

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung

Aufgabe: Bestimme die 3. Ableitung der Funktion:

$$f(x) = (x^3 - x^2)e^{2x}.$$

1. Lösung: I. Es gelten die allgemeinen Ableitungsregeln:

$$(u(x) + c)' = u'(x) \text{ (additive Konstante)}$$

$$[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x) \text{ (konstanter Faktor)}$$

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x) \text{ (Summenregel)}$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \text{ (Produktregel)}$$

$$(u(x)/v(x))' = (u'(x)v(x) - u(x)v'(x))/(v(x))^2 \text{ (Quotientenregel)}$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

sowie die auf Funktionstypen bezogenen Regeln:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ (Potenzregel für natürliche/ganzzahlige/reelle } n)$$

$$(\sin(x))' = \cos(x), (\cos(x))' = -\sin(x) \text{ (trigonometrische Funktionen)}$$

$$(e^x)' = e^x \text{ (natürliche Exponentialfunktion)}$$

$$(\ln(x))' = 1/x \text{ (natürliche Logarithmusfunktion)}.$$

II. Wir bilden hauptsächlich mit der Produktregel die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ wie folgt:

$$f(x) = (x^3 - x^2)e^{2x}$$

$$f'(x) = (3x^2 - 2x)e^{2x} + (x^3 - x^2) \cdot 2e^{2x} = (3x^2 - 2x + 2(x^3 - x^2))e^{2x} = (2x^3 + x^2 - 2x)e^{2x}$$

$$f''(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{2x} + (2x^3 + x^2 - 2x) \cdot 2e^{2x} = (6x^2 + 2x - 2 + 2(2x^3 + x^2 - 2x))e^{2x} = (4x^3 + 8x^2 - 2x - 2)e^{2x}$$

$$f'''(x) = (12x^2 + 16x - 2)e^{2x} + (4x^3 + 8x^2 - 2x - 2) \cdot 2e^{2x} = (12x^2 + 16x - 2 + 2(4x^3 + 8x^2 - 2x - 2))e^{2x} = (8x^3 + 28x^2 + 12x - 6)e^{2x}.$$

Die 3. Ableitung lautet also: $f'''(x) = (8x^3 + 28x^2 + 12x - 6)e^{2x}$.

2. Lösung: I. Wir setzen eine Funktion $f(x)$ vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $r \neq 0$ voraus, die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist vom selben Typ mit:

$$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$$

mit zu bestimmenden $a_0, a_1, \dots, a_n$. Funktion und Ableitungsfunktion enthalten als Faktoren Polynome vom selben Grad n , so dass $n+1$ a_i , $i=0, \dots, n$, zu ermitteln sind. Dazu leiten wir die Funktion $f(x)$ gemäß der Produktregel ab und erhalten nach obiger Produktregel:

$$f'(x) = (n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + \alpha_1) \cdot e^{rx} + r(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx} =$$

$$(r\alpha_n x^n + (n\alpha_n + r\alpha_{n-1}) x^{n-1} + ((n-1)\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2}) x^{n-2} + \dots + (\alpha_1 + r\alpha_0)) \cdot e^{rx}$$

und damit eine weitere Darstellung der Funktion $f'(x)$. Ein Koeffizientenvergleich führt auf die folgenden Beziehungen:

$$a_n = r\alpha_n$$

$$a_k = (k+1)\alpha_{k+1} + r\alpha_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Weiter ergibt sich ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der ersten m Ableitungen wie folgt:

Rekursionsanfang:

$$a_k^{(0)} = \alpha_k, \quad k = 0, \dots, n$$

Rekursion:

$$a_n^{(j)} = r a_n^{(j-1)} = r^n a_n^{(0)}$$

$$a_k^{(j)} = (k+1) a_{k+1}^{(j-1)} + r a_k^{(j-1)}, \quad k = 0, \dots, n-1 \rightarrow f^{(j)}(x) = (a_n^{(j)} x^n + a_{n-1}^{(j)} x^{n-1} + \dots + a_1^{(j)} x + a_0^{(j)}) \cdot e^{rx}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Es gilt das Berechnungsschema von der $j-1$. zur j . Ableitung, $j = 1, \dots, m$:

