Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweise

Aufgabe: Beweise die folgenden Aussagen:

a) Eine auf dem (kompakt-) abgeschlossenen Intervall [a; b] definierte stetige Funktion f(x) nimmt jedes y mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ bzw. $f(b) \leq y \leq f(a)$ an mindestens einer Stelle $x_0 \varepsilon [a; b]$ mit $f(x_0) = y$ an (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen).

b) Eine auf dem (kompakt-) abgeschlossenen Intervall [a; b] definierte stetige Funktion f(x) nimmt auf dem Intervall ein Maximum und ein Minimum der Funktionswerte y = f(x) an (Satz vom Maximum und Minimum).

c) Eine auf ihrem Definitionsbereich D_f differenzierbare Funktion f(x) ist dort auch stetig.

d) Ist F(x) die (integrierte) Stammfunktion einer in ihrem Definitionsbereich D_f stetigen Funktion f(x), so ist F(x) stetig differenzierbar mit F'(x) = f(x) (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Lösung: I. Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl *n* genau eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \to a_n$ oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit $a_n = f(n)$ definiert f die Funktionsvorschrift der Folge. $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ heißt also eine Folge. Sind $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Folgen und c eine reelle Zahl, sind $\{c \cdot a_n\}$, $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n/b_n\}$ usw. ebenfalls Folgen, soweit definiert. Eine Folge $\{a_n\}$ heißt: nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke $S_u \varepsilon \mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \geq S_u$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$; nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke $S_o \varepsilon \mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \leq S_o$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$; beschränkt, wenn $\{a_n\}$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h.: es gibt eine untere Schranke $S_u \varepsilon \mathbf{R}$ und eine obere Schranke $S_o \varepsilon \mathbf{R}$ mit: $S_u \leq a_n \leq S_o$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$; monoton fallend, falls: $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$; streng monoton fallend, falls: $a_n > a_{n+1}$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$; monoton steigend, falls: $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$; streng monoton steigend, falls: $a_n < a_{n+1}$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$. Die kleinste obere Schranke einer Folge $\{a_n\}$ heißt Supremum s = sup a_n, wenn gilt: $a_n \leq s$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$ und: $a_n \leq s^*$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N} \Rightarrow s \leq s^*$; die größte untere Schranke einer Folge $\{a_n\}$ heißt Infimum i = inf a_n, wenn gilt: $a_n \geq i$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$ und: $a_n \geq i^*$ für alle $n\varepsilon\mathbf{N} \Rightarrow i \geq i^*$.

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn für jedes $\varepsilon>0$ in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$) ab einem gewissen n_0 ($= n(\varepsilon)$) alle Folgenglieder liegen, d.h.:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \varepsilon \mathbf{N}: |a_n - g| < \varepsilon.$$

Im Fall der Konvergenz gilt:

$$g = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Eine Folge mit Grenzwert g=0, heißt Nullfolge, Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten, Absolutbeträge usw. von konvergenten Folgen sind ebenfalls konvergent mit Grenzwerten als Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten, Absolutbeträge usw. der einzelnen Grenzwerte (Grenzwertsätze). Konvergente Folgen sind beschränkt.

Es gilt der Satz von Weierstraß: Jede beschränkte monotone (monoton steigende, monoton fallende) Folge besitzt einen Grenzwert. Es gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge $\{a_n\}$ hat einen Häufungspunkt, also einen Wert h, in dessen beliebiger (ε-) Umgebung unendlich viele Folgenglieder a_n liegen; es gibt damit eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}$, die gegen den Wert h konvergiert.

II. Jede beschränkte reelle Zahlenmenge M besitzt als kleinste obere Schranke das Supremum s = sup M mit: $x \le s$ für alle $x \varepsilon M$ und: $x \le s^*$ für alle $x \varepsilon M$ => $s \le s^*$. Jede beschränkte reelle Zahlenmenge M besitzt als größte untere Schranke das Infimum i = inf M mit: $x \ge s$ für alle $x \varepsilon M$ und: $x \ge s^*$ für alle $x \varepsilon M$ => $s \ge s^*$.

