Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Untersuche die Funktion f(x) auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0:

$f(x) = x^3$, x_0 beliebig, aber fest.

1. Lösung (mit der h-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{h->0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.
II. Wir führen für ein beliebiges, aber fest vorgegebenes reelles x_0 den Grenzprozess für den Differenzialquotienten wie folgt durch:

$$\lim_{h->0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h->0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h->0} \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \left(3x_0^2 + 3x_0 h + h^2\right) = 3x_0^2 + 0 + 0 = 3x_0^2$$

Allgemein gilt somit: Die Ableitung von $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$.

2. Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzialquotienten $f'(x_0) = \lim_{x->x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes.
II. Wir führen für ein beliebiges, aber fest vorgegebenes reelles x_0 den Grenzprozess für den Differenzialquotienten wie folgt durch:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x->x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x-x_0} = (*)$$

Polynomdivision ergibt:

$$(x^3 - x_0^3) : (x - x_0) = x^2 + xx_0 + x_0^2,$$

so dass folgt:

$$(*) = \lim_{x->x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = x_0^2 + x_0 x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

Allgemein gilt somit: Die Ableitung von $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$.

07.2014 / Aufgabe 9