Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung/Differenzierbarkeit

Aufgabe: Untersuche die Funktion f(x) auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0:

$$f(x) = \frac{5}{x^3} + 4, \; x_0 = 2.$$

1. Lösung (mit der h-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim\limits_{h->0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in f(x) für x einmal $x_0 = 2$, zum anderen $x_0+h = 2+h$ einsetzen, den Zähler als einen Bruch schreiben (Hauptnenner bilden!), den binomischen Lehrsatz anwenden (für $(2+h)^3$)schließlich h im Differenzenquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\lim_{h->0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h->0} \frac{\left[\frac{5}{(2+h)^3}+4\right]-\left[\frac{5}{2^3}+4\right]}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{\left[\frac{5}{(2+h)^3}+4\right]-\left[\frac{5}{8}+4\right]}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{5}{(2+h)^3}+4-\frac{5}{8}-4}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{\frac{5}{(2+h)^3}-\frac{5}{8}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{40}{8(2+h)^3}-\frac{5(2+h)^3}{8(2+h)^3}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\frac{40-5(2+h)^3}{8(2+h)^3}}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{40-5(2+h)^3}{8(2+h)^3 h} = \lim_{h->0} \frac{40-5(2^3+3\cdot 2^2 h+3\cdot 2h^2+h^3)}{8(2+h)^3 h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{40-40-60h-30h^2-5h^3}{8(2+h)^3 h} = \lim_{h->0} \frac{-60h-30h^2-5h^3}{8(2+h)^3 h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{-60-30h-5h^2}{8(2+h)^3} = \frac{-60-0-0}{8(2+0)^3} = \frac{-60}{64} = -\frac{15}{16}$$

Die Ableitung bestimmt sich damit als: f'(2) = $-\frac{15}{16}$.

2. Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim\limits_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in f(x) für x x_0 = 2 einsetzen, den Zähler als einen Bruch schreiben (Hauptnenner bilden!), den binomischen Lehrsatz anwenden, schließlich h im Differenzenquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x->2} \frac{\left[\frac{5}{x^3} + 4\right] - \left[\frac{5}{2^3} + 4\right]}{x - 2} =$$

$$\lim_{x->2} \frac{\frac{5}{x^3} + 4 - \frac{5}{8} - 4}{x - 2} = \lim_{x->2} \frac{\frac{5}{x^3} - \frac{5}{8}}{x - 2} = \lim_{x->2} \frac{\frac{40}{8x^3} - \frac{5x^3}{8x^3}}{x - 2} =$$

$$\lim_{x->2} \frac{\frac{40 - 5x^3}{8x^3}}{x - 2} = \lim_{x->2} \frac{40 - 5x^3}{8x^3(x - 2)} = (*)$$

Die Polynomdivision nur mit dem Faktor (x–2) im Nenner ergibt:

$$(-5x^3 + 40) : (x - 2) = -5x^2 - 10x - 20,$$

so dass durch Einsetzen von x = 2 folgt:

$$(*) = \lim_{x->2} \frac{-5x^2 - 10x - 20}{8x^3} = \frac{-5 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 20}{8 \cdot 8} = -\frac{60}{64} = -\frac{15}{16}$$

Die Ableitung bestimmt sich damit als: f'(2) = $-\frac{15}{16}$.

www.michael-buhlmann.de / 07.2014 / Aufgabe 7