III. Eine Funktion f: D_f -> **R** heißt an einer Stelle $x_0 \varepsilon D_f$ stetig, wenn die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \ \varepsilon \mathbf{N}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

erfüllt ist, d.h. wenn für jede konvergente Folge $\{x_n\}_{n \varepsilon \mathbf{N}}$ gilt:

$$\lim_{n->\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n->\infty} f(x_n) = f(\lim_{n->\infty} x_n) = f(x_0).$$

Im Fall der Stetigkeit gilt noch:

$$\lim_{x->x_0} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Funktionsgrenzwert, linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert müssen im Fall der Stetigkeit übereinstimmen und gleich dem (somit an der Stelle x_0) definierten Funktionswert sein. Existiert der Funktionsgrenzwert, so auch der links- und rechtsseitige Grenzwert, die dann gleich sind. Existieren der links- und rechtsseitige Grenzwert und sind gleich, so existiert auch der Gesamtgrenzwert und es gilt Gleichheit. Liegt $x_0 \varepsilon D_f$ am Rand des Definitionsbereichs, so entfällt entweder der links- oder rechtsseitige Grenzwert. Sollte in der obigen Gleichungskette nur eine Gleichheit nicht erfüllt sein, so ist die Funktion f(x) unstetig an der Stelle x_0. Unstetigkeiten gibt es, wenn an der reellen Stelle x_0 eine Lücke, eine Sprungstelle oder eine Polstelle vorliegt.

IV. Die Ableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion f: D_f -> **R** der Form y = f(x) (D_f als Definitionsbereich) an einer beliebigen Stelle $x_0 \varepsilon D_f$ stellt sich als Grenzwert von Differenzenquotienten:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h->0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Die Funktion f'(x) heißt Ableitungsfunktion, eine Funktion f(x) heißt stetig differenzierbar, wenn ihre Ableitung stetig ist. Eine Funktion F(x) heißt Stammfunktion von f(x), wenn ihre Ableitung F'(x) mit f(x) übereinstimmt: F'(x) = f(x). Die Integralfunktion der oberen Grenze:

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ist vermöge des bestimmten Integrals $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ eine Stammfunktion.

V. a) O.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) weisen wir nur nach, dass eine Funktion f(x) auf dem Intervall [a; b] mit f(a) < 0 < f(b) dort eine Nullstelle besitzt. (Für einen beliebigen Wert y mit f(a) < y < f(b) führt die Betrachtung der Funktion f*(x) = f(x) – y auf die Nullstelle von f*(x); der Fall f(a) > 0 > f(b) lässt sich mit f*(x) = -f(x) auf den Fall f*(a) < 0 < f*(b) zurückführen usw.) Die Menge M sei die Teilmenge des Intervalls [a; b] mit: M = {x| f(x)<0, xε[a; b]}. Wegen der Kompaktheit des abgeschlossenen Intervalls [a; b] ist die Menge M als Teilmenge des Intervalls beschränkt. Daher besitzt M ein Supremum s = sup M, das im Intervall [a; b] liegt. Für jede Folge $\{a_n\}$ aus M mit $\lim_{n->\infty} a_n = s$ gilt wegen der Stetigkeit der Funktion f(x): $\lim_{n->\infty} f(a_n) = f(\lim_{n->\infty} a_n) = f(s)$ mit: $f(a_n) < 0$ und $f(s) \le 0$, wobei aus $f(s) \le 0 < f(b)$ folgt: $s \ne b$, d.h.: s < b. Nun sei N die Teilmenge des Intervalls [a; b] mit: N = [a; b]\M. Für jede Folge $\{b_n\}$ aus N mit $\lim_{n->\infty} a_n = s$ – es gibt wegen s < b solche Folgen wie u.a. $b_n = s + 1/n$ (ab einem gewissen n_0) – gilt ebenfalls wegen der Stetigkeit der Funktion f(x): $\lim_{n->\infty} f(b_n) = f(\lim_{n->\infty} b_n) = f(s)$ mit: $f(b_n) \ge 0$ und $f(s) \ge 0$. Insgesamt gilt also: $f(s) \le 0 \le f(s)$ und damit: f(s) = 0, so dass s eine Nullstelle von f(x) ist.

