

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung/Integral

Aufgabe: Bestimme die 1. Ableitung $f'(x)$ und eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion:

$$f(x) = (x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9)e^{-2x}.$$

Lösung: I. Wir setzen eine Funktion $f(x)$ vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $r \neq 0$ voraus, die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist vom selben Typ mit:

$$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$$

mit zu bestimmenden $a_0, a_1, \dots, a_n$. Funktion und Ableitungsfunktion enthalten als Faktoren Polynome vom selben Grad n , so dass $n+1$ a_i , $i=0, \dots, n$, zu ermitteln sind. Dazu leiten wir die Funktion $f(x)$ gemäß der Produktregel ab und erhalten nach obiger Produktregel:

$$f'(x) = (n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + \alpha_1) \cdot e^{rx} + r(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx} =$$

$$(r\alpha_n x^n + (n\alpha_n + r\alpha_{n-1})x^{n-1} + ((n-1)\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2})x^{n-2} + \dots + (\alpha_1 + r\alpha_0)) \cdot e^{rx}$$

und damit eine weitere Darstellung der Funktion $f'(x)$. Ein Koeffizientenvergleich führt auf die folgenden Beziehungen:

$$a_n = r\alpha_n$$

$$a_k = (k+1)\alpha_{k+1} + r\alpha_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (*),$$

d.h. die Koeffizienten des Polynoms in der Ableitungsfunktion errechnen sich vermöge:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

als Lösungen eines linearen Gleichungssystems.

Zur Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $r \neq 0$ ist eine Stammfunktion $F(x)$:

$$F(x) = (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \cdot e^{rx}$$

mit zu bestimmenden $b_0, b_1, \dots, b_n$. Da die Funktion $f(x)$ sich als Ableitung einer Stammfunktion $F(x)$ darstellt ($F'(x) = f(x)$), gelten gemäß (*):

$$\alpha_n = r b_n$$

$$\alpha_k = (k+1)b_{k+1} + r b_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (**),$$

so dass sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

ergibt. Das lineare Gleichungssystem ist nach den Unbekannten $b_0, b_1, \dots, b_n$ eindeutig auflösbar, da die in der Haupt- und einer Nebendiagonalen mit nicht verschwindenden Elementen r und $n, n-1, \dots, 1$ besetzte Matrix

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Zu den Funktionen vom Typ $f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$ existieren damit geschlossen darstellbare Stammfunktionen $F(x) = (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \cdot e^{rx}$ vom selben Typ.

Die Bestimmung der Unbekannten $b_0, b_1, \dots, b_n$ geschieht entweder mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, angewendet auf das lineare Gleichungssystem (**):

$$r b_n = \alpha_n$$

$$n b_n + r b_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

$$(n-1) b_{n-1} + r b_{n-2} = \alpha_{n-2}$$

...

$$2 b_2 + r b_1 = \alpha_1$$

$$b_1 + r b_0 = \alpha_0$$

oder mit Hilfe der Matrixinversen:

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

bei Matrixinversion ebenfalls mit den Gauß-Verfahren.

II. Zur Funktion $f(x) = (x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9)e^{-2x}$ bilden wir die 1. Ableitung, indem wir mit $r = -2$ und $n = 4$ folgende 5x5-Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

aufstellen. Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 des Polynoms in der Ableitungsfunktion $f'(x)$ bestimmen sich dann auf Grund von $\alpha_0 = 9, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -4, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = 1$ als:

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 23 \\ -8 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Mit $a_0 = -18, a_1 = -8, a_2 = 23, a_3 = -6, a_4 = -2$ folgt für die 1. Ableitung:

$$f'(x) = (-2x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 8x - 18)e^{-2x}.$$

III. Auch zur Bestimmung der Koeffizienten b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 des Polynoms in einer Stammfunktion $F(x)$ zur Funktion $f(x) = (x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9)e^{-2x}$ verwenden wir die oben gebildete 5x5-Matrix, zu der wir wie folgt die Inverse bilden:

Matrix | Einheitsmatrix ->

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) + 2 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{cccccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2. Schritt: $2 \cdot (3) + 3 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{cccccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3. Schritt: $2 \cdot (4) + 1 \cdot (3) /$

$$\begin{array}{cccccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Mit der Matrixinversen berechnen sich mit $\alpha_0 = 9, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -4, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = 1$ die gesuchten Koeffizienten der Stammfunktion als:

$$\begin{pmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & -0,75 & -0,5 & 0 & 0 \\ -1,5 & -0,75 & -0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,75 & -0,375 & -0,25 & -0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + (-0,5) \cdot 5 \\ -1,5 \cdot 1 + (-0,75) \cdot 5 + (-0,5) \cdot (-4) \\ -1,5 \cdot 1 + (-0,75) \cdot 5 + (-0,5) \cdot (-4) + (-0,5) \cdot 0 \\ -0,75 \cdot 1 + (-0,375) \cdot 5 + (-0,25) \cdot (-4) + (-0,25) \cdot 0 + (-0,5) \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -3,5 \\ -3,25 \\ -3,25 \\ -6,125 \end{pmatrix}$$

und damit als: $b_0 = -6,125, b_1 = -3,25, b_2 = -3,25, b_3 = -3,5, b_4 = -0,5$. Eine Stammfunktion lautet folglich:

$$f(x) = (-0,5x^4 - 3,5x^3 - 3,25x^2 - 3,25x - 6,125)e^{-2x}.$$

4. Schritt: $4 \cdot (5) + 1 \cdot (4) /$

$$\begin{array}{cccccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 6 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

5. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{cccccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 6 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

Teilen: $(1):(-2) / (2):(-2) / (3):(-4) / (4):(-4) / (5):(-8) /$

$$\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & -3/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & -3/4 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3/4 & -3/8 & -1/4 & -1/4 & -1/2 \end{array}$$

-> Einheitsmatrix | Matrixinverse