$f^{(j-1)}(x) = (a_n^{(j-1)} x^n + a_{n-1}^{(j-1)} x^{n-1} + \dots + a_1^{(j-1)} x + a_0^{(j-1)}) \cdot e^{rx}$									
Koeffizienten	$r =$	0	$a_n^{(j-1)}$	$a_{n-1}^{(j-1)}$	...	$a_k^{(j-1)}$	$a_{k-1}^{(j-1)}$	...	$a_1^{(j-1)}$ $a_0^{(j-1)}$
$a_n^{(j)}$	r	$(n+1) \cdot 0 + r a_n^{(j-1)} = r a_n^{(j-1)} = a_n^{(j)}$							
$a_{n-1}^{(j)}$	r		$n a_n^{(j-1)} + r a_{n-1}^{(j-1)} = a_{n-1}^{(j)}$						
...				...					
$a_k^{(j)}$	r				$(k+1) a_{k+1}^{(j-1)} + r a_k^{(j-1)} = a_k^{(j)}$				
$a_{k-1}^{(j)}$	r					$k a_k^{(j-1)} + r a_{k-1}^{(j-1)} = a_{k-1}^{(j)}$			
...							...		
$a_1^{(j)}$	r							$2 a_2^{(j-1)} + r a_1^{(j-1)} = a_1^{(j)}$	
$a_0^{(j)}$	r								$1 a_1^{(j-1)} + r a_0^{(j-1)} = a_0^{(j)}$
$f^{(j)}(x) = (a_n^{(j)} x^n + a_{n-1}^{(j)} x^{n-1} + \dots + a_1^{(j)} x + a_0^{(j)}) \cdot e^{rx}$									

II. Wir wenden das eben dargestellte Berechnungsschema auf die Funktion $f(x) = (x^3 - x^2) e^{2x}$ an und haben:

Funktion		$f(x) = (x^3 - x^2) \cdot e^{2x}$			
Koeffizienten	$r =$	$a_3^{(0)} = 1$	$a_2^{(0)} = -1$	$a_1^{(0)} = 0$	$a_0^{(0)} = 0$
$a_3^{(1)}$	2	$2 \cdot 1 = 2$			
$a_2^{(1)}$	2		$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$		
$a_1^{(1)}$	2			$2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -2$	
$a_0^{(1)}$	2				$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$
1. Ableitung		$f'(x) = (2x^3 + x^2 - 2x) \cdot e^{2x}$			
1. Ableitung		$f'(x) = (2x^3 + x^2 - 2x) \cdot e^{2x}$			
Koeffizienten	$r =$	$a_3^{(1)} = 2$	$a_2^{(1)} = 1$	$a_1^{(1)} = -2$	$a_0^{(1)} = 0$
$a_3^{(2)}$	2	$2 \cdot 2 = 4$			
$a_2^{(2)}$	2		$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$		
$a_1^{(2)}$	2			$2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -2$	
$a_0^{(2)}$	2				$1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = -2$
2. Ableitung		$f''(x) = (4x^3 + 8x^2 - 2x - 2) \cdot e^{2x}$			
2. Ableitung		$f''(x) = (4x^3 + 8x^2 - 2x - 2) \cdot e^{2x}$			
Koeffizienten	$r =$	$a_3^{(2)} = 4$	$a_2^{(2)} = 8$	$a_1^{(2)} = -2$	$a_0^{(2)} = -2$
$a_3^{(3)}$	2	$2 \cdot 4 = 8$			
$a_2^{(3)}$	2		$3 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 28$		
$a_1^{(3)}$	2			$2 \cdot 8 + 2 \cdot (-2) = 12$	
$a_0^{(3)}$	2				$1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = -6$
3. Ableitung		$f'''(x) = (8x^3 + 28x^2 + 12x - 6) \cdot e^{2x}$			

Damit ist die 3. Ableitung bestimmt als: $f'''(x) = (8x^3 + 28x^2 + 12x - 6)e^{2x}$.