b) O.B.d.A. beweisen wir nur, dass die stetige Funktion f(x) auf dem Intervall ein Maximum annimmt. (Den Beweis für das Minimum erhalten wir, wenn wir f*(x) = -f(x) setzen.) Sei dazu die Menge M = {y| y=f(x), xε[a; b]} = f([a; b]) das Bild des Intervalls [a; b] unter der Funktion f(x). Wir bilden das Supremum der Menge M als S = sup M. Das Supremum s ist notwendigerweise reellwertig, da im entgegengesetzten Fall S = +∞ es eine monoton steigende, divergente Folge $\{y_n\}$ mit y_n -> +∞ und nur divergenten Teilfolgen geben würde, zu der es aber eine beschränkte Folge $\{x_n\}$ im Intervall [a; b] mit $f(x_n) = y_n$ gibt, die nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge { x_{n_k} } besitzt mit: $\lim\limits_{k->\infty} x_{n_k} = x_0$ => $\lim\limits_{k->\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k->\infty} f(x_{nk}) = f(\lim\limits_{k->\infty} x_{nk}) = f(x_0) = y_0$ aufgrund der Stetigkeit von f(x); der Grenzwert y_0 ist aber reell, was der Divergenz der Folge $\{y_n\}$ widerspricht.
Mit dem somit reellwertigen Supremum S der Menge M betrachten wir nun Folgen $\{y_n\}$ in M, die gegen S konvergieren, d.h. mit: $\lim\limits_{n->\infty} y_n = S$. Die zugehörige Folge $\{x_n\}$ im Intervall [a; b] mit $f(x_n) = y_n$ ist beschränkt und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge { x_{n_k} }, so dass gilt: $\lim\limits_{k->\infty} x_{n_k} = x_0$ => $\lim\limits_{k->\infty} f(x_{nk}) = f(\lim\limits_{k->\infty} x_{nk}) = f(x_0) = S$ aufgrund der Stetigkeit von f(x). Es gibt also ein x_0ε[a; b] mit $f(x_0)$ = SεM, so dass das Supremum der Menge Maximum der Funktion f(x) ist, die somit an der Stelle x_0 ihr Maximum annimmt.

c) Zur differenzierbaren Funktion f: D_f -> **R** betrachten wir eine Stelle x_0εD_f. Wegen der Differenzierbarkeit existiert der Grenzwert:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) .$$

Für eine beliebige Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq x_0$ für alle nε**N** und dem Grenzwert $\lim\limits_{n->\infty} x_n = x_0$ ist die Folge des Differenzenquotienten $d_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ aufgrund der Existenz der Ableitung ebenfalls konvergent mit Grenzwert $f'(x_0)$. Die Folge $\{d_n\}$ ist mithin beschränkt, so dass $|d_n| < S$ mit S > 0 für alle nε**N** gilt. Es ergibt sich:

$|d_n| = \left| \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| < S$ => $|f(x_n) - f(x_0)| < S\cdot|x_n - x_0|$.

Da $\lim\limits_{n->\infty} x_n = x_0$ gilt, folgt:

$0 \leq \lim\limits_{n->\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \leq S\cdot \lim\limits_{n->\infty} |x_n - x_0| = S\cdot| \lim\limits_{n->\infty} x_n - x_0| = S\cdot|x_0 - x_0| = S\cdot 0 = 0$.

Damit ist wegen:

$0 = \lim\limits_{n->\infty} |f(x_n) - f(x_0)| = | \lim\limits_{n->\infty} f(x_n) - f(x_0)|$ => $\lim\limits_{n->\infty} f(x_n) - f(x_0) = 0$ => $\lim\limits_{n->\infty} f(x_n) = f(x_0)$

die Stetigkeit der Funktion f(x) an der Stelle x_0 gezeigt.

d) Aus einer in ihrem Definitionsbereich D_f stetigen Funktion f(x) wird die Integralfunktion der oberen Grenze F(x) = $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ auf dem Intervall [a; x] ⊂ D_f gebildet. Wir bilden zu F(x) den Differenzenquotienten an der Stelle x_0ε[a; x]:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{I_a(x_0 + h) - I_a(x_0)}{h} = \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}$$

