

Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum \mathbf{R}^3 identifizieren mit Ortsvektoren:

$\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (mit: $O(0|0|0)$ als Koordinatenursprung). Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor, der Vektor

$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ Gegenvektor. Die Länge (Betrag) eines Vektors ist: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Der normierte oder

Einheitsvektor ist: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit: $|\vec{a}^0| = 1$. Differenzvektoren zwischen zwei Punkten A und B($b_1|b_2|b_3$)

errechnen sich als: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$. Gemäß den Vektorraumgesetzen der Vektoraddition und Vek-

tormultiplikation mit einem Skalar (reelle Zahl) können weiter Linearkombinationen von Vektoren gebildet

werden: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$, $r \vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$. Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ heißen linear unab-

hängig, wenn aus wenn die auf den Nullvektor $\vec{0}$ führende Linearkombination dieser Vektoren, wenn also

das lineare Gleichungssystem: $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$ (*) nur die (triviale) Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ besitzt. Gibt es darüber hinaus α_i mit $\alpha_i \neq 0$ als (Teil der unendlich vielen) Lösung(en) des linearen Gleichungssystems (*), so sind die Vektoren linear abhängig, d.h. es gibt Vektoren \vec{a}_i aus $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$, die

sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lassen, also: $\vec{a}_i = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k$ mit einigen $\beta_i \neq 0$. Das lineare Gleichungssystem (*) ist ein homogenes Gleichungssystem, d.h. es besitzt immer und mindestens eine Lösung, nämlich die, die aus lauter Nullen besteht. Sind diese Nullen die einzige Lösung des Gleichungssystems (*), so sind die Vektoren linear unabhängig, gibt es darüber hinaus mehr Lösungen, so sind die Vektoren linear abhängig. Die Mitte M zwischen zwei Punkten A und B bestimmt sich als

Linearkombination: $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1)/2 \\ (a_2 + b_2)/2 \\ (a_3 + b_3)/2 \end{pmatrix}$, $M(\frac{a_1 + b_1}{2} | \frac{a_2 + b_2}{2} | \frac{a_3 + b_3}{2})$.

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Skalarprodukt die reelle Zahl:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

mit dem Winkel α als eingeschlossenen Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} . Als (äußeres) Vektorprodukt oder

Kreuzprodukt bezeichnet man einen auf Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht stehenden Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

mit dem Winkel α als eingeschlossenen Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} .