Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweise

Aufgabe: Beweise: Wird eine ganz rationale Funktion f(x) n. Grades über ein zu x = 0 symmetrischem Integrationsbereich integriert, so können bei der Integration bei der Funktion f(x) die Summanden aus Potenzen mit ungeraden Hochzahlen weggelassen werden.

Lösung: I. Wir zeigen zunächst für das Intervall [-a; a] als Integrationsbereich und die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit n als ungerader natürlicher Zahl, dass das entsprechende Integral verschwindet:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{n+1}a^{n+1} - \frac{1}{n+1}(-a)^{n+1} = \frac{1}{n+1}a^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1} = 0$$

auf Grund der Tatsache, dass n+1 eine gerade natürliche Zahl ist und somit die Potenz- und Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ zur y-Achse symmetrisch ist.

II. Allgemein sei $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ eine ganz rationale Funktion vom Grad $n\varepsilon\mathbf{N}$. Wir unterteilen die Funktion f(x) in einen geraden und ungeraden Anteil mit $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ und: $f_g(x) = a_{2k}x^{2k}+a_{2k-2}x^{2k-2}+\ldots+a_0$, $k = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, $f_u(x) = a_{2k-1}x^{2k-1}+a_{2k-3}x^{2k-3}+\ldots+a_1x$, $k = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$. Dann gilt auch gemäß I. für das entsprechende Integral:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a}(f_g(x)+f_u(x))dx = \int_{-a}^{a} f_g(x)dx + \int_{-a}^{a} f_u(x)dx =$$

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)dx + \int_{-a}^{a}(a_{2k-1}x^{2k-1}+....+a_1x)dx = \int_{-a}^{a} f_g(x)dx + \left[\frac{a_{2k-1}}{2k}x^{2k}+\ldots+\frac{a_1}{2}x^2\right]_{-a}^{a} \overset{I.}{=}$$

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)dx + 0 = \int_{-a}^{a} f_g(x)dx.$$

Das heißt aber: Für den Wert des Integrals $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ sind in der ganz rationalen Funktion f(x) nur die Summanden aus Potenzen mit geraden Hochzahlen relevant.

III. Wir fügen noch Beispiele an:

a) $\int_{-5}^{5}\frac{1}{8}x^3dx = 0$ (auf Grund der Überlegungen in I.).

b) $\int_{-2}^{2}(x^2-2x+8)dx = \int_{-2}^{2}(x^2+8)dx = 2\cdot\int_{0}^{2}(x^2+8)dx = 2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3+8x\right]_0^2 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$ (auf Grund der Überlegungen in II. und der y-Achsensymmetrie der Teilfunktion $y = x^2+8$).

(**N** = Menge der natürlichen Zahlen, $\lfloor . \rfloor$ = Gaußklammer)

www.michael-buhlmann.de / 04.2023 / Aufgabe 1833