Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Untersuche die Funktion f(x) auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}\text{ , } x_0 = 2.$$

1. Lösung (mit der h-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt f'(x_0) im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung f'(x_0) ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung f'(x_0) zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{h->0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.
II. Es gilt mit x_0 = 2 und x_0+h = 2+h und auf Grund der dritten binomischen Formel (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 beim Erweitern des Differenzialquotienten:

$$\lim_{h->0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h->0} \frac{\sqrt{(2+h)^2 + 5} - \sqrt{2^2 + 5}}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{\sqrt{4 + 4h + h^2 + 5} - \sqrt{9}}{h} = \lim_{h->0} \frac{\sqrt{9 + 4h + h^2} - 3}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{(\sqrt{9 + 4h + h^2} - 3)(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)}{h(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)} = \lim_{h->0} \frac{9 + 4h + h^2 - 9}{h(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{4h + h^2}{h(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)} = \lim_{h->0} \frac{4 + h}{\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3} = \frac{4 + 0}{\sqrt{9 + 0 + 0} + 3} =$$

$$\frac{4}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wir haben damit als Ableitung: f'(2) = $\frac{2}{3}$.

2. Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt f'(x_0) im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung f'(x_0) ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung f'(x_0) zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.
II. Es gilt mit x_0 = 2 und auf Grund der dritten binomischen Formel (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 beim Erweitern des Differenzialquotienten:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x->2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{2^2+5}}{x-2} = \lim_{x->2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} =$$

$$\lim_{x->2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)(x-2)} = \lim_{x->2} \frac{(x^2+5)-9}{(\sqrt{x^2+5}+3)(x-2)} =$$

$$\lim_{x->2} \frac{x^2-4}{(\sqrt{x^2+5}+3)(x-2)} = \lim_{x->2} \frac{(x+2)(x-2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)(x-2)} =$$

$$\lim_{x->3} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3} = \frac{4}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wir haben damit als Ableitung: f'(2) = $\frac{2}{3}$.

07.2014 / Aufgabe 8