

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung

Aufgabe: Gegeben ist die Kurve:

$$(2x^2 - 3xy)^2 = 81.$$

- a) Bestimme durch implizites Ableiten y' (in Abhängigkeit von x und y).
- b) Berechne den Wert der Ableitung(en) an der Stelle $x = 3$.

1. Lösung: a) I. Es gelten die Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' &= f'(x) + g'(x) \text{ (Summenregel)} \\ (f(x)\cdot g(x))' &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \text{ (Produktregel)} \\ (x^n)' &= nx^{n-1} \text{ (Potenzregel für natürliche/reelle } n) \\ [f(g(x))]' &= f'(g(x))\cdot g'(x) \text{ (Kettenregel)}.\end{aligned}$$

Beim impliziten Ableiten wird in der Gleichung $\varphi(x,y) = 0$ einer Kurve (als implizit darstellbarer „Funktion“) die Variable $y = y(x)$ in Abhängigkeit von der Variable x aufgefasst und die Gleichung gliedweise nach x unter Beachtung der Ableitungsregeln bzw. nach y unter Beachtung von Kettenregel und innerer Ableitung y' differenziert. Die entstehende Gleichung der Ableitung wird nach y' umgestellt.

II. Unter Benutzung obiger Ableitungsregeln, insbesondere der Ketten- und Produktregel leiten wir implizit wie folgt ab und vereinfachen:

$$(2x^2 - 3xy)^2 = 81 \Rightarrow$$

$$2(2x^2 - 3xy)' \cdot (2 \cdot 2x - (3 \cdot 1y + 3 \cdot xy')) = 0 \quad | :2$$

$$(2x^2 - 3xy) \cdot (4x - 3y - 3xy') = 0 \quad | : (2x^2 - 3xy)$$

$$4x - 3y - 3xy' = 0$$

Umstellen nach y' ergibt die implizite Ableitung:

$$4x - 3y - 3xy' = 0 \quad | +3xy'$$

$$4x - 3y = 3xy' \quad | :3x$$

$$\frac{4x - 3y}{3x} = y'$$

$$y' = \frac{4}{3} - \frac{y}{x}.$$

b) Für die Stelle $x = 3$ bestimmen wir die zugehörigen Punkte der Kurve durch Einsetzen des x -Wertes in die Kurvengleichung $(2x^2 - 3xy)^2 = 81$ und Auflösen nach y :

$$(2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3y)^2 = 81$$

$$(18 - 9y)^2 = 81 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$18 - 9y = \pm 9 \quad | -18$$

$$-9y = -18 \pm 9 \quad | :(-9)$$

$$y = 2 \pm 1$$

$$y = 1, y = 3$$

Die zwei Punkte, an denen die Ableitung zu bilden ist, sind also: P(3|1), Q(3|3). Für die Ableitun-

gen gilt dann durch Einsetzen der entsprechenden x- und y-Werte in die implizite Ableitung aus Aufgabenteil a):

$$P(3|1): y' = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$Q(3|3): y' = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Lösung: a) I. Es gelten die Ableitungsregeln:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) \text{ (Summenregel)}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ (Potenzregel für natürliche/reelle n).}$$

II. Wir verzichten auf das implizite Differenzieren und stellen – was hier möglich ist – die Kurvengleichung $(2x^2 - 3xy)^2 = 81$ nach y um:

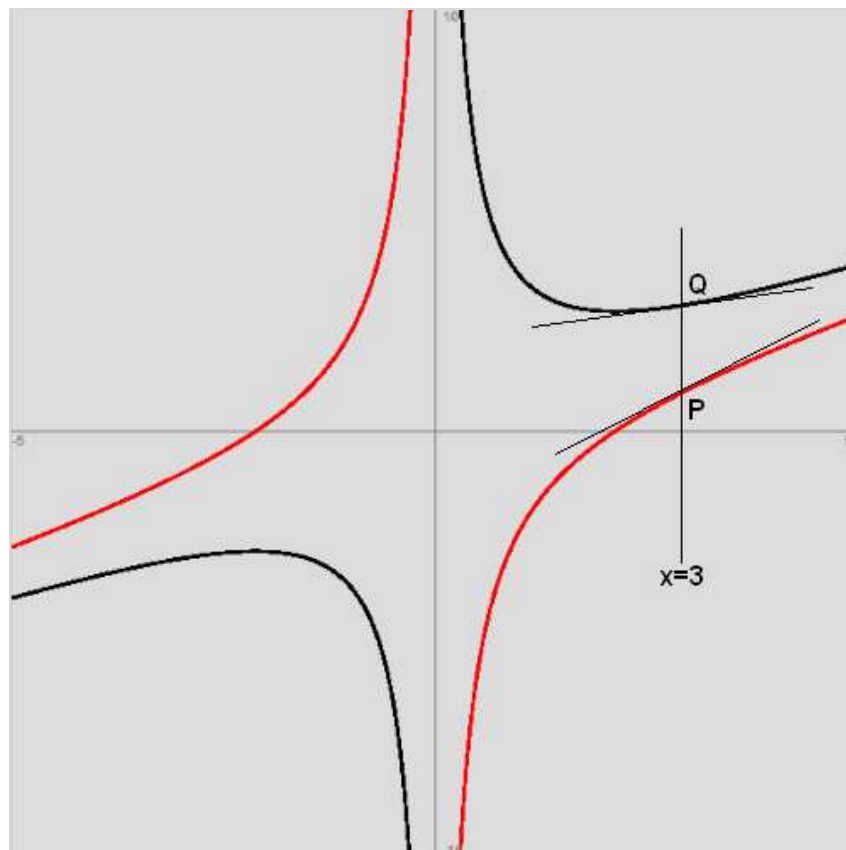
$$(2x^2 - 3xy)^2 = 81 \quad | \sqrt{}$$

$$2x^2 - 3xy = \pm 9 \quad | -2x^2$$

$$-3xy = -2x^2 \pm 9 \quad | :(-3x)$$

$$y = \frac{-2x^2 \pm 9}{-3x}$$

$$y = \frac{2x^2}{3x} \pm \frac{9}{3x} = \frac{2}{3}x \pm \frac{3}{x}$$



$$y = 2x/3 \pm 3/x$$

Die „Funktion“ $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{3}{x} = \frac{2}{3}x \pm 3x^{-1}$ besteht also aus zwei Kurventeilen. Explizites Ableiten ergibt dann nach der Potenzregel:

$$y' = \frac{2}{3} \mp 3x^{-2} = \frac{2}{3} \mp \frac{3}{x^2}.$$

b) Wir betrachten Funktion $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{3}{x}$ und Ableitung $y' = \frac{2}{3} \mp \frac{3}{x^2}$ an der Stelle $x = 3$ und erhalten durch Einsetzen von x in Funktion und Ableitung die Kurvenpunkte P(3|1) bzw. Q(3|3) mit den Ableitungen $y' = 1$ bzw. $y' = 1/3$ vermöge:

$$P(3|1): x = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{3}{3} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y' = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$Q(3|3): x = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{3}{3} = 2 + 1 = 3 \Rightarrow y' = \frac{2}{3} - \frac{3}{3^2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 255