Linearkombinationen von Vektoren sind <u>Ebenen</u> E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ mit Stützvektor $\vec{b}$ und Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ sowie reellen Parametern r, s (Parameterform der Ebene), E: $\vec{n}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ mit Normalenvektor $\vec{n}$ (Normalenform der Ebene), E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit reellen a, b, c, d (Koordinatenform der Ebene).

<u>Spurpunkte</u> sind die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen. Es gibt mindestens einen, höchstens drei Spurpunkte für eine Ebene. Spurpunkte errechnen sich durch Nullsetzen von zwei der drei Komponenten x_1, x_2, x_3 der Koordinatenform der Ebene:

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Ebene**
Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ a≠0, b≠0, c≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse)
Ebene E: $bx_2 + cx_3 = d$ b≠0, c≠0	S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1-Achse
Ebene E: $ax_1 + cx_3 = d$ a≠0, c≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_2-Achse
Ebene E: $ax_1 + bx_2 = d$ a≠0, b≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_3-Achse
Ebene E: $ax_1 = d$ a≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) -> Ebene parallel zur x_2- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene
Ebene E: $bx_2 = d$ b≠0	S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene
Ebene E: $cx_3 = d$ c≠0	S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_2-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene

Spurpunkte von Ebenen

Hinsichtlich der <u>Umformung von Parameter-, Normalen- und Koordinatenform der Ebene</u> gilt:

Vorgehensweisen	
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ mit: Stützvektor $\vec{b}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$, Parametern r, s (PF)	
Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$, Stützvektor $\vec{p} = \vec{b}$ Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$ (NF)	Normalenvektor $\vec{n}$, normiert als $\vec{n}^0 = \vec{n} / \lvert\vec{n}\rvert$ Ebene: E: $\vec{n}^0(\vec{x} - \vec{p}) = 0$ (HNF)
Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$ mit: $\vec{n}\,\vec{x} = ax_1 + bx_2 + cx_3$ Punkt PεE mit: $\vec{p} = \vec{OP}$, $d = \vec{n}\,\vec{p}$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$ Ebene: E: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$ (HNF)
Lineares Gleichungssystem: $\left(\begin{matrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{matrix}\right)$ Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF)	

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$	Stützvektor $\vec{a}=\vec{OA}$, Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x}=\vec{OA}+r\,\vec{v}+s\,\vec{w}$ (PF)
Punkte $A(a_1\vert a_2\vert a_3)$, $B(b_1\vert b_2\vert b_3)$, $C(c_1\vert c_2\vert c_3)$	Stützvektor $\vec{a}=\vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v}=\vec{AB}$, $\vec{w}=\vec{AC}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x}=\vec{OA}+r\,\vec{AB}+s\,\vec{AC}$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix}\alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3=1\\ \alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3=1\\ \alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3=1\end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF, mit $O(0\vert 0\vert 0)\notin E$)
Gerade g: $\vec{x}=\vec{a}+s\,\vec{u}$ (PF) Punkt $P\notin g$	Stützvektor $\vec{a}=\vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v}=\vec{AP}$, Parameter t -> Ebene: E: $\vec{x}=\vec{a}+s\,\vec{u}+t\,\vec{v}$ (PF)
Gerade g: $\vec{x}=\vec{a}+s\,\vec{u}$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(\vec{x}-\vec{OP})=0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P (E ⊥ g)
Gerade g_1: $\vec{x}=\vec{a}_1+s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x}=\vec{a}_2+t\,\vec{u}_2$ (PF), Schnittpunkt S ($g_1 \cap g_2 = \{S\}$), Punkte $P(p_1\vert p_2\vert p_3)$, $Q(q_1\vert q_2\vert q_3)\varepsilon g_1$, $R(r_1\vert r_2\vert r_3)\varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b}=\vec{OS}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x}=\vec{b}+s\,\vec{u}_1+t\,\vec{u}_2$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix}\alpha p_1+\beta p_2+\gamma p_3=1\\ \alpha q_1+\beta q_2+\gamma q_3=1\\ \alpha r_1+\beta r_2+\gamma r_3=1\end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF, mit $O(0\vert 0\vert 0)\notin E$)
Gerade g_1: $\vec{x}=\vec{a}_1+s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x}=\vec{a}_2+t\,\vec{u}_2$ (PF), $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \cap g_2 = \{\}$, Punkte $P(p_1\vert p_2\vert p_3)$, $Q(q_1\vert q_2\vert q_3)\varepsilon g_1$, $R(r_1\vert r_2\vert r_3)\varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b}=\vec{a}_1$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}=\vec{a}_2-\vec{a}_1$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x}=\vec{b}+s\,\vec{u}+t\,\vec{v}$ Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix}\alpha p_1+\beta p_2+\gamma p_3=1\\ \alpha q_1+\beta q_2+\gamma q_3=1\\ \alpha r_1+\beta r_2+\gamma r_3=1\end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF, mit $O(0\vert 0\vert 0)\notin E$)
E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n}=(a \quad b \quad c)^T$	Ebene: F: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{OP})=0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P (F ∥ E)
E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n}=(a \quad b \quad c)^T$	F_1: $ax_1+bx_2+cx_3=d-\lvert\vec{n}\rvert D$, F_2: $ax_1+bx_2+cx_3=d+\lvert\vec{n}\rvert D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$)
Ebene: E: $\vec{x}=\vec{b}+r\,\vec{v}+s\,\vec{w}$ (PF), Gerade: g: $\vec{x}=\vec{a}+t\,\vec{u}$ (PF)	Normalenvektor $\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x}=\vec{a}+t\,\vec{u}+u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g (F ⊥ E)

Ebenenkonstruktionen

Allgemein gilt für die Lage von Ebenen zu Punkten, Geraden und (anderen) Ebenen:

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt $P(p_1\vert p_2\vert p_3)$ Ebene: E: $ax_1+bx_2+cx_3=d$ (KF)	a) Punktprobe: $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=d$ -> 1 Lösung: Pεg; keine Lösung: $P\notin g$ b) Abstand: d(P,E) = $\lvert\vec{n}\cdot\vec{OP}-d\rvert \big/ \lvert\vec{n}\rvert$ (Hessesche Normalform)

Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	**Lage, Abstand**
Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) -> unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: g || E b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): d(g,E) = d(A,E) mit Punkt Aεg, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1}\left(\left\| \vec{n} \cdot \vec{u} \right\| \Big/ \left\| \vec{n} \right\| \cdot \left\| \vec{u} \right\| \right)$

Lage Gerade – Ebene

Voraussetzung	**Lage, Abstand**
E_1: $\vec{x} = \vec{b}_1 + r\,\vec{v}_1 + s\,\vec{w}_1$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b}_2 + t\,\vec{v}_2 + u\,\vec{w}_2$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichung in Parameterform: $\vec{b}_1 + r\,\vec{v}_1 + s\,\vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t\,\vec{v}_2 + u\,\vec{w}_2$ (PF) bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten x_1, x_2, x_3 der Ebene E_1 in die Ebene E_2 (KF): bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix}$ -> unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$, unendlich viele Lösungen (mit einem Parametern):: Schnittgerade g mit $E_1 \cap E_2 = g$; keine Lösung: E_1 || E_2 b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): $d(E_1,E_2) = d(A,E_1)$ mit Punkt AεE_2 (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\| \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \right\| \Big/ \left\| \vec{n}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{n}_2 \right\| \right)$

Lage Ebene – Ebene

Hinsichtlich <u>Parallelität</u> und <u>Orthogonalität</u> von Geraden und Ebenen ergibt sich zudem:

Voraussetzung	**Lage**
Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF)	a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ -> g || E b) $\vec{u} = k\,\vec{n}$ -> g $\perp$ E

Lage Gerade – Ebene

Entsprechend gilt hinsichtlich der Parallelität und Orthogonalität von zwei Ebenen:

Voraussetzung	**Lage**
E_1: $\vec{x} = \vec{b}_1 + r\,\vec{v}_1 + s\,\vec{w}_1$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b}_2 + t\,\vec{v}_2 + u\,\vec{w}_2$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) $\vec{n}_1 = k\,\vec{n}_2$ -> E_1 || E_2 b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ -> $E_1 \perp E_2$

Lage Ebene – Ebene

Voraussetzung	**Spiegelung**
Punkt A Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (NF)	Fußpunkt FεE_S als Schnittpunkt von Hilfsgeraden h: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{n}_S$ mit Spiegelebene E_S, Bildpunkt A‘ mit $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF} = \vec{OF} + \vec{AF}$
Gerade $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$, Fußpunkte: $F_A \varepsilon E_S$ mit

Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (NF)	$\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_B \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_B \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkte A', B': $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B = \vec{OF}_B + \vec{AF}_B$, gespiegelte Gerade: g': $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{A'B'}$ (PF)
Gerade $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (NF) g || E_S	Punkt A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Fußpunkt: $F_A \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkt A' mit $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$, gespiegelte Gerade: g': $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{u}$ (PF)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (NF)	Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$, C mit $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{w}$, Fußpunkte: $F_A \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_B \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_B \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_C \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_C \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkte A', B', C': $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B = \vec{OF}_B + \vec{AF}_B$, $\vec{OC'} = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CF}_C = \vec{OF}_C + \vec{CF}_C$, gespiegelte Ebene: E': $\vec{x} = \vec{OA'} + r\,\vec{A'B'} + s\,\vec{A'C'}$ (PF)
Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (NF) E || E_S, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	Punkt A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Fußpunkt: $F_A \varepsilon E_S$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkt A' mit $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$, gespiegelte Ebene: E': $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OA'}) = 0$ (NF)

Spiegelungen an Spiegelebene

KF = Koordinatenform, NF = Normalform; PF = Parameterform