

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Spiegelungen

Aufgabe: Die Exponentialfunktion $f(x) = 8 - 2e^{-0,5x}$ soll an der Geraden $y = 2$ gespiegelt werden. Wie lautet die gespiegelte Funktion?

Lösung: I. Allgemein gilt für Spiegelungen einer Funktion $f(x)$ an einer zur x -Achse parallelen Geraden $y = a$ (a reelle Zahl), dass für jedes $x \in D_f$ (als [maximaler] Definitionsbereich von $f(x)$) und mit $f^*(x)$ als gespiegelte Funktion gelten muss:

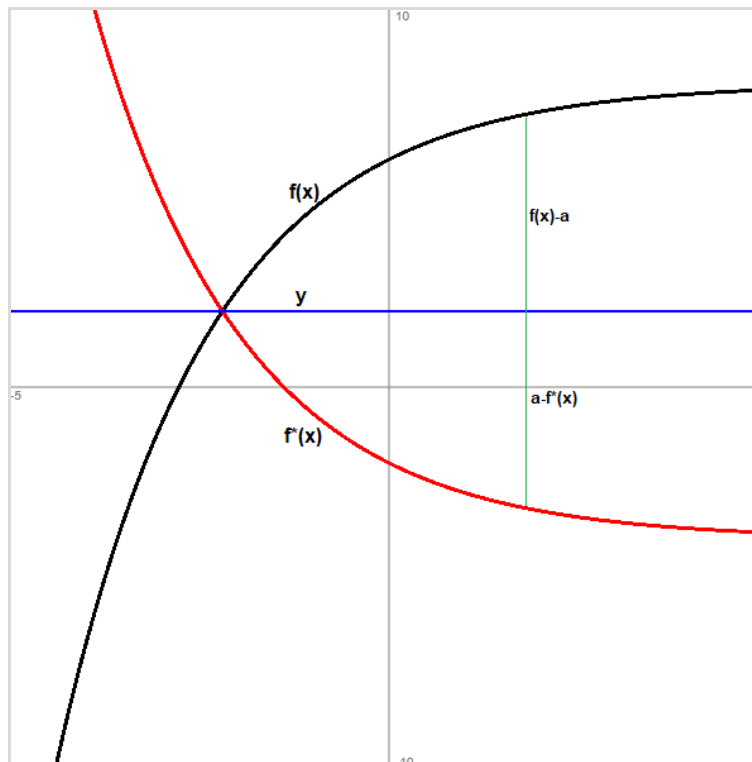
$$f(