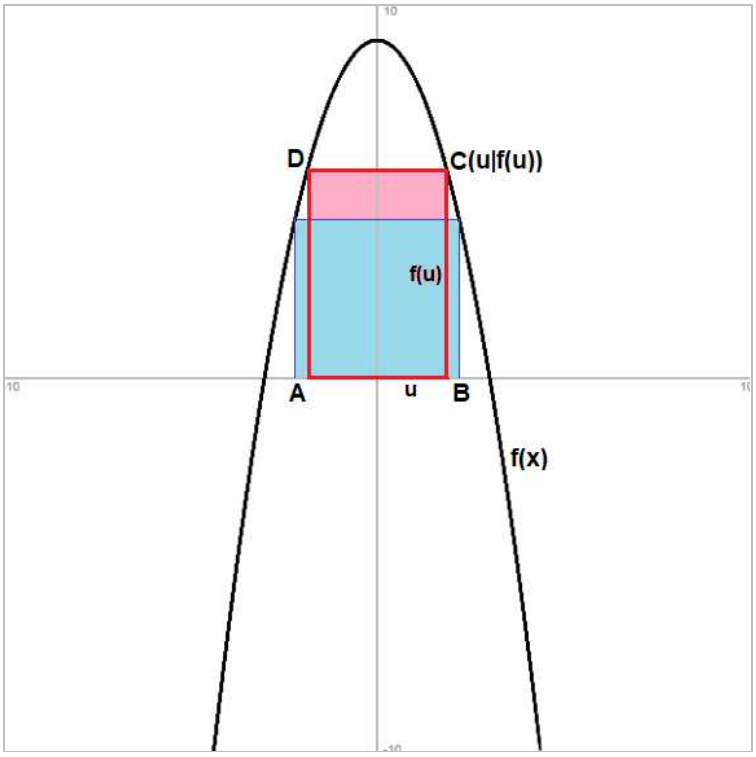
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: a) Beweise: Zu jeder allgemeinen, zur y-Achse symmetrischen Parabel f(x) = a – bx^2 (a, b > 0) befindet sich unter den zwischen x-Achse und Kurve einbeschriebenen Rechtecken genau ein Quadrat.

b) Bestimme die Seitenlänge, die Ecken und den Flächeninhalt dieses Quadrats.

Lösung: a) I. Wir gehen aus von folgender Situation mit der Funktion f(x) = a – bx^2 und einem Rechteck ABCD:



Für eine allgemeine Parabel f(x) = a – bx^2 (a, b > 0) gilt für deren Nullstellen:

f(x) =0 ⇔ a – bx^2 = 0 ⇔ a = bx^2 ⇔ x^2 = $\frac{a}{b}$ ⇔ x = $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$,

so dass mit $0 \le u \le \sqrt{\frac{a}{b}}$ (u-Intervall [0; $\sqrt{\frac{a}{b}}$]) die Punkte A, B, C, D das Aussehen: A(-u|0), B(u|0), C(u|f(u)), D(-u|f(u)) besitzen.

II. Die Grundseite g und die Höhe h des zu ermittelnden Quadrats genügen den Beziehungen: g = 2u, h = f(u) = a – bu^2.

Wegen der Quadrateigenschaft des Rechtecks ABCD muss die Gleichheit: g = h gelten, so dass Umformen ergibt:

g = h ⇔ 2u = a–bu^2 ⇔ bu^2 + 2u – a = 0 ⇔

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot b \cdot (-a)}}{2 \cdot b} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4ab}}{2b} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+ab}}{2b} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+ab}}{b}.$$

Der Wert u = $\frac{-1+\sqrt{1+ab}}{b} = -\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{a}{b}}$ liegt im u-Intervall [0; $\sqrt{\frac{a}{b}}$] wegen:

$$-\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{a}{b}} \geq -\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}} = -\frac{1}{b}+\frac{1}{b} = 0$$

$-\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{a}{b}} \leq -\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}}+\sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (wegen: $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$; x, y ≥ 0).

Damit ist die eindeutige Existenz eines einbeschriebenen Quadrats unter den einbeschriebenen Rechtecken ABCD gezeigt.

b) Die Seitenlänge des in Aufgabe a) gefundenen eindeutigen Quadrats ABCD beträgt g = h mit:

u = $\frac{-1+\sqrt{1+ab}}{b}$ => g = 2u = $\frac{-2+2\sqrt{1+ab}}{b}$ = h.

Die Ecken des Quadrats lauten dann:

A($\frac{1-\sqrt{1+ab}}{b}$|0)

B($\frac{-1+\sqrt{1+ab}}{b}$|0)

C($\frac{-1+\sqrt{1+ab}}{b}$|$\frac{-2+2\sqrt{1+ab}}{b}$)

D($\frac{1-\sqrt{1+ab}}{b}$|$\frac{-2+2\sqrt{1+ab}}{b}$).

Für die Quadratfläche folgt:

A_Q = $\left(\frac{-2+2\sqrt{1+ab}}{b}\right)^2 = \frac{4}{b^2}\left(-1+\sqrt{1+ab}\right)^2 = \frac{4}{b^2}\left(1-2\sqrt{1+ab}+1+ab\right) = \frac{4}{b^2}\left(2-2\sqrt{1+ab}+ab\right)$.

www.michael-buhlmann.de / 10.2018 / Aufgabe 626