Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Bestimme die 1. Ableitung der Funktion:

$$f(x) = x^x \text{, x>0.}$$

Lösung: I. Es gelten die allgemeinen Ableitungsregeln:

(u(x) + c)' = u'(x) (additive Konstante)
[c·u(x)]' = c·u'(x) (konstanter Faktor)
(u(x)+v(x))' = u'(x) + v'(x) (Summenregel)
(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) (Produktregel)
(u(x)/v(x))' = (u'(x)v(x)–u(x)v'(x))/$(v(x))^2$ (Quotientenregel)
(u(v(x))' = u'(v(x))·v'(x) (Kettenregel)

sowie die auf Funktionstypen bezogenen Regeln:

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/ganzzahlige/reelle n)
(sin(x))' = cos(x), (cos(x))' = sin(x) (trigonometrische Funktionen)
$(e^x)' = e^x$ (natürliche Exponentialfunktion)
(ln(x))' = 1/x (natürliche Logarithmusfunktion).

II. Um die vorangestellten Ableitungsregeln zu nutzen, formen wir die vorgegebene Exponentialfunktion vermöge der Logarithmengesetze:

$e^{\ln(x)} = x$, $\ln(x^r) = r\cdot\ln(x)$ (für reelle r)

wie folgt um:

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}.$$

Die 1. Ableitung ergibt sich dann aus den Ableitungsregeln für die natürliche Exponentialfunktion, für die natürliche Logarithmusfunktion, der Produktregel und der Kettenregel mit innerer Funktion v(x) = x·ln(x) => v'(x) = 1·ln(x) + x·1/x = ln(x) +1 und äußerer Funktion u(v) = e^v => u'(v) = e^v als:

$$f'(x) = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left(1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right) = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot (\ln(x)+1) = x^x(1+\ln(x)).$$

mit der Rückumformung: $e^{x\ln(x)} = x^x$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1197