Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Beweise: Ist eine nicht konstante, überall differenzierbare Funktion f(x) zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems achsensymmetrisch und an der Stelle x = 0 definiert, so besitzt die Funktion auf der y-Achse einen Extrempunkt.

Gehe dazu wie folgt vor:

1) Zeige, dass die Ableitungsfunktion zum Ursprung des x-y-Koordinatensystems symmetrisch ist.
2) Weise für die Ableitungsfunktion eine Nullstelle bei x = 0 mit Vorzeichenwechsel nach.

Lösung: I. Bekanntlich ist eine Funktion f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems (gerade), wenn gilt:

$$f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in D_f,$$

punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems (ungerade), wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in D_f.$$

II. Die Funktion f(x) sei differenzierbar und zur y-Achse achsensymmetrisch. Es ist wegen der vorausgesetzten Achsensymmetrie der Funktion f(x): f(-x) = f(x), f(-x-h) = f(-(x+h)) = f(x+h) für alle $x \in D_f$, h reell. Dann gilt für den Differenzenquotienten und die Ableitung an einer Stelle x:

$$f'(-x) = \lim_{h->0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = \lim_{h->0} \frac{f(x+h) - f(x)}{-h} = -\lim_{h->0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x),$$

d.h.: die Ableitungsfunktion f'(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

III. Die Funktion f(x) sei differenzierbar und zur y-Achse achsensymmetrisch. Wir betrachten die Ableitung an der Stelle x = 0 und verweisen auf die Punktsymmetrie der Ableitungsfunktion f'(x) zum Ursprung des Koordinatensystems. Dann ist: f'(0) = 0 auf Grund von:

$f'(0) = -f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2 \cdot f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0.$

An der Stelle x = 0 besitzt also die zur y-Achse achsensymmetrische Funktion f(x) eine waagerechte Tangente. Wegen der Punktsymmetrie muss zudem die Ableitung f'(x) eine Nullstelle x = 0 (f'(0) = 0) mit Vorzeichenwechsel besitzen, denn aus der Nichtkonstanz der achsensymmetrischen Funktion f(x) folgt auch die der Ableitung f'(x), so dass es auf der x-Achse in der Umgebung von x = 0 eine Stelle $x_1 \neq 0$ mit $f'(x_1) > 0$ und daher mit: $f'(-x_1) = -f'(x_1) < 0$; die Umgebung von x = 0 stellt sich dabei dar als Intervall (-a; a) (a>0), das außer bei x = 0 keine Stellen mit waagerechter Tangente enthält (ein solches Intervall existiert wegen der Differenzierbarkeit von f(x) an der Stelle x=0).

Alles in allem bedeutet das die Existenz eines Extrempunktes (Hoch-, Tiefpunkt) der Funktion f(x) auf der y-Achse.

www.michael-buhlmann.de / 05.2023 / Aufgabe 1876