Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Lege dar, wie man bei einer ganz rationalen Funktion f(x) 3. Grades die maximal zwei weiteren Nullstellen ermitteln kann, wenn man von einer Nullstelle x_0 weiß (mit $f(x_0) = 0$).

Lösung: I. Allgemein gilt die folgende Beobachtung: Ganz rationale Funktionen f: **R** -> **R** sind von der Form:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit den reellen Zahlen $a_0, \ldots a_n$, $a_n \neq 0$, und $n \varepsilon \mathbf{N}$ als Grad des Polynoms. Nullstellen heißen die Schnittpunkte des Graphen der ganz rationalen Funktion f(x) mit der x-Achse; für Nullstellen x_0 gilt also die (Polynom-) Gleichung: $f(x_0) = 0$. Ist x_0 eine Nullstelle der ganz rationalen Funktion f(x), so folgt:

$$f(x_0) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + \ldots + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = 0.$$

Daraus ergibt sich für die („gegen die Nullstelle verschobene“) Funktion $h(x) = f(x+x_0)$ und nach dem binomischen Lehrsatz:

$$h(x) = f(x+x_0) = a_n(x+x_0)^n + a_{n-1}(x+x_0)^{n-1} + a_{n-2}(x+x_0)^{n-2} + \ldots + a_2(x+x_0)^2 + a_1(x+x_0) + a_0 =$$

$$a_n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^ix_0^{n-i} + a_{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^ix_0^{n-1-i} + a_{n-2}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}x^ix_0^{n-2-i} + \ldots + a_2(x^2+2xx_0+x_0^2) + a_1(x+x_0) + a_0 =$$

$$a_n\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^ix_0^{n-i} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^ix_0^{n-1-i} + a_{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}x^ix_0^{n-2-i} + \ldots + a_2(x^2+2xx_0) + a_1x + a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + \ldots + a_2x_0^2) + a_1x_0 + a_0 =$$

$$a_n\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^ix_0^{n-i} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^ix_0^{n-1-i} + a_{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}x^ix_0^{n-2-i} + \ldots + a_2(x^2+2xx_0) + a_1x + 0 =$$

$$a_n\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^ix_0^{n-i} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^ix_0^{n-1-i} + a_{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}x^ix_0^{n-2-i} + \ldots + a_2(x^2+2xx_0) + a_1x =$$

$$\left(a_n\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{i-1}x_0^{n-i} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{i-1}x_0^{n-1-i} + a_{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-2}{i}x^{i-1}x_0^{n-2-i} + \ldots + a_2(x+2x_0) + a_1\right)x = x\cdot h_1(x).$$

Die Funktion h(x) lässt sich damit durch Ausklammern von x als Produkt $x\cdot h_1(x)$ darstellen mit $h_1(x)$ als ganz rationale Funktion mit Grad n-1. Hinsichtlich der Nullstellen von h(x) gilt dann:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ h_1(x) = 0.$$

Sind dann x_1, x_2, … Nullstellen der (auf Grund des um 1 verringerten Grades und daher leichter zu berechnenden) Funktion $h_1(x)$, so ergeben sich daraus als Nullstellen für die Funktion f(x):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0+x_0 = x_0,\ x = x_1+x_0,\ x = x_2+x_0,\ \ldots$$

II. Für eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades gelingt mit der Vorgehensweise gemäß I. die Rückführung auf eine quadratische Funktion, deren Nullstellen leicht und immer bestimmbar sind. Es ist:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

und x_0 eine Nullstelle von f(x) mit $f(x_0) = a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = 0$. Damit folgt für $h(x) = f(x+x_0)$:

$$\begin{gathered}
h(x) = a_3(x+x_0)^3 + a_2(x+x_0)^2 + a_1(x+x_0) + a_0 = a_3(x^3+3x^2x_0+3xx_0^2+x_0^3) + a_2(x^2+2xx_0+x_0^2) + a_1(x+x_0) + a_0 = \\
a_3(x^3+3x^2x_0+3xx_0^2) + a_3x_0^3 + a_2(x^2+2xx_0) + a_2x_0^2 + a_1x + a_1x_0 + a_0 = \\
a_3(x^3+3x^2x_0+3xx_0^2) + a_2(x^2+2xx_0) + a_1x + a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = \\
a_3(x^3+3x^2x_0+3xx_0^2) + a_2(x^2+2xx_0) + a_1x + 0 = \\
a_3(x^3+3x^2x_0+3xx_0^2) + a_2(x^2+2xx_0) + a_1x = \\
[a_3(x^2+3xx_0+3x_0^2) + a_2(x+2x_0) + a_1]x = \\
[a_3x^2 + (3a_3x_0+a_2)x + (3a_3x_0^2+2a_2x_0+a_1)]x = x \cdot h_1(x)
\end{gathered}$$

mit: $h_1(x) = a_3x^2 + (3a_3x_0+a_2)x + (3a_3x_0^2+2a_2x_0+a_1)$ als quadratische Funktion. Die Nullstellen von $h_1(x)$ lassen sich dann (wenn existent) ermitteln zu x_1, x_2, so dass für die Nullstellen von f(x) folgt:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0,\ x = x_1+x_0,\ x = x_2+x_0.$$

III. Wir fügen noch ein Beispiel an. Es sei gegeben: $f(x) = x^3 - 7x + 6$ mit Nullstelle $x_0 = 1$. Wir bilden die Funktion h(x) als:

$h(x) = f(x+x_0) = f(x+1) = (x+1)^3 - 7(x+1) + 6$

und wenden den binomischen Lehrsatz an:

$h(x) = (x+1)^3 - 7(x+1) + 6 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 7x - 7 + 6 = x^3 + 3x^2 - 4x.$

Nullsetzen der Funktion h(x) bei Ausklammern von x und Anwendung des Satzes vom Nullprodukt ergibt:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 0,\ x_1 = -4,\ x_2 = 1.$$

Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 7x + 6$ sind daher:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0+1 = 1,\ x = -4+1 = -3,\ x = 1+1 = 2 \Leftrightarrow x = -3,\ x = 1,\ x = 2.$

www.michael-buhlmann.de / 02.2024 / Aufgabe 2017