Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Bilde die 1., 2., 3. Ableitung der gebrochen rationalen Funktion f(x):

$$f(x) = \frac{x}{x+2}.$$

1. Lösung: I. Es gelten die Ableitungsregeln:

(u(x) + c)' = u'(x) (additive Konstante)
[c·u(x)]' = c·u'(x) (konstanter Faktor)
(u(x)+v(x))' = u'(x) + v'(x) (Summenregel)
(u(v(x))' = u'(v(x))·v'(x) (Kettenregel)
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/ganzzahlige/reelle n)
u''(x) = (u'(x))' (2. Ableitung)
u'''(x) = (u''(x))' (3. Ableitung)

II. Wir formen durch Addition und Subtraktion der Zahl 2 im Zähler der gebrochen rationalen Funktion wie folgt um:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} = 1 - 2(x+2)^{-1}.$$

Dabei wurde der Bruch der gebrochen rationalen Funktion in zwei Brüche aufgespalten, der erste der zwei Brüche zu 1 gekürzt, der zweite gemäß den Potenzgesetzen umgeformt ($1/y = y^{-1}$ für reelle y≠0). Wir bilden die drei Ableitungen nach der Summen-, Ketten- und Potenzregel, wobei jeweils die innere Ableitung der Funktion y = x+2 der Ausdruck y' = 1 ist. Es gilt damit:

$$f'(x) = 0 - 2\cdot(-1)(x+2)^{-2}\cdot 1 = 2(x+2)^{-2} = \frac{2}{(x+2)^2} \text{ (1. Ableitung)}$$

$$f''(x) = 2\cdot(-2)(x+2)^{-3}\cdot 1 = -4(x+2)^{-3} = \frac{-4}{(x+2)^3} \text{ (2. Ableitung)}$$

$$f'''(x) = -4\cdot(-3)(x+2)^{-4}\cdot 1 = \frac{12}{(x+2)^4} \text{ (3. Ableitung).}$$

2. Lösung: I. Es gelten die Ableitungsregeln:

(u(x) + c)' = u'(x) (additive Konstante)
[c·u(x)]' = c·u'(x) (konstanter Faktor)
(u(x)+v(x))' = u'(x) + v'(x) (Summenregel)
(u(v(x))' = u'(v(x))·v'(x) (Kettenregel)
$(u(x)/v(x))' = (u'(x)v(x)-u(x)v'(x))/(v(x))^2$ (Quotientenregel)
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/ganzzahlige/reelle n)
u''(x) = (u'(x))' (2. Ableitung)
u'''(x) = (u''(x))' (3. Ableitung)

II. Wir stellen die Quotientenregel in den Mittelpunkt unserer Überlegungen und haben mit:

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

die Zählerfunktion u(x) = x bei u'(x) = 1 und die Nennerfunktion v(x) = x+2 bei v'(x) = 1. Die 1. Ableitung ergibt sich daher als:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}=2(x+2)^{-2},$$

so dass die 2. und 3. Ableitung nach Ketten- und Potenzregel berechnet werden kann:

$$f''(x)=2\cdot(-2)(x+2)^{-3}\cdot 1=-4(x+2)^{-3}=\frac{-4}{(x+2)^3}\text{ (2. Ableitung)}$$

$$f'''(x)=-4\cdot(-3)(x+2)^{-4}\cdot 1=\frac{12}{(x+2)^4}\text{ (3. Ableitung).}$$

3. Lösung: I. Es gelten die Ableitungsregeln:

(u(x) + c)’ = u’(x) (additive Konstante)
[c·u(x)]’ = c·u’(x) (konstanter Faktor)
(u(x)+v(x))’ = u’(x) + v’(x) (Summenregel)
(u(v(x))‘ = u‘(v(x))·v‘(x) (Kettenregel)
(u(x)v(x))‘ = u‘(x)v(x)+u(x)v‘(x) (Produktregel)
$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/ganzzahlige/reelle n)
u“(x) = (u‘(x))‘ (2. Ableitung)
u‘“(x) = (u“(x))‘ (3. Ableitung)

II. Wir formen die der gebrochen rationalen Funktion f(x) um, so dass wir die Produktregel anwenden können. Es gilt nach den Potenzgesetzen ($1/y = y^{-1}$ für reelle y≠0):

$$f(x)=\frac{x}{x+2}=x(x+2)^{-1}.$$

Mit u(x) = x bei u‘(x) = 1 und $v(x) = (x+2)^{-1}$ bei $v'(x) = -1\cdot(x+2)^{-2}\cdot 1 = -(x+2)^{-2}$ (gemäß der Kettenregel mit y = x+2 und y‘ = 1 als innerer Funktion bzw. Ableitung) erhalten wir nach der Produktregel:

$$f'(x)=1(x+2)^{-1}+x\cdot(-(x+2)^{-2})=(x+2)^{-1}-x(x+2)^{-2}\text{ (1. Ableitung)}$$

bzw. nach der Summen-, Ketten- und Produktregel:

$$f''(x)=(-1)(x+2)^{-2}\cdot 1-[1(x+2)^{-2}+x(-2)(x+2)^{-3}\cdot 1]=$$
$$-(x+2)^{-2}-(x+2)^{-2}+2x(x+2)^{-3}=-2(x+2)^{-2}+2x(x+2)^{-3}\text{ (2. Ableitung)}$$

$$f'''(x)=-2\cdot(-1)(x+2)^{-3}\cdot 1+[-2\cdot(-2)(x+2)^{-3}+2x(-3)(x+2)^{-4}\cdot 1]=$$
$$2(x+2)^{-3}+4(x+2)^{-3}-6x(x+2)^{-4}=6(x+2)^{-3}-6x(x+2)^{-4}\text{ (3. Ableitung).}$$

Wir vereinfachen noch die Terme der Ableitungen und rechnen:

$$f'(x)=(x+2)^{-1}-x(x+2)^{-2}=(x+2)^{-2}\cdot[(x+2)-x]=(x+2)^{-2}\cdot 2=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=-2(x+2)^{-2}+2x(x+2)^{-3}=(x+2)^{-3}\cdot[-2(x+2)+2x]=(x+2)^{-3}\cdot[-2x-4+2x]=$$
$$(x+2)^{-3}\cdot(-4)=\frac{-4}{(x+2)^3}$$

$$f'''(x)=6(x+2)^{-3}-6x(x+2)^{-4}=(x+2)^{-4}\cdot[6(x+2)-6x]=(x+2)^{-4}\cdot[6x+12-6x]=$$
$$(x+2)^{-4}\cdot 12=\frac{12}{(x+2)^4}$$

www.michael-buhlmann.de / 09.2018 / Aufgabe 624