

Im dreidimensionalen reellen Vektorraum \mathbb{R}^3 sind ebene Figuren durch Ecken (Ortsvektoren) A, B, C, ... definierte geometrische Gebilde, die in einer Ebene liegen.

Dreiecke ABC liegen in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r\vec{AB} + s\vec{AC}$ (PF). Die Differenzvektoren sind: \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{BC} , die Winkel an den Ecken A, B, C heißen α , β , γ . Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} \neq k\vec{AC}$ für jedes reelle $k \Rightarrow$ Dreieck $\vec{AB} \neq k\vec{BC}$ für jedes reelle $k \Rightarrow$ Dreieck $\vec{BC} \neq k\vec{AC}$ für jedes reelle $k \Rightarrow$ Dreieck	
$c = \vec{AB} , b = \vec{AC} , a = \vec{BC} $ (Seiten), $u = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} $ (Umfang)	
$ \vec{AB} = \vec{AC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel α) $ \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel β) $ \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel γ)	
$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AC} }, \cos \beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }, \cos \gamma = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AC} \cdot \vec{BC} }$ (Winkel)	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
$h_a = d(A, g_{BC}), h_b = d(B, g_{AC}), h_c = d(C, g_{AB})$ bzw. $h_a = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AC} }{ \vec{BC} }, h_b = \frac{ \vec{AB} \times \vec{BC} }{ \vec{AC} }, h_c = \frac{ \vec{AC} \times \vec{BC} }{ \vec{AB} }$ usw. (Höhen)	Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t\vec{PQ}$ $d(R, g) =$ Abstand Punkt R – Gerade g
$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{\vec{BC} \cdot d(A, g_{BC})}{2} = \frac{\vec{AC} \cdot d(B, g_{AC})}{2} = \frac{\vec{AB} \cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{BC} $ (Fläche)	

Dreiecke

Trapeze ABCD liegen in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r\vec{AB} + s\vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$. Die Differenzvektoren sind: \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{AD} , die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α , β , γ , δ . Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = k\vec{CD}$ für ein gewisses $k \Rightarrow$ Trapez ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$) $\vec{BC} = k\vec{AD}$ für ein gewisses $k \Rightarrow$ Trapez ($\vec{BC} \parallel \vec{AD}$)	
$a = \vec{AB} , b = \vec{BC} , c = \vec{CD} , d = \vec{AD} $ (Seiten), $u = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{AD} $ (Umfang)	
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}, \vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow$ Trapez gleichschenkelig $\vec{BC} \parallel \vec{AD}, \vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow$ Trapez gleichschenkelig	

$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \vec{AD} }, \cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \vec{BC} }, \cos\gamma = -\frac{\vec{BC} \cdot \vec{CD}}{ \vec{BC} \vec{CD} }, \cos\delta = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{CD}}{ \vec{AD} \vec{CD} }$ (Winkel)	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$
$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow h = d(C, g_{AB}) \text{ bzw. } h = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AC} }{ \vec{AB} }$ (Höhe) $\vec{BC} \parallel \vec{AD} \Rightarrow h = d(D, g_{BC}) \text{ bzw. } h = \frac{ \vec{BC} \times \vec{BD} }{ \vec{BC} }$ (Höhe)	Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{PQ}$ $d(R, g) = \text{Abstand Punkt R - Gerade g}$
$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow A = \frac{a+c}{2} h$ (Fläche) $\vec{BC} \parallel \vec{AD} \Rightarrow A = \frac{b+d}{2} h$ (Fläche)	

Trapeze

Parallelogramme ABCD liegen in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$. Die Differenzvektoren sind: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \text{Parallelogramm}$ $\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow \text{Parallelogramm}$	
$a = \vec{AB} = \vec{CD} , b = \vec{BC} = \vec{AD} $ (Seiten), $u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} $ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \vec{AD} }, \cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \vec{BC} }$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
$h_a = d(C, g_{AB}) \text{ bzw. } h_a = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AB} }, h_b = d(C, g_{AD}) \text{ bzw. } h_b = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AD} }$ (Höhen)	Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{PQ}$ $d(R, g) = \text{Abstand Punkt R - Gerade g}$
$A = ah_a = bh_b \text{ bzw. } A = \vec{AB} \cdot d(C, g_{AB}) = \vec{AD} \cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AD} $ (Fläche)	

Parallelogramme

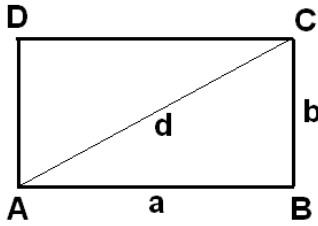
Rauten ABCD sind Parallelogramme mit gleich langen Seiten und liegen in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$. Die Differenzvektoren sind: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow \text{Raute}$ $\vec{BC} = \vec{AD}, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow \text{Raute}$	
$a = \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{AD} $ (Seiten), $u = 4 \vec{AB} $ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \vec{AD} }, \cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \vec{BC} }$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma, \beta = \delta$

$h = d(C, g_{AB}) = d(C, g_{AD})$ bzw. $h = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AB} }$ (Höhe)	Erläuterung: $g_{PQ}: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{PQ}$ $d(R, g) =$ Abstand Punkt R – Gerade g
$A = \frac{ \vec{AC} \cdot \vec{BD} }{2}$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $ (Fläche)	

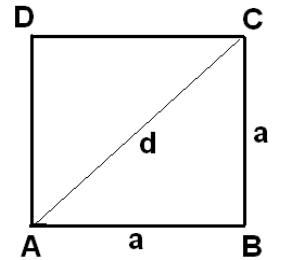
Rauten

Rechtecke ABCD sind rechtwinklige Parallelogramme und liegen in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$. Die Differenzvektoren sind: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow$ Rechteck $\vec{BC} = \vec{AD}, \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$ Rechteck	
$a = \vec{AB} = \vec{CD} , b = \vec{BC} = \vec{AD} $ (Seiten), $u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} $ (Umfang)	
$A = \vec{AB} \cdot \vec{BC} $ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $ (Fläche)	
	Winkel: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$

Rechtecke

Quadrate ABCD sind rechtwinklige Parallelogramme mit gleich langen Seiten und liegen in der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$. Die Differenzvektoren sind: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Es gilt:

Formeln	
$\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Quadrat $\vec{BC} = \vec{AD}, \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Quadrat	
$a = \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{AD} $ (Seiten), $u = 4 \vec{AB} $ (Umfang)	
$A = \vec{AB} ^2$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $ (Fläche)	
	Winkel: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$

Quadrate