Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Beweise mit Hilfe einer geeigneten Ableitung die Identität:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \; x \varepsilon \mathbf{R}.$$

Lösung: I. Es gelten die Ableitungsregeln:

(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) (Summenregel)
(x^n)' = nx^{n-1} (Potenzregel für natürliche/reelle n)
[f(g(x))]' = f'(g(x))·g'(x) (Kettenregel)
(sin(x))' = cos(x) (Ableitung der Sinusfunktion)
(cos(x))' = -sin(x) (Ableitung der Kosinusfunktion)

II. Wir definieren die Funktion f(x):

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

und leiten f(x) wie folgt ab:

$$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) = 2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0$$

Eine Funktion f(x), deren Ableitung 0 ist, ist eine konstante Funktion, d.h. es gilt:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = C$$

mit gewissem reellem C. Um C zu bestimmen, bilden wir:

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 0 + 1 = 1 = C$$

und haben damit die gesuchte Identität:

$$[f(x) =] \;\; \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

07.2014 / Aufgabe 32