Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung

Aufgabe: Gegeben ist die Kurve:

$$ye^{2x+y} + x\ln(y+x+2) = 0 .$$

Berechne die Tangentensteigung der Kurve an der Stelle x = 0.

1. Lösung: I. Es gelten die Ableitungsregeln:

(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) (Summenregel)
(f(x)·g(x))' = f'(x)·g(x) + f(x)·g'(x) (Produktregel)
(x^n)' = nx^{n-1} (Potenzregel für natürliche/reelle n)
[f(g(x))]' = f'(g(x))·g'(x) (Kettenregel).

Beim implizitem Ableiten wird in der Gleichung φ(x,y) = 0 einer Kurve (als implizit darstellbarer „Funktion“ y=y(x)) die Variable y = y(x) in Abhängigkeit von der Variable x aufgefasst und die Gleichung gliedweise nach x unter Beachtung der Ableitungsregeln bzw. nach y unter Beachtung von Kettenregel und innerer Ableitung y‘ differenziert. Die entstehende Gleichung der Ableitung wird nach y‘ umgestellt.

II. Unter Benutzung obiger Ableitungsregeln, insbesondere der Ketten- und Produktregel leiten wir implizit wie folgt ab und vereinfachen:

$$ye^{2x+y} + x\ln(y+x+2) = 0 \implies$$

$$y'e^{2x+y} + y(2+y')e^{2x+y} + \ln(y+x+2) + x\frac{y'+1}{y+x+2} = 0 \qquad |\cdot(y+x+2)$$

$$y'(y+x+2)e^{2x+y} + y(2+y')(y+x+2)e^{2x+y} + (y+x+2)\ln(y+x+2) + x(y'+1) = 0$$

$$[y'(y+x+2) + y(2+y')(y+x+2)]e^{2x+y} + (y+x+2)\ln(y+x+2) + x(y'+1) = 0$$

$$[yy'+xy'+2y'+2y^2+2xy+4y+y^2y'+xyy'+2yy']e^{2x+y} + (y+x+2)\ln(y+x+2) + x(y'+1) = 0$$

Umstellen nach y‘ ergibt die implizite Ableitung:

$$[y'(x+xy+3y+y^2+2) + 2y(x+y+2)]e^{2x+y} + (y+x+2)\ln(y+x+2) + x(y'+1) = 0$$

$$y'(x+xy+3y+y^2+2)e^{2x+y} + 2y(x+y+2)e^{2x+y} + (y+x+2)\ln(y+x+2) + xy'+x = 0$$

$$y'[(x+xy+3y+y^2+2)e^{2x+y} + x] + 2y(x+y+2)e^{2x+y} + (y+x+2)\ln(y+x+2) + x = 0$$

| $-2y(x+y+2)e^{2x+y}$ – ·(y+x+2)ln(y+x+2) – x

$$y'[(x+xy+3y+y^2+2)e^{2x+y} + x] = -2y(x+y+2)e^{2x+y} - (y+x+2)\ln(y+x+2) - x$$

| :[$(x+xy+3y+y^2+2)e^{2x+y}+x$]

$$y' = \frac{-2y(x+y+2)e^{2x+y} - (y+x+2)\ln(y+x+2) - x}{(x+xy+3y+y^2+2)e^{2x+y} + x} \quad (*).$$

Die Ableitung y‘ gemäß (*) benötigen wir, um die gesuchte Tangentensteigung als Ableitung zu bestimmen.

III. Für die Stelle x = 0 bestimmen wir den zugehörigen Punkt der Kurve durch Einsetzen des x-Wertes in die Kurvengleichung $ye^{2x+y} + x\ln(y+x+2) = 0$ und Auflösen nach y:

$$ye^{y} + 0\cdot\ln(y+2) = 0$$

$ye^{y} = 0$ | :e^{y}

y = 0.

Die Tangentensteigung ist also im Punkt P(0|0) zu bestimmen.

IV. Mit x = 0 und y = 0 können wir den Wert der Ableitung y‘ an der Stelle x = 0 bestimmen. Es ergibt sich wegen (*):

$$y'(0) = \frac{-2\cdot 0\cdot(0+0+2)e^{0} - (0+0+2)\ln(0+0+2) - 0}{(0+0+0+0+2)e^{0} + 0} = \frac{-2\ln(2)}{2} = -\ln(2)$$

als gesuchter Wert der Tangentensteigung.

2. Lösung: I. Es gelten die Ableitungsregeln:

(f(x)+g(x))’ = f’(x) + g’(x) (Summenregel)
(f(x)·g(x))’ = f’(x)·g(x) + f(x)·g’(x) (Produktregel)
$(x^{n})' = nx^{n-1}$ (Potenzregel für natürliche/reelle n)
[f(g(x))]’ = f’(g(x))·g’(x) (Kettenregel).

Beim impliziten Ableiten wird in der Gleichung φ(x,y) = 0 die Kurve φ(x,y) (als implizit darstellbarer „Funktion“ y=y(x)) partiell nach x und y abgeleitet; die Ableitung y‘ ergibt sich dann als:

$$y' = -\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}$$

(mit den partiellen Ableitungen $\varphi_x(x,y)$, $\varphi_y(x,y)$).

II. Unter Benutzung obiger Ableitungsregeln, insbesondere der Ketten- und Produktregel leiten wir den Ausdruck

$$\varphi(x,y) = ye^{2x+y} + x\ln(y+x+2)$$

partiell ab. Es gilt:

$$\varphi_x(x,y) = 2ye^{2x+y} + 1\cdot\ln(y+x+2) + x\cdot\frac{1}{y+x+2} = 2ye^{2x+y} + \ln(y+x+2) + \frac{x}{y+x+2}$$

$$\varphi_y(x,y) = 1\cdot e^{2x+y} + y\cdot e^{2x+y} + x\cdot\frac{1}{y+x+2} = e^{2x+y} + ye^{2x+y} + \frac{x}{y+x+2}.$$

III. Für die Stelle x = 0 bestimmen wir den zugehörigen Punkt der Kurve durch Einsetzen des x-Wertes in die Kurvengleichung $ye^{2x+y} + x\ln(y+x+2) = 0$ und Auflösen nach y:

$ye^{y} + 0\cdot\ln(y+2) = 0$

$ye^{y} = 0$ | :e^{y}

y = 0.

Die Tangentensteigung ist also im Punkt P(0|0) zu bestimmen.

IV. Es ist:

$$y' = -\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)} = -\frac{2ye^{2x+y} + \ln(y+x+2) + \frac{x}{y+x+2}}{e^{2x+y} + ye^{2x+y} + \frac{x}{y+x+2}},$$

so dass das Einsetzen der Punktkoordinaten x = 0, y = 0 die gesuchte Tangentensteigung ergibt:

$$y'(0) = -\frac{0+\ln(2)+0}{1+0+0} = -\ln(2).$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1529