Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Beweise: Eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades mit positiver 1. Ableitung besitzt genau eine Nullstelle.

Lösung: I. Für eine ganz rationale Funktion $f(x) = a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ mit Grad n gilt hinsichtlich des Verhaltens für betragsmäßig große x:

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

II. Besitzt eine auf ganz **R** definierte, differenzierbare Funktion f(x) eine positive 1. Ableitung f'(x), dann ist f(x) überall streng monoton steigend, d.h. es gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ für reelle Zahlen x_1, x_2.

III. Es gilt der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen: Eine auf dem (kompakt-) abgeschlossenen Intervall [a; b] definierte stetige Funktion f(x) nimmt jedes y mit $f(a)\le y\le f(b)$ bzw. $f(b)\le y\le f(a)$ an mindestens einer Stelle $x_0 \varepsilon [a; b]$ mit $f(x_0) = y$ an.

IV. Die ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades habe die Funktionsgleichung:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a\neq 0$, b, c, d reell.

Die 1. Ableitung $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ist laut Voraussetzung für alle reellen x positiv, also:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c > 0$.

Der Koeffizient a muss dann positiv sein, denn bei einem negativen a würde für betragsmäßig große x gelten:

$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to -\infty$,

was der vorausgesetzten Positivität der 1. Ableitung widerspricht. Aus $f'(x) > 0$ folgt außerdem, dass die Funktion f(x) auf den ganzen reellen Zahlen streng monoton steigend ist.

V. Mit a > 0 ergibt sich hinsichtlich des Verhaltens für betragsmäßig große x:

$x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$; $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$.

Es gibt damit reelle Zahlen a, b mit a < b sowie f(a) < 0 und f(b) > 0, so dass es nach dem Zwischenwertsatz für differenzierbare (und somit stetige) Funktionen auf dem Intervall [a; b] eine Nullstelle x_0 mit $f(x_0) = 0$ gibt. Die ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades hat damit mindestens eine Nullstelle.

VI. Wir zeigen nun noch, dass die Funktion genau eine Nullstelle hat, indem wir die Annahme, dass f(x) zwei Nullstellen besitzt, zum Widerspruch führen. Seien also x_1, x_2 zwei reelle Nullstellen von f(x) mit: $x_1 < x_2$ und: $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Wegen der schon gezeigten steigenden Monotonie der Funktion f(x) folgt aber: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, so dass insgesamt gilt:

$0 = f(x_1) < f(x_2) = 0 \Rightarrow 0 < 0$,

was einen Widerspruch darstellt. Somit besitzt die Funktion f(x) genau eine Nullstelle, was zu beweisen war.

(**R** = Menge der reellen Zahlen)

www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1796