

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung

Aufgabe: Bestimme die 6. Ableitung $f^{(6)}(x)$ der Funktion:

$$f(x) = (2x^3 - 9x - 1)e^{-x}.$$

Lösung: I. Wir setzen eine Funktion $f(x)$ vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $r \neq 0$ voraus, die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist vom selben Typ mit:

$$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$$

mit zu bestimmenden $a_0, a_1, \dots, a_n$. Funktion und Ableitungsfunktion enthalten als Faktoren Polynome vom selben Grad n , so dass $n+1$ a_i , $i=0, \dots, n$, zu ermitteln sind. Dazu leiten wir die Funktion $f(x)$ gemäß der Produktregel ab und erhalten nach obiger Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + \alpha_1) \cdot e^{rx} + r(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx} = \\ &= (r\alpha_n x^n + (n\alpha_n + r\alpha_{n-1}) x^{n-1} + ((n-1)\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2}) x^{n-2} + \dots + (\alpha_1 + r\alpha_0)) \cdot e^{rx} \end{aligned}$$

und damit eine weitere Darstellung der Funktion $f'(x)$. Ein Koeffizientenvergleich führt auf die folgenden Beziehungen:

$$a_n = r\alpha_n$$

$$a_k = (k+1)\alpha_{k+1} + r\alpha_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (*),$$

d.h. die Koeffizienten des Polynoms in der 1. Ableitungsfunktion errechnen sich vermöge:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

als Lösungen eines linearen Gleichungssystems.

Die Koeffizienten des Polynoms in der m. Ableitungsfunktion, $m \in \mathbf{N}$, heißen nun $a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}$. Sie lassen sich folglich ermitteln als:

$$\begin{pmatrix} a_n^{(m)} \\ a_{n-1}^{(m)} \\ a_{n-2}^{(m)} \\ \dots \\ a_1^{(m)} \\ a_0^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix},$$

d.h. indem die Haupt-/Nebendiagonalmatrix (A) m-mal mit sich selbst multipliziert wird (Potenzierung der Matrix: A^m).

II. Zur Funktion $f(x) = (2x^3 - 9x - 1)e^{-x}$ bilden wir mit $r = -1$ und $n = 3$ die folgende 4x4-Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und potenzieren diese wegen der gesuchten 6. Ableitung mit $m = 6$. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 1 & 0 & 0 \\ 90 & -12 & 1 & 0 \\ -120 & 30 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

bei Matrixpotenzierung:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 0 \\ -18 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 1 & 0 & 0 \\ 36 & -8 & 1 & 0 \\ -24 & 12 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -1 & 0 & 0 \\ -60 & 10 & -1 & 0 \\ 60 & -20 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 1 & 0 & 0 \\ 90 & -12 & 1 & 0 \\ -120 & 30 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Koeffizienten $a_0^{(6)}$, $a_1^{(6)}$, $a_2^{(6)}$, $a_3^{(6)}$ des Polynoms in der Ableitungsfunktion $f^{(6)}(x)$ bestimmen sich dann auf Grund von $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = -9$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$ mit Hilfe der Matrixpotenz als:

$$\begin{pmatrix} a_3^{(6)} \\ a_2^{(6)} \\ a_1^{(6)} \\ a_0^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 1 & 0 & 0 \\ 90 & -12 & 1 & 0 \\ -120 & 30 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 \\ -18 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 90 \cdot 2 + (-12) \cdot 0 + 1 \cdot (-9) \\ -120 \cdot 2 + 30 \cdot 0 + (-6) \cdot (-9) + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -36 \\ 171 \\ -187 \end{pmatrix}.$$

Mit $a_0^{(6)} = -187$, $a_1^{(6)} = 171$, $a_2^{(6)} = -36$, $a_3^{(6)} = 2$ folgt für die gesuchte 6. Ableitung:

$$f^{(6)}(x) = (2x^3 - 36x^2 + 171x - 187)e^{-x}.$$

www.michael-buhlmann.de / 08.2025 / Aufgabe 2493