Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Bestimme die 1. Ableitung der Funktion:

$$f(x) = 6^x .$$

Lösung: I. Es gelten die allgemeinen Ableitungsregeln:

(u(x) + c)' = u'(x) (additive Konstante)
[c·u(x)]' = c·u'(x) (konstanter Faktor)
(u(x)+v(x))' = u'(x) + v'(x) (Summenregel)
(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) (Produktregel)
(u(x)/v(x))' = (u'(x)v(x)–u(x)v'(x))/(v(x))^2 (Quotientenregel)
(u(v(x))' = u'(v(x))·v'(x) (Kettenregel)

sowie die auf Funktionstypen bezogenen Regeln:

(x^n)' = nx^{n-1} (Potenzregel für natürliche/ganzzahlige/reelle n)
(sin(x))' = cos(x), (cos(x))' = sin(x) (trigonometrische Funktionen)
(e^x)' = e^x (natürliche Exponentialfunktion)
(ln(x))' = 1/x (natürliche Logarithmusfunktion).

II. Um die vorangestellten Ableitungsregeln zu nutzen, formen wir die vorgegebene Exponentialfunktion vermöge der Logarithmengesetze:

$e^{\ln(x)}$ = x, ln(x^r) = r·ln(x) (für reelle r)

wie folgt um:

$$f(x) = 6^x = e^{\ln(6^x)} = e^{x\ln(6)} = e^{\ln(6)\cdot x} .$$

Die 1. Ableitung ergibt sich dann aus den Ableitungsregeln für die natürliche Exponentialfunktion und der Kettenregel („äußere mal innere Ableitung“) mit innerer Funktion v(x) = ln(6)·x => v'(x) = ln(6) und äußerer Funktion u(v) = e^v => u'(v) = e^v als:

$$f'(x) = e^{\ln(6)\cdot x} \cdot \ln(6) .$$

(Rück-) Umformen des Ableitungsterms führt auf:

$$f'(x) = e^{\ln(6)\cdot x} \cdot \ln(6) = 6^x \cdot \ln(6) .$$

III. Allgemein ergibt sich in ähnlicher Schlussweise als Ableitung für Exponentialfunktionen mit beliebiger reeller Basis a>0:

$$f(x) = a^x \quad => \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a) .$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1196