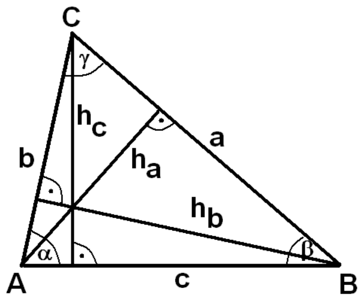
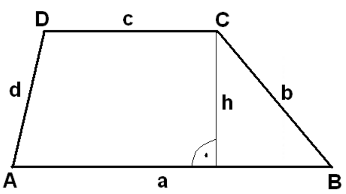
Im dreidimensionalen reellen Vektorraum **R**^{3} sind ebene Figuren durch Ecken (Ortsvektoren) A, B, C, … definierte geometrische Gebilde, die in einer Ebene liegen.

<u>Dreiecke</u> ABC liegen in der Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF). Die Differenzvektoren sind: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, die Winkel an den Ecken A, B, C heißen α, β, γ. Es gilt:

Formeln	
$\overrightarrow{AB} \neq k\,\overrightarrow{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\overrightarrow{AB} \neq k\,\overrightarrow{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\overrightarrow{BC} \neq k\,\overrightarrow{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
$c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$, $a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ (Seiten), $u = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ (Umfang)	
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$, $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
$h_a = d(A, g_{BC})$, $h_b = d(B, g_{AC})$, $h_c = d(C, g_{AC})$ bzw. $h_a = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$, $h_b = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\cdot\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$, $h_c = \frac{\left\|\overrightarrow{AC}\cdot\times\overrightarrow{BC}\cdot\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ usw. (Höhen)	Erläuterung: g_{PQ}: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot d(A, g_{BC})}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot d(B, g_{AC})}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot d(C, g_{AB})}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\cdot\times\overrightarrow{AC}\cdot\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\cdot\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\cdot\times\overrightarrow{BC}\cdot\right\|$ (Fläche)	

Dreiecke

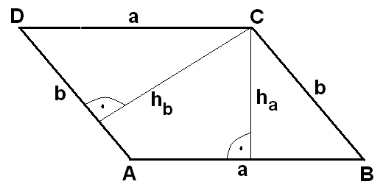
<u>Trapeze</u> ABCD liegen in der Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE. Die Differenzvektoren sind: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$) $\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{AD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$)	
$a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$, $d = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ (Seiten), $u = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\| + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ (Umfang)	
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ => Trapez gleichschenklig $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ => Trapez gleichschenklig	

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$, $\cos\gamma = -\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}}{\lvert\overrightarrow{BC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CD}\rvert}$, $\cos\delta = \frac{\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{CD}}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CD}\rvert}$ (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360°
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ => h = d(C, g_{AB}) bzw. $h = \frac{\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$ (Höhe) $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ => h = d(D, g_{BC}) bzw. $h = \frac{\lvert\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$ (Höhe)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ => $A = \frac{a+c}{2}h$ (Fläche) $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ => $A = \frac{b+d}{2}h$ (Fläche)	

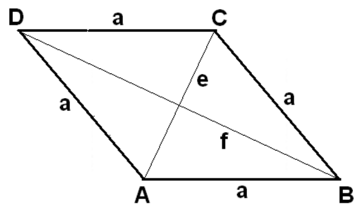
Trapeze

<u>Parallelogramme</u> ABCD liegen in der Ebene: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE. Die Differenzvektoren sind: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ => Parallelogramm $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ => Parallelogramm	
$a = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert$, $b = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$ (Seiten), $u = 2\lvert\overrightarrow{AB}\rvert + 2\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
h_a = d(C, g_{AB}) bzw. $h_a = \frac{\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$, h_b = d(C, g_{AD}) bzw. $h_b = \frac{\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}$ (Höhen)	Erläuterung: g_{PQ}: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \overrightarrow{AB}\cdot d(C, g_{AB}) = \overrightarrow{AD}\cdot d(C, g_{AD})$ bzw. $A = \lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert$ (Fläche)	

Parallelogramme

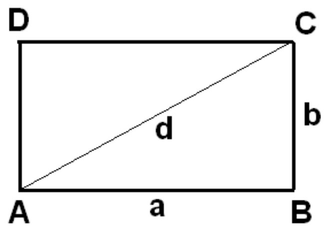
<u>Rauten</u> ABCD sind Parallelogramme mit gleich langen Seiten und liegen in der Ebene: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE. Die Differenzvektoren sind: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ => Raute $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ => Raute	
$a = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$ (Seiten), $u = 4\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ (Umfang)	
$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$ usw. (Winkel)	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ

h = d(C, g_{AB}) = d(C, g_{AD}) bzw. $h = \frac{\lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \rvert}{\lvert \overrightarrow{AB} \rvert}$ (Höhe)	Erläuterung: g_{PQ}: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ d(R,g) = Abstand Punkt R – Gerade g
$A = \frac{\lvert \overrightarrow{AC} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{BD} \rvert}{2}$ bzw. $A = \lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \rvert$ (Fläche)	

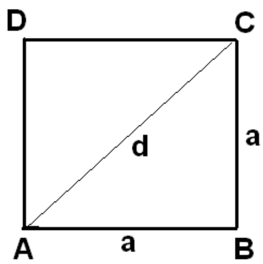
Rauten

<u>Rechtecke</u> ABCD sind rechtwinklige Parallelogramme und liegen in der Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE. Die Differenzvektoren sind: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ => Rechteck $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ => Rechteck	
$a = \lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert \overrightarrow{CD} \rvert$, $b = \lvert \overrightarrow{BC} \rvert = \lvert \overrightarrow{AD} \rvert$ (Seiten), $u = 2\lvert \overrightarrow{AB} \rvert + 2\lvert \overrightarrow{BC} \rvert$ (Umfang)	
$A = \lvert \overrightarrow{AB} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{BC} \rvert$ bzw. $A = \lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \rvert$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

Rechtecke

<u>Quadrate</u> ABCD sind rechtwinklige Parallelogramme mit gleich langen Seiten und liegen in der Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE. Die Differenzvektoren sind: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, die Winkel an den Ecken A, B, C, D heißen α, β, γ, δ. Es gilt:

Formeln	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert \overrightarrow{BC} \rvert$ => Quadrat $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert \overrightarrow{BC} \rvert$ => Quadrat	
$a = \lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert \overrightarrow{BC} \rvert = \lvert \overrightarrow{CD} \rvert = \lvert \overrightarrow{AD} \rvert$ (Seiten), $u = 4\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$ (Umfang)	
$A = \lvert \overrightarrow{AB} \rvert^2$ bzw. $A = \lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \rvert$ (Fläche)	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

Quadrate
