Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung/Nicht-Differenzierbarkeit

Aufgabe: Zeige, dass die Funktion f(x) an der Stelle x_0 = -5 nicht differenzierbar ist mit:

$$f(x) = |x - 5|.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt f'(x_0) im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung f'(x_0) ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung f'(x_0) zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des (links-, rechtsseitigen) Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten. Dessen Nichtexistenz führt folglich auf die Nicht-Differenzierbarkeit der Funktion f(x) an der Stelle x_0.

II. Wir betrachten den rechts- und linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} \frac{|x+5| - |-5+5|}{x - (-5)} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} \frac{|x+5| - |0|}{x+5} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} \frac{|x+5|}{x+5} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} \frac{x+5}{x+5} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} 1 = 1$$

sowie:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} \frac{|x+5| - |-5+5|}{x - (-5)} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} \frac{|x+5| - |0|}{x+5} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} \frac{|x+5|}{x+5} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} \frac{-(x+5)}{x+5} = \lim_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} (-1) = -1.$$

Dabei fließen in die Umformungen mit ein: das Einsetzen von x_0 = -5 und die Betragsdefinition:

$$|r| = \begin{cases} r & \text{für } r \geq 0 \\ -r & \text{für } r < 0 \end{cases}$$

mit r = x+5 bzw. r = -(x+5) und das Kürzen des Bruchs mit x+5. Insgesamt ergibt sich die Verschiedenheit von rechts- und linksseitigen Grenzwert mit 1 bzw. -1, d.h.: Die Funktion f(x) ist an der Stelle x_0 = -5 nicht differenzierbar.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1181