

Linearkombinationen von Vektoren sind Ebenen  $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$  mit Stützvektor  $\vec{b}$  und Richtungsvektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  sowie reellen Parametern  $r, s$  (Parameterform der Ebene),  $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$  mit Normalenvektor  $\vec{n}$  (Normalenform der Ebene),  $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  mit reellen  $a, b, c, d$  (Koordinatenform der Ebene).

Spurpunkte sind die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen. Es gibt mindestens einen, höchstens drei Spurpunkte für eine Ebene. Spurpunkte errechnen sich durch Nullsetzen von zwei der drei Komponenten  $x_1, x_2, x_3$  der Koordinatenform der Ebene:

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Ebene
Ebene $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_1$ -Achse) $S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_2$ -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der $x_3$ -Achse)
Ebene $E: bx_2 + cx_3 = d$ $b \neq 0, c \neq 0$	$S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_2$ -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der $x_3$ -Achse) -> Ebene parallel zur $x_1$ -Achse
Ebene $E: ax_1 + cx_3 = d$ $a \neq 0, c \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_1$ -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der $x_3$ -Achse) -> Ebene parallel zur $x_2$ -Achse
Ebene $E: ax_1 + bx_2 = d$ $a \neq 0, b \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_1$ -Achse) $S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_2$ -Achse) -> Ebene parallel zur $x_3$ -Achse
Ebene $E: ax_1 = d$ $a \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_1$ -Achse) -> Ebene parallel zur $x_2$ - und $x_3$ -Achse -> Ebene parallel zur $x_2$ - $x_3$ -Ebene
Ebene $E: bx_2 = d$ $b \neq 0$	$S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der $x_2$ -Achse) -> Ebene parallel zur $x_1$ - und $x_3$ -Achse -> Ebene parallel zur $x_1$ - $x_3$ -Ebene
Ebene $E: cx_3 = d$ $c \neq 0$	$S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der $x_3$ -Achse) -> Ebene parallel zur $x_1$ - und $x_2$ -Achse -> Ebene parallel zur $x_1$ - $x_2$ -Ebene

**Spurpunkte von Ebenen**

Hinsichtlich der Umformung von Parameter-, Normalen- und Koordinatenform der Ebene gilt:

Vorgehensweisen	
Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ mit: Stützvektor $\vec{b}$ , Richtungs-/Spannvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ , Parametern $r, s$ (PF)	
Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ , Stützvektor $\vec{p} = \vec{b}$ Ebene: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ (NF)	Normalenvektor $\vec{n}$ , normiert als $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{ \vec{n} }$ Ebene: $E: \vec{n}^0 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ (HNF)
Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$ mit: $\vec{n} \cdot \vec{x} = ax_1 + bx_2 + cx_3$ Punkt $P \in E$ mit: $\vec{p} = \vec{OP}$ , $d = \vec{n} \cdot \vec{p}$ Ebene: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$ Ebene: $E: \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$ (HNF)
Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{pmatrix}$ Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF)	

**Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform**

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$ , Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ , Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF)
Punkte A(a <sub>1</sub>  a <sub>2</sub>  a <sub>3</sub> ), B(b <sub>1</sub>  b <sub>2</sub>  b <sub>3</sub> ), C(c <sub>1</sub>  c <sub>2</sub>  c <sub>3</sub> )	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$ , Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}$ , $\vec{w} = \vec{AC}$ , Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\vec{AB} + s\vec{AC}$ (PF);  Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit O(0 0 0)∉E)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$ (PF) Punkt P ∉ g	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$ , Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AP}$ , Parameter t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}$ (PF)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P (E ⊥ g)
Gerade g <sub>1</sub> : $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF), Gerade g <sub>2</sub> : $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ (PF), Schnittpunkt S (g <sub>1</sub> ∩ g <sub>2</sub> = {S}), Punkte P(p <sub>1</sub>  p <sub>2</sub>  p <sub>3</sub> ), Q(q <sub>1</sub>  q <sub>2</sub>  q <sub>3</sub> ) ∈ g <sub>1</sub> , R(r <sub>1</sub>  r <sub>2</sub>  r <sub>3</sub> ) ∈ g <sub>2</sub>	Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$ , Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ , Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$ (PF);  Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit O(0 0 0)∉E)
Gerade g <sub>1</sub> : $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF), Gerade g <sub>2</sub> : $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ (PF), g <sub>1</sub> ∥ g <sub>2</sub> , g <sub>1</sub> ∩ g <sub>2</sub> = {}, Punkte P(p <sub>1</sub>  p <sub>2</sub>  p <sub>3</sub> ), Q(q <sub>1</sub>  q <sub>2</sub>  q <sub>3</sub> ) ∈ g <sub>1</sub> , R(r <sub>1</sub>  r <sub>2</sub>  r <sub>3</sub> ) ∈ g <sub>2</sub>	Stützvektor $\vec{b} = \vec{a}_1$ , Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}, \vec{v} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ , Pa- rameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{u} + t\vec{v}$  Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit O(0 0 0)∉E)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$	Ebene: F: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P (F ∥ E)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$	F <sub>1</sub> : $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \left  \frac{\vec{n}}{n} \right  D$ , F <sub>2</sub> : $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \left  \frac{\vec{n}}{n} \right  D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D (F <sub>1</sub> ∥ F <sub>2</sub> ∥ E)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF), Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)	Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ , Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u} + u\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g (F ⊥ E)

### Ebenenkonstruktionen

Allgemein gilt für die Lage von Ebenen zu Punkten, Geraden und (anderen) Ebenen:

