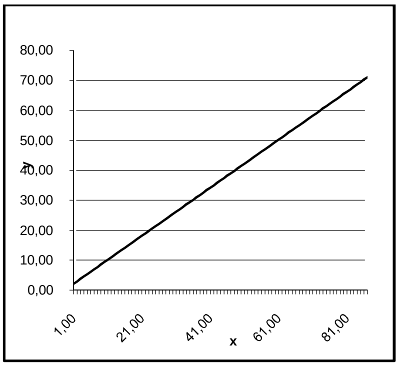
Die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$y' + ay = b$$

(für reelle Zahlen a, b) führt (bei a=0) auf das lineare Wachstum y = mt + c, (bei a≠0, b=0) auf das exponentielle Wachstum y = ce^{kt}, (bei a≠0, b≠0) auf das beschränkte Wachstum y = S – ce^{-kt} (Zeit: tε**R**, t≥0).



<u>Lineares Wachstum</u> (Zunahme: m>0; Abnahme: m<0) wird dargestellt durch eine lineare Funktion (Gerade) vom Typ

$$\boxed{f(t) = mt + c}$$

mit Anfangsbedingung f(0) = c und Steigung (Änderungsrate) mε**R** vermöge der Differenzialgleichung:

$$f'(t) = m$$

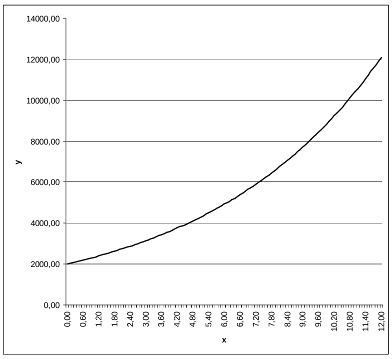
Die Bestimmung der Funktion $f(t) = mt + c$ erfolgt nach der:

a) Punktsteigungsform: $\dfrac{f(t) - y_1}{t - t_1} = m$ mit Geradenpunkt P(t_1|y_1)

-> $f(t) = m(t - t_1) + y_1 = mt - mt_1 + y_1$

b) Zweipunkteform: $\dfrac{f(t) - y_1}{t - t_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$ mit Geradenpunkten P(t_1|y_1), Q(t_2|y_2)

-> $f(t) = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}t - \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}t_1 + y_1$



<u>Exponentielles Wachstum</u> (Wachstum: k>0; Zerfall: k<0) genügt einer Exponentialfunktion vom Typ

$$\boxed{f(t) = c \cdot e^{kt}}$$

mit Anfangsbedingung f(0) = c > 0 und Wachstumsfaktor (Proportionalitätsfaktor) kε**R** vermöge der Differenzialgleichung:

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

die die Änderung des Wachstums als proportional zum Bestand beschreibt (Bestand: f(t), Änderungsrate: f'(t)). Es gilt:

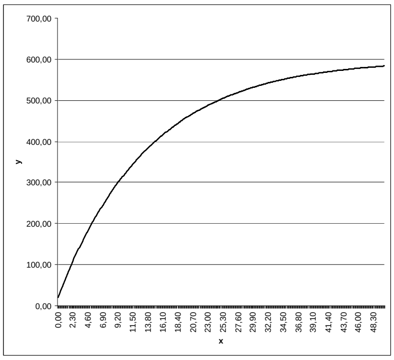
f(0) = c, $f'(t) = kc \cdot e^{kt}$, f'(0) = kc

Für k>0 ergibt sich als Verdopplungszeit T_V: $T_V = \dfrac{\ln 2}{k}$, für k<0 als Halbwertszeit T_H: $T_H = \dfrac{-\ln 2}{k}$.

