Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Leite für eine differenzierbare Funktion f(x) und eine definierte Stelle x_0 aus der Geradengleichung y = mx + c die Tangentenformel:

$$t: y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

her.

Lösung: Für eine Stelle x_0 liegt der Punkt $P(x_0|f(x_0))$ auf dem Graphen der vorgegebenen differenzierbaren Funktion f(x). Die Tangente ist die Gerade durch den Punkt P an die Funktion f(x), wo die Funktionswerte von Funktion f(x) und Gerade sowie der Wert der Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f(x) und die Geradensteigung übereinstimmen. Der Punkt P ist damit Berührpunkt zwischen Funktion und Tangente.
Zur Funktion f(x) betrachten wir deren 1. Ableitung f'(x) und bilden den Funktionswert $f(x_0)$ und den Wert der Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0. Es werde zudem die Tangente durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an die Funktion f(x) beschreiben durch die Geradengleichung: t: y = mx + c. Wegen $P(x_0|f(x_0))$ als Berührpunkt folgt dann:

$f'(x_0) = m$ (Übereinstimmung von Ableitung und Tangentensteigung),

so dass die Geradengleichung zu

$t: y = f'(x_0)x + c$

wird. Zur Bestimmung von c setzen wir den Berührpunkt $P(x_0|f(x_0))$ mit $x = x_0$, $y = f(x_0)$ in die Geradengleichung ein (Punktprobe):

$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + c$ (Übereinstimmung der Funktionswerte).

Umstellen der Gleichung nach c ergibt:

$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + c \qquad | -f'(x_0)x_0$
$f(x_0) - f'(x_0)x_0 = c$.

Der Term für c ist in die Tangentengleichung $t: y = f'(x_0)x + c$ statt c einzusetzen:

$t: y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Umstellen ergibt die nachzuweisende <u>Tangentenformel</u>:

$t: y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

www.michael-buhlmann.de / 10.2023 / Aufgabe 1901