

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x)$ auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0 :

$$f(x) = (x-1)^2 - 2x, x_0 = 1.$$

1. Lösung (mit der h-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für x einmal $x_0 = 1$, zum anderen $x_0 + h = 1 + h$ einsetzen, schließlich h im Differenzialquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h-1)^2 - 2(1+h)] - [(1-1)^2 - 2 \cdot 1]}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[h^2 - 2 - 2h] - [0^2 - 2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2 - 2h + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h - 2) = 0 - 2 = -2$$

Wir erhalten damit: $f'(1) = -2$.

2. Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für x $x_0 = 1$, schließlich $x - x_0$ im Differenzialquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für x $x_0 = 1$, schließlich $x - x_0$ im Differenzialquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x-1)^2 - 2x] - [(1-1)^2 - 2 \cdot 1]}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x^2 - 2x + 1 - 2x] - [0^2 - 2]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = (*)$$

Nun gilt z.B. mit Polynomdivision: $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = (x^2 - 4x + 3) : (x - 1) = x - 3$; wir rechnen weiter:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = 1 - 3 = -2$$

Wir erhalten damit: $f'(1) = -2$.