Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Gegeben ist die Kurve:

$$(2x^2 - 3xy)^2 = 81.$$

a) Bestimme durch implizites Ableiten y‘ (in Abhängigkeit von x und y).
b) Berechne den Wert der Ableitung(en) an der Stelle x = 3.

1. Lösung: a) I. Es gelten die Ableitungsregeln:

$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (Summenregel)
$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (Produktregel)
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/reelle n)
$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (Kettenregel).

Beim impliziten Ableiten wird in der Gleichung φ(x,y) = 0 einer Kurve (als implizit darstellbarer „Funktion“) die Variable y = y(x) in Abhängigkeit von der Variable x aufgefasst und die Gleichung gliedweise nach x unter Beachtung der Ableitungsregeln bzw. nach y unter Beachtung von Kettenregel und innerer Ableitung y‘ differenziert. Die entstehende Gleichung der Ableitung wird nach y‘ umgestellt.

II. Unter Benutzung obiger Ableitungsregeln, insbesondere der Ketten- und Produktregel leiten wir implizit wie folgt ab und vereinfachen:

$(2x^2 - 3xy)^2 = 81$ =>

$2(2x^2 - 3xy)^1 \cdot (2\cdot 2x - (3\cdot 1y + 3\cdot xy')) = 0$ | :2

$(2x^2 - 3xy)\cdot(4x - 3y - 3xy') = 0$ | :($2x^2$–3xy)

$4x - 3y - 3xy' = 0$

Umstellen nach y‘ ergibt die implizite Ableitung:

$4x - 3y - 3xy' = 0$ | +3xy‘

$4x - 3y = 3xy'$ | :3x

$\frac{4x-3y}{3x} = y'$

$y' = \frac{4}{3} - \frac{y}{x}.$

b) Für die Stelle x = 3 bestimmen wir die zugehörigen Punkte der Kurve durch Einsetzen des x-Wertes in die Kurvengleichung $(2x^2 - 3xy)^2 = 81$ und Auflösen nach y:

$(2\cdot 3^2 - 3\cdot 3y)^2 = 81$

$(18 - 9y)^2 = 81$ | √

$18 - 9y = \pm 9$ | -18

$-9y = -18 \pm 9$ | :(-9)

$y = 2 \pm 1$

y = 1, y = 3

Die zwei Punkte, an denen die Ableitung zu bilden ist, sind also: P(3|1), Q(3|3). Für die Ableitungen gilt dann durch Einsetzen der entsprechenden x- und y-Werte in die implizite Ableitung aus Aufgabenteil a):

P(3|1): $y'=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$.

Q(3|3): $y'=\frac{4}{3}-\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$.

2. Lösung: a) I. Es gelten die Ableitungsregeln:

(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) (Summenregel)
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/reelle n).

II. Wir verzichten auf das implizite Differenzieren und stellen – was hier möglich ist – die Kurvengleichung $(2x^2-3xy)^2=81$ nach y um:

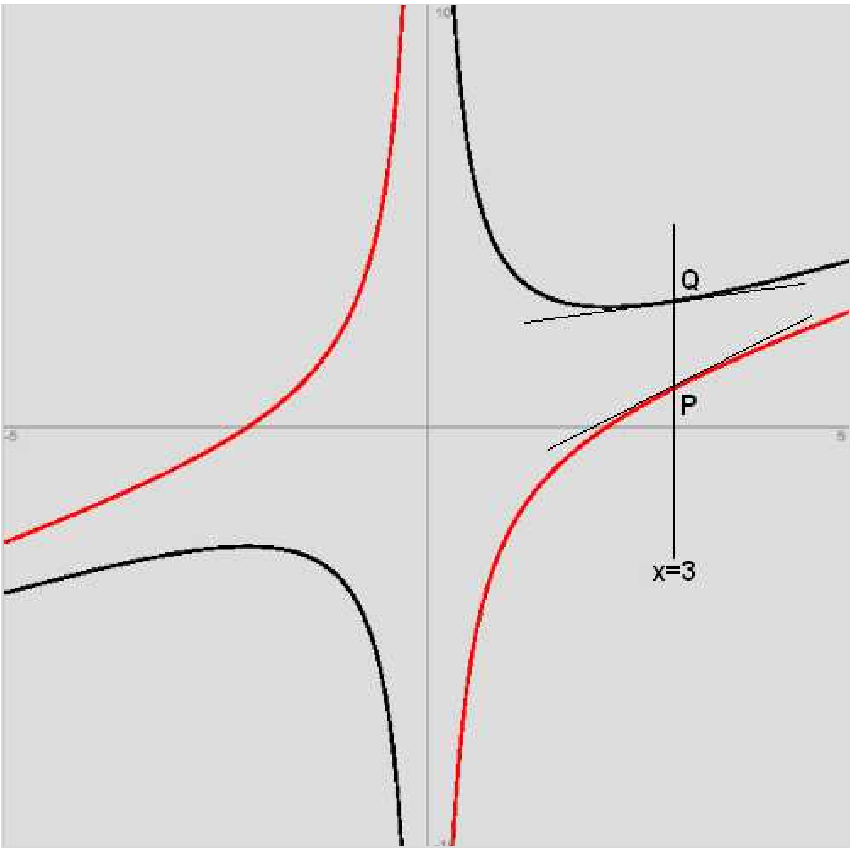
$(2x^2-3xy)^2=81$ | √

$2x^2-3xy=\pm 9$ | $-2x^2$

$-3xy=-2x^2\pm 9$ | :(-3x)

$$y=\frac{-2x^2\pm 9}{-3x}$$

$$y=\frac{2x^2}{3x}\pm\frac{9}{3x}=\frac{2}{3}x\pm\frac{3}{x}$$



y = 2x/3±3/x

Die „Funktion" $y=\frac{2}{3}x\pm\frac{3}{x}=\frac{2}{3}x\pm 3x^{-1}$ besteht also aus zwei Kurventeilen. Explizites Ableiten ergibt dann nach der Potenzregel:

$$y'=\frac{2}{3}\mp 3x^{-2}=\frac{2}{3}\mp\frac{3}{x^2}.$$

b) Wir betrachten Funktion $y=\frac{2}{3}x\pm\frac{3}{x}$ und Ableitung $y'=\frac{2}{3}\mp\frac{3}{x^2}$ an der Stelle x = 3 und erhalten durch Einsetzen von x in Funktion und Ableitung die Kurvenpunkte P(3|1) bzw. Q(3|3) mit den Ableitungen y‘ = 1 bzw. y‘ = 1/3 vermöge:

P(3|1): x = 3 => $y=\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{3}{3}=2-1=1$ => $y'=\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

Q(3|3): x = 3 => $y=\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{3}{3}=2+1=3$ => $y'=\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 255