Hinsichtlich der Bestimmung der Funktion $f(t) = c \cdot e^{kt}$ gilt:

Mit Anfangsbedingung	**Ohne Anfangsbedingung**
Ansatz: $f(t) = c \cdot e^{kt}$	Ansatz: $f(t) = c \cdot e^{kt}$
Anfangswert f(0) -> c = f(0) Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $k = \ln\left(\dfrac{y_2}{c}\right) \Big/ t_2$ (Umstellen nach k)	Punkt P(t_1|y_1) der Funktion: $f(t_1) = c \cdot e^{kt_1} = y_1$ Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $\dfrac{c \cdot e^{kt_1}}{c \cdot e^{kt_2}} = \dfrac{y_1}{y_2}$ (Division der Gleichungen) -> $k = \ln\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) \Big/ (t_1 - t_2)$ (Umstellen nach k) -> $c = y_1 \cdot e^{-kt_1}$ (Umstellen nach c)
Ergebnis: $f(t) = c \cdot e^{kt}$	Ergebnis: $f(t) = c \cdot e^{kt}$

Bestimmung der exponentiellen Wachstumsfunktion



<u>Beschränktes Wachstum</u> (Wachstum: c>0; Zerfall: c<0) liegt vor, wenn der Wachstumsprozess der Differenzialgleichung

$$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$$

genügt, also bei k>0 die Veränderung des Wachstums proportional zum Rest (Manko) bis zu einer (oberen oder unteren) Grenze Sε**R** ist. Die Lösung der Differenzialgleichung ist dann:

$$\boxed{f(t) = S - c \cdot e^{-kt}}$$

mit S als Schranke (t->∞: f(t) -> S), f(0) = S – c als Anfangswert (f(0) < S: Wachstum; f(0) > S. Zerfall), c = S – f(0), k als Proportionalitätsfaktor.

Zur Bestandsfunktion ergibt sich als Änderungsrate:

$$f'(t) = kc \cdot e^{-kt}\text{, f‘(0) = kc}$$

Mit f(0) = 0 als Anfangsbestand gilt: c = S und: $f(t) = S(1 - e^{-kt})$ als spezielle Funktion des beschränkten Wachstums. Änderungsrate ist hier: $f'(t) = kS \cdot e^{-kt}$.

Hinsichtlich der Bestimmung der Funktion $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ gilt:

Mit Anfangsbedingung	**Ohne Anfangsbedingung**
Ansatz: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ mit vorgegebenem S	Ansatz: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ mit vorgegebenem S
Anfangswert f(0) -> c = S – f(0) Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = S - c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $c \cdot e^{kt_2} = S - y_2$ -> $k = \ln\left(\frac{S - y_2}{c}\right) \Big/ t_2$ (Umstellen nach k)	Punkt P(t_1|y_1) der Funktion: $f(t_1) = S - c \cdot e^{kt_1} = y_1$ Punkt Q(t_2|y_2) der Funktion: $f(t_2) = S - c \cdot e^{kt_2} = y_2$ -> $c \cdot e^{kt_1} = S - y_1$, $c \cdot e^{kt_2} = S - y_2$ -> $\frac{c \cdot e^{kt_1}}{c \cdot e^{kt_2}} = \frac{S - y_1}{S - y_2}$ (Division der Gleichungen) -> $k = \ln\left(\frac{S - y_1}{S - y_2}\right) \Big/ (t_1 - t_2)$ (Umstellen nach k) -> $c = (S - y_1) \cdot e^{-kt_1}$ (Umstellen nach c)
Ergebnis: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$	Ergebnis: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$

Bestimmung der beschränkten Wachstumsfunktion

Auf Dauer stellt sich bei der Bestandsfunktion $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ der Wert S ein (t -> ∞: f(t) -> S als waagerechte Asymptote).

Beim Aufstellen und <u>Umformen zur Differenzialgleichung</u> $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$ ist zu beachten:

Absolute Zunahme a, prozentuale Abnahme des Bestands k (pro Zeiteinheit)

-> $f'(t) = a - kf(t))$

-> $f'(t) = k\left(\frac{a}{k} - f(t)\right)$ (Ausklammern des Proportionalitätsfaktors k)

-> $f'(t) = k(S - f(t))$ (mit $S = \frac{a}{k}$)