

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x)$ auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0 :

$$f(x) = \frac{5}{x^3} + 4, \quad x_0 = 2.$$

1. Lösung (mit der h-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für x einmal $x_0 = 2$, zum anderen $x_0 + h = 2 + h$ einsetzen, den Zähler als einen Bruch schreiben (Hauptnenner bilden!), den binomischen Lehrsatz anwenden (für $(2+h)^3$) schließlich h im Differenzialquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{5}{(2+h)^3} + 4 \right] - \left[\frac{5}{2^3} + 4 \right]}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{5}{(2+h)^3} + 4 \right] - \left[\frac{5}{8} + 4 \right]}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{(2+h)^3} + 4 - \frac{5}{8} - 4}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{(2+h)^3} - \frac{5}{8}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{40}{8(2+h)^3} - \frac{5(2+h)^3}{8(2+h)^3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{40 - 5(2+h)^3}{8(2+h)^3 h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{40 - 5(2+h)^3}{8(2+h)^3 h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{40 - 5(2^3 + 3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2 h^2 + h^3)}{8(2+h)^3 h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{40 - 40 - 60h - 30h^2 - 5h^3}{8(2+h)^3 h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-60h - 30h^2 - 5h^3}{8(2+h)^3 h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-60 - 30h - 5h^2}{8(2+h)^3} &= \frac{-60 - 0 - 0}{8(2+0)^3} = \frac{-60}{64} = -\frac{15}{16} \end{aligned}$$

Die Ableitung bestimmt sich damit als: $f'(2) = -\frac{15}{16}$.

2. Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für $x_0 = 2$ einsetzen, den Zähler als einen Bruch schreiben (Hauptnenner bilden!), den binomischen Lehrsatz anwenden, schließlich h im Differenzialquotienten wegekürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left[\frac{5}{x^3} + 4 \right] - \left[\frac{5}{2^3} + 4 \right]}{x - 2} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{5}{x^3} + 4 - \frac{5}{8} - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{5}{x^3} - \frac{5}{8}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{40}{8x^3} - \frac{5x^3}{8x^3}}{x - 2} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{40 - 5x^3}{8x^3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{40 - 5x^3}{8x^3(x - 2)} = (*) \end{aligned}$$

Die Polynomdivision nur mit dem Faktor $(x-2)$ im Nenner ergibt:

$$(-5x^3 + 40) : (x - 2) = -5x^2 - 10x - 20,$$

so dass durch Einsetzen von $x = 2$ folgt:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 - 10x - 20}{8x^3} = \frac{-5 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 20}{8 \cdot 8} = -\frac{60}{64} = -\frac{15}{16}$$

Die Ableitung bestimmt sich damit als: $f'(2) = -\frac{15}{16}$.

07.2014 / Aufgabe 7