei Ab- und Aufleitungen eine Rolle. Es gilt:

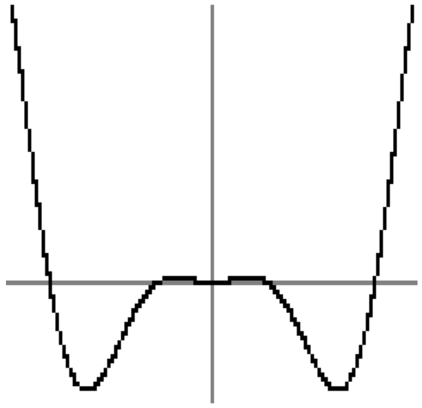
a) Die Ableitung f'(x) einer achsensymmetrischen Funktion f(x) ist punktsymmetrisch.
b) Die Ableitung f'(x) einer punktsymmetrischen Funktion f(x) ist achsensymmetrisch.
c) Für eine punktsymmetrische Funktion f(x) ist jede Stammfunktion F(x) achsensymmetrisch.
d) Für eine achsensymmetrische Funktion f(x) existiert eine punktsymmetrische Stammfunktion mit F(0) = 0.

Beispiel:

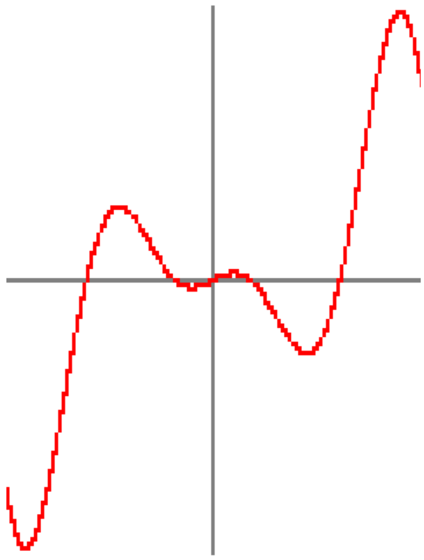
F(x) (mit F(0)=0, punktsymmetrisch):



f(x) = x^2cos(x) (achsensymmetrisch):



f'(x) (punktsymmetrisch):



f''(x) (achsensymmetrisch):