Linearkombinationen von Vektoren sind <u>Geraden</u> g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, g$_1$: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$, g$_2$: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ mit Stützvektoren $\vec{a}$, … und Richtungsvektoren $\vec{u}$, … sowie reellem Parameter t (Parameterform der Geraden).

<u>Spurpunkte</u> sind die Schnittpunkte einer Gerade mit den Grundebenen des Koordinatensystems. Es gibt mindestens einen, höchstens drei Spurpunkte für eine Gerade. Spurpunkte errechnen sich durch Nullsetzen von einer der drei Komponenten x_1, x_2, x_3 der Parameterform der Gerade:

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Geraden**
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ mit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$	$x_1 = 0$ -> $a_1 + tu_1 = 0$ -> $t = t_1 = -a_1/u_1$ -> $S_1(0\|a_2+t_1u_2\|a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene, falls $u_1 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_1=0$) $x_2 = 0$ -> $a_2 + tu_2 = 0$ -> $t = t_2 = -a_2/u_2$ -> $S_2(a_1+t_2u_1\|0\|a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene, falls $u_2 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_2=0$) $x_3 = 0$ -> $a_3 + tu_3 = 0$ -> $t = t_3 = -a_3/u_3$ -> $S_3(a_1+t_3u_1\|a_2+t_3u_2\|0)$ (Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene, falls $u_3 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_3=0$)
	$u_1 = 0$ -> g || x_2-x_3-Ebene $u_2 = 0$ -> g || x_1-x_3-Ebene $u_3 = 0$ -> g || x_1-x_2-Ebene $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_1-Achse $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_2-Achse $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ -> g || x_3-Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	**Konstruktion**
Punkt A, Richtungsvektor $\vec{u}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)
Gerade g$_1$: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF) Punkt A$\notin$g$_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u}_1$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) als zu g$_1$ parallele Gerade durch den Punkt A (g || g$_1$)
Gerade g$_1$: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF) Punkt A$\notin$g$_1$	Lotfußpunkt A$_L$εg$_1$ mit: $\vec{AA_L} \cdot \vec{u} = 0$, Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AA_L}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AA_L} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) als zu g$_1$ senkrechte Gerade durch den Punkt A (g ⊥ g$_1$)
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF) Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{n} = \vec{a} + t\,\vec{n}$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A (g ⊥ E)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	**Lage, Abstand**
Punkt P Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ -> 1 Lösung: Pεg; keine Lösung: P$\notin$g b) Abstand: Lotfußpunktverfahren: P$_L$εg mit: $\vec{PP_L} \cdot \vec{u} = 0$, d(P,g) = $\left\| \vec{PP_L} \right\|$; Hilfsebenenverfahren: Hilfsebene E$_H$: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$

	mit $\vec{p} = \vec{OP}$, Schnittpunkt P_L von Hilfsebene E_H und Gerade g ($E_H \cap g = \{P_L\}$)als Lotfußpunkt (Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene -> t*) für errechnetes t* mit $\vec{OP_L} = \vec{a} + t^* \vec{u}$, d(P,g) = $\left\|\vec{PP_L}\right\|$; Formel: d(P,g) = $\left\|\vec{u} \times \left(\vec{OP} - \vec{a}\right)\right\| / \left\|\vec{u}\right\|$

Lage Punkt – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF) Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF)	a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1 = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ -> unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$ -> 1 Lösung: $g_1 \mid\mid g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief c) Abstand (bei parallelen Geraden): $d(g_1,g_2) = d(A_2,g_1)$ mit Punkt $A_2 \varepsilon g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$ d) Abstand (bei windschiefen Geraden): Lotfußpunktverfahren: $P_L \varepsilon g_1$, $Q_L \varepsilon g_2$ mit: $\vec{P_L Q_L} \cdot \vec{u}_1 = 0$, $\vec{P_L Q_L} \cdot \vec{u}_2 = 0$, $d(g_1,g_2) = \left\|\vec{P_L Q_L}\right\|$; Hilfsebenenverfahren: Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, Hilfsebene E_H: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}_1) = 0$ (KF, NF) mit $E_H \mid\mid g_2$, $d(g_1,g_2) = d(A_2, E_H)$ mit $A_2 \varepsilon g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$ (Hessesche Normalform); Formel: $d(g_1,g_2) = \left\|\vec{n}\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)\right\| / \left\|\vec{n}\right\|$ e) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right\| / \left\|\vec{u}_1\right\| \cdot \left\|\vec{u}_2\right\|\right)$

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF) Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) -> unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: g || E b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): d(g,E) = d(A,E) mit Punkt Aεg, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1}\left(\left\|\vec{n} \cdot \vec{u}\right\| / \left\|\vec{n}\right\| \cdot \left\|\vec{u}\right\|\right)$

Lage Ebene – Gerade

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt A Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$ (PF)	Fußpunkt Fεk mit $\vec{AF} \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkt A‘ mit $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF} = \vec{OF} + \vec{AF}$
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$ (PF)	Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$, Fußpunkte: $F_A \varepsilon g_S$ mit $\vec{AF}_A \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_B \varepsilon g_S$ mit $\vec{AF}_B \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkte A‘, B‘: $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}_A = \vec{OF}_A + \vec{AF}_A$, $\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}_B = \vec{OF}_B + \vec{AF}_B$, gespiegelte Gerade: g‘: $\vec{x} = \vec{OA'} + t\,\vec{A'B'}$ (PF)

Gerade $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$ (PF) g || g_S, d.h.: $\vec{u} = k\,\vec{u}_S$	Punkt A mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Fußpunkt: $F_A \varepsilon g_S$ mit $\overrightarrow{AF_A} \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkt A' mit $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AF_A} = \overrightarrow{OF_A} + \overrightarrow{AF_A}$, gespiegelte Gerade: g': $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + t\,\vec{u}$ (PF)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$ (PF)	Punkte: A mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, B mit $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{u}$, C mit $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{w}$, Fußpunkte: $F_A \varepsilon g_S$ mit $\overrightarrow{AF_A} \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_B \varepsilon g_S$ mit $\overrightarrow{AF_B} \cdot \vec{u}_S = 0$, $F_C \varepsilon g_S$ mit $\overrightarrow{AF_C} \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkte A', B', C': $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AF_A} = \overrightarrow{OF_A} + \overrightarrow{AF_A}$, $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BF_B} = \overrightarrow{OF_B} + \overrightarrow{AF_B}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CF_C} = \overrightarrow{OF_C} + \overrightarrow{CF_C}$, gespiegelte Ebene: E': $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + r\,\overrightarrow{A'B'} + s\,\overrightarrow{A'C'}$ (PF)
Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$ (PF) E || g_S, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	Punkt A mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Fußpunkt: $F_A \varepsilon g_S$ mit $\overrightarrow{AF_A} \cdot \vec{u}_S = 0$, Bildpunkt A' mit $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AF_A} = \overrightarrow{OF_A} + \overrightarrow{AF_A}$, gespiegelte Ebene: E': $\vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{OA'}) = 0$ (NF)

Spiegelungen an Spiegelgerade

KF = Koordinatenform, NF = Normalform; PF = Parameterform