Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Bekanntlich ist eine Funktion f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems (gerade), wenn gilt:

$$f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \varepsilon D_f,$$

punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems (ungerade), wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \varepsilon D_f.$$

Beweise:

Ist eine auf D_f differenzierbare Funktion f(x) zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist deren Ableitung punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. achsensymmetrisch zur y-Achse (Symmetriewechsel beim Ableiten).

Lösung: I. Die Funktion f(x) sei differenzierbar und zur y-Achse achsensymmetrisch. Es ist wegen der vorausgesetzten Achsensymmetrie der Funktion f(x): f(-x) = f(x). Dann folgt für f(x) als 1. Ableitung: f'(x), für f(-x) nach der Kettenregel (äußere Funktion f(.), innere Funktion -x) als 1. Ableitung: $f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x)$ (äußere Ableitung mal innere Ableitung). Beide Ableitungen sind gleich, so dass gilt:

$f'(x) = -f'(-x)$ [$\Leftrightarrow -f'(x) = f'(-x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$].

D.h.: die Ableitungsfunktion f'(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

II. Die Funktion f(x) sei differenzierbar und zum Ursprung punktsymmetrisch. Es ist wegen der vorausgesetzten Punktsymmetrie der Funktion f(x): f(-x) = -f(x). Dann folgt für -f(x) als 1. Ableitung: -f'(x), für f(-x) nach der Kettenregel (äußere Funktion f(.), innere Funktion -x) als 1. Ableitung: $f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x)$ (äußere Ableitung mal innere Ableitung). Beide Ableitungen sind gleich, so dass gilt:

$-f'(x) = -f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) = f'(-x)$.

D.h.: die Ableitungsfunktion f'(x) ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

www.michael-buhlmann.de / 11.2023 / Aufgabe 1914