

Linearkombinationen von Vektoren sind Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$, $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$, $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ mit Stützvektoren \vec{a}, \dots und Richtungsvektoren \vec{u}, \dots sowie reellem Parameter t (Parameterform der Geraden).

Spurpunkte sind die Schnittpunkte einer Gerade mit den Grundebenen des Koordinatensystems. Es gibt mindestens einen, höchstens drei Spurpunkte für eine Gerade. Spurpunkte errechnen sich durch Nullsetzen von einer der drei Komponenten x_1, x_2, x_3 der Parameterform der Gerade:

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Geraden
Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$	$x_1 = 0 \rightarrow a_1 + tu_1 = 0 \rightarrow t = t_1 = -a_1/u_1 \rightarrow S_1(0 a_2+t_1u_2 a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene, falls $u_1 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_1 = 0$) $x_2 = 0 \rightarrow a_2 + tu_2 = 0 \rightarrow t = t_2 = -a_2/u_2 \rightarrow S_2(a_1+t_2u_1 0 a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene, falls $u_2 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_2 = 0$) $x_3 = 0 \rightarrow a_3 + tu_3 = 0 \rightarrow t = t_3 = -a_3/u_3 \rightarrow S_3(a_1+t_3u_1 a_2+t_3u_2 0)$ (Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene, falls $u_3 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_3 = 0$) $u_1 = 0 \rightarrow g \parallel x_2$ - x_3 -Ebene $u_2 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ - x_3 -Ebene $u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ - x_2 -Ebene $u_2 = 0, u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ -Achse $u_1 = 0, u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_2$ -Achse $u_1 = 0, u_2 = 0 \rightarrow g \parallel x_3$ -Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektor \vec{u}	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor \vec{u} , Parameter t \rightarrow Gerade: $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t \rightarrow Gerade: $g: \vec{x} = \vec{OA} + t\vec{AB} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)
Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u}_1$, Parameter t \rightarrow Gerade: $g: \vec{x} = \vec{OA} + t\vec{u} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 parallele Gerade durch den Punkt A ($g \parallel g_1$)
Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Lotfußpunkt $A_L \in g_1$ mit: $\vec{AA}_L \cdot \vec{u} = 0$, Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AA}_L$, Parameter t \rightarrow Gerade: $g: \vec{x} = \vec{OA} + t\vec{AA}_L = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF) als zu g_1 senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp g_1$)
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF) bzw. E: $n(x-b) = 0$ ($n = v \times w$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($n = (a \ b \ c)^T$) (KF) Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t \rightarrow Gerade: $g: \vec{x} = \vec{OA} + t\vec{n} = \vec{a} + t\vec{n}$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp E$)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P Gerade: $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t\vec{u} \rightarrow 1$ Lösung: $P \in g$; keine Lösung: $P \notin g$ b) Abstand: Lotfußpunktverfahren: $P_L \in g$ mit: $\vec{PP}_L \cdot \vec{u} = 0$, $d(P, g) = \left \vec{PP}_L \right $; Hilfeebenenverfahren: Hilfeebene $E_H: \vec{u}(x-p) = 0$

	<p>mit $\vec{p} = \vec{OP}$, Schnittpunkt P_L von Hilfsebene E_H und Gerade g ($E_H \cap g = \{P_L\}$) als Lotfußpunkt (Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene $\rightarrow t^*$) für errechnetes t^* mit $\vec{OP}_L = \vec{a} + t^* \vec{u}$, $d(P,g) = \left \vec{PP}_L \right$; Formel: $d(P,g) = \frac{\left \vec{u} \times (\vec{OP} - \vec{a}) \right }{\left \vec{u} \right }$</p>
--	--