(u.a. gemäß den Regeln für die Integrationsgrenzen a, x_0, x_0+h). Im Intervall [x_0; x_0+h] nimmt nun die stetige Funktion f(x) ihr Maximum M(h) und ihr Minimum m(h) an. Damit gilt im x-y-Koordinatensystem und bzgl. des Graphen der Funktion f(x), dass auf dem Intervall [x_0; x_0+h] die Fläche zwischen Funktion und x-Achse Teil des Rechtecks mit den Seitenlängen M(h) und h ist und selbst das Rechteck mit den Seitenlängen m(h) und h enthält. Es gelten damit die Abschätzungen:

$$m(h) \cdot h \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \le M(h) \cdot h\,,$$

so dass Division mit h ergibt:

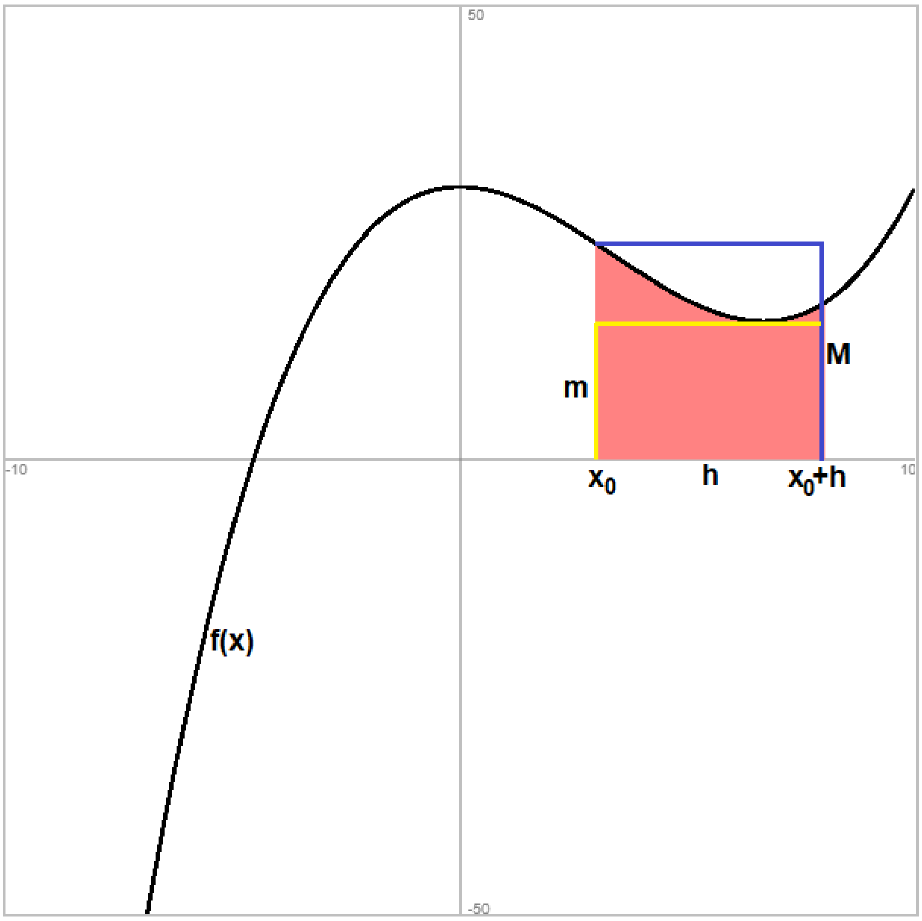
$$m(h) \le \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \le M(h)\,.$$

Beim Grenzübergang h -> 0 nähern sich m(h) und M(h) dem Funktionswert f(x_0). Somit haben wir:

$$\lim_{h->0} m(h) \le \lim_{h->0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \le \lim_{h->0} M(h) \;=>\; f(x_0) \le \lim_{h->0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} \le f(x_0) \;=>\; \lim_{h->0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = f(x_0)$$

und weiter wegen: $F'(x_0) = \lim_{h->0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h->0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}$:

$F'(x_0) = f(x_0)$,
was zu beweisen war.



(**R** = Menge der reellen Zahlen; Beweise u.a. nach: DEITMAR, A., Analysis (= Springer Spektrum), Berlin-Heidelberg [2]2017, S.53f, 79ff, 101, 128)

www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1794