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P(p <sub>1</sub>  p <sub>2</sub>  p <sub>3</sub> ) Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	a) Punktprobe: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = d \rightarrow 1$ Lösung: P ∈ g; keine Lösung: P ∉ g b) Abstand: $d(P, E) = \left  \frac{\vec{n} \cdot \vec{OP} - d}{ \vec{n} } \right $ (Hessesche Normalform)

### Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade: $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ( $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ ) (NF) bzw. $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ( $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$ ) (KF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten $x_1, x_2, x_3$ in die Ebene (KF, NF) $\rightarrow$ unendlich viele Lösungen: $g \subset E$ , 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$ ; keine Lösung: $g \parallel E$ b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): $d(g, E) = d(A, E)$ mit Punkt $A \in g$ , z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{ \vec{n} \cdot \vec{u} }{ \vec{n}  \cdot  \vec{u} } \right)$

**Lage Gerade – Ebene**

Voraussetzung	Lage, Abstand
$E_1: \vec{x} = \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1$ (PF) bzw. $E_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), $E_2: \vec{x} = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ (PF) bzw. $E_2: ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1, \vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichung in Parameterform: $\vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ (PF) bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten $x_1, x_2, x_3$ der Ebene $E_1$ in die Ebene $E_2$ (KF): bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix}$ - $>$ unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$ , unendlich viele Lösungen (mit einem Parametern): Schnittgerade $g$ mit $E_1 \cap E_2 = g$ ; keine Lösung: $E_1 \parallel E_2$ b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): $d(E_1, E_2) = d(A, E_1)$ mit Punkt $A \in E_2$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1} \left( \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1  \cdot  \vec{n}_2 } \right)$

**Lage Ebene – Ebene**

Hinsichtlich Parallelität und Orthogonalität von Geraden und Ebenen ergibt sich zudem:

Voraussetzung	Lage
Gerade: $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ( $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ ) (NF) bzw. $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ( $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$ ) (KF)	a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow g \parallel E$ b) $\vec{u} = k \vec{n} \rightarrow g \perp E$

**Lage Gerade – Ebene**

Entsprechend gilt hinsichtlich der Parallelität und Orthogonalität von zwei Ebenen:

Voraussetzung	Lage
$E_1: \vec{x} = \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1$ (PF) bzw. $E_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), $E_2: \vec{x} = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ (PF) bzw. $E_2: ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1, \vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) $\vec{n}_1 = k \vec{n}_2 \rightarrow E_1 \parallel E_2$ b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \rightarrow E_1 \perp E_2$

**Lage Ebene – Ebene**

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt A Spiegelebene $E_S: \vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (NF)	Fußpunkt $F \in E_S$ als Schnittpunkt von Hilfsgeraden $h: \vec{x} = \vec{OA} + t \vec{n}_S$ mit Spiegelebene $E_S$ , Bildpunkt $A'$ mit $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF} = \vec{OF} + \vec{AF}$
Gerade $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)	Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$ , B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$ , Fußpunkte: $F_A \in E_S$ mit

<p>Spiegelebene <math>E_S: \vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S</math> (NF)</p>	<p><math>\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0</math>, <math>F_B \in E_S</math> mit <math>\vec{AF}_B \cdot \vec{u}_S = 0</math>, Bildpunkte <math>A', B'</math>:  <math>\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A</math>, <math>\vec{OB}' = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B = \vec{OF}_B + \vec{AF}_B</math>,          gespiegelte Gerade: <math>g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{A'B}'</math> (PF)</p>
<p>Gerade <math>\vec{x} = a + t \vec{u}</math> (PF)          Spiegelebene <math>E_S: \vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S</math> (NF)  <math>g \parallel E_S</math></p>	<p>Punkt A mit <math>\vec{OA} = \vec{a}</math>, Fußpunkt: <math>F_A \in E_S</math> mit <math>\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0</math>, Bildpunkt  <math>A'</math> mit <math>\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A</math>,          gespiegelte Gerade: <math>g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}</math> (PF)</p>
<p>Ebene: <math>E: \vec{x} = a + r \vec{v} + s \vec{w}</math> (PF)          Spiegelebene <math>E_S: \vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S</math> (NF)</p>	<p>Punkte: A mit <math>\vec{OA} = \vec{a}</math>, B mit <math>\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}</math>, C mit <math>\vec{OC} = \vec{a} + \vec{w}</math>, Fuß-          punkte: <math>F_A \in E_S</math> mit <math>\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0</math>, <math>F_B \in E_S</math> mit <math>\vec{BF}_B \cdot \vec{u}_S = 0</math>, <math>F_C \in E_S</math>          mit <math>\vec{CF}_C \cdot \vec{u}_S = 0</math>, Bildpunkte <math>A', B', C'</math>:  <math>\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A</math>, <math>\vec{OB}' = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B = \vec{OF}_B + \vec{AF}_B</math>,  <math>\vec{OC}' = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CF}_C = \vec{OF}_C + \vec{CF}_C</math>,          gespiegelte Ebene: <math>E': \vec{x} = \vec{OA}' + r \vec{A'B}' + s \vec{A'C}'</math> (PF)</p>
<p>Ebene: <math>E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0</math> (NF) bzw.  <math>E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d</math> (KF)          Spiegelebene <math>E_S: \vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S</math> (NF)  <math>E \parallel E_S</math>, Normalenvektor <math>\vec{n} = (a \ b \ c)^T</math></p>	<p>Punkt A mit <math>\vec{OA} = \vec{a}</math>, Fußpunkt: <math>F_A \in E_S</math> mit <math>\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0</math>, Bildpunkt  <math>A'</math> mit <math>\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A</math>,          gespiegelte Ebene: <math>E': \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{OA}') = 0</math> (NF)</p>

### Spiegelungen an Spiegelebene

KF = Koordinatenform, NF = Normalform; PF = Parameterform