Lage Punkt – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
<p>Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s \vec{u}_1$ (PF)</p> <p>Gerade $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2$ (PF)</p>	<p>a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a}_1 + s \vec{u}_1 = \vec{a}_2 + t \vec{u}_2 \rightarrow$ unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief</p> <p>b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u}_1 = k \vec{u}_2 \rightarrow$ 1 Lösung: $g_1 \parallel g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief</p> <p>c) Abstand (bei parallelen Geraden): $d(g_1, g_2) = d(A_2, g_1)$ mit Punkt $A_2 \in g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$</p> <p>d) Abstand (bei windschiefen Geraden): Lotfußpunktverfahren: $P_L \in g_1, Q_L \in g_2$ mit: $\vec{P}_L \vec{Q}_L \cdot \vec{u}_1 = 0, \vec{P}_L \vec{Q}_L \cdot \vec{u}_2 = 0, d(g_1, g_2) = \left \vec{P}_L \vec{Q}_L \right$;</p> <p>Hilfsebenenverfahren: Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, Hilfsebene $E_H: \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}_1) = 0$ (KF, NF) mit $E_H \parallel g_2, d(g_1, g_2) = d(A_2, E_H)$ mit $A_2 \in g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$ (Hessesche Normalform); Formel: $d(g_1, g_2) = \frac{\left \vec{n}(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \right }{\left \vec{n} \right }$</p> <p>e) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\left \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right }{\left \vec{u}_1 \right \cdot \left \vec{u}_2 \right } \right)$</p>

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
<p>Ebene $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw.</p> <p>$E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw.</p> <p>$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF)</p> <p>Gerade: $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)</p>	<p>a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) \rightarrow unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: $g \parallel E$</p> <p>b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): $d(g, E) = d(A, E)$ mit Punkt $A \in g$, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform)</p> <p>c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{\left \vec{n} \cdot \vec{u} \right }{\left \vec{n} \right \cdot \left \vec{u} \right } \right)$</p>

Lage Ebene – Gerade

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Punkt A</p> <p>Spiegelgerade $g_S: \vec{x} = \vec{a}_S + t \vec{u}_S$ (PF)</p>	<p>Fußpunkt $F \in k$ mit $\vec{AF} \cdot \vec{u}_S = 0$,</p> <p>Bildpunkt A' mit $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF} = \vec{OF} + \vec{AF}$</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)</p> <p>Spiegelgerade $g_S: \vec{x} = \vec{a}_S + t \vec{u}_S$ (PF)</p>	<p>Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$, Fußpunkte: $F_A \in g_S$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_B \in g_S$ mit $\vec{BF}_B \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkte A', B':</p> <p>$\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$, $\vec{OB}' = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B = \vec{OF}_B + \vec{BF}_B$,</p> <p>gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{A'B}'$ (PF)</p>

<p>Gerade $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)</p> <p>Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = \vec{a}_s + t \vec{u}_s$ (PF)</p> <p>$g \parallel g_s$, d.h.: $\vec{u} = k \vec{u}_s$</p>	<p>Punkt A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Fußpunkt: $F_A \in g_s$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_s = 0$, Bildpunkt A' mit $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$,</p> <p>gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF)</p>
<p>Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF)</p> <p>Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = \vec{a}_s + t \vec{u}_s$ (PF)</p>	<p>Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$, C mit $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{w}$, Fußpunkte: $F_A \in g_s$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_s = 0$, $F_B \in g_s$ mit $\vec{BF}_B \cdot \vec{u}_s = 0$, $F_C \in g_s$ mit $\vec{CF}_C \cdot \vec{u}_s = 0$, Bildpunkte A', B', C': $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$, $\vec{OB}' = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B = \vec{OF}_B + \vec{BF}_B$, $\vec{OC}' = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CF}_C = \vec{OF}_C + \vec{CF}_C$,</p> <p>gespiegelte Ebene: E': $\vec{x} = \vec{OA}' + r \vec{A'B}' + s \vec{A'C}'$ (PF)</p>
<p>Ebene: E: $n(x - a) = 0$ (NF) bzw.</p> <p>E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)</p> <p>Spiegelgerade $g_s: \vec{x} = \vec{a}_s + t \vec{u}_s$ (PF)</p> <p>E \parallel g_s, Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$</p>	<p>Punkt A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Fußpunkt: $F_A \in g_s$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_s = 0$, Bildpunkt A' mit $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$,</p> <p>gespiegelte Ebene: E': $n(x - \vec{OA}') = 0$ (NF)</p>

Spiegelungen an Spiegelgerade

KF = Koordinatenform, NF = Normalform; PF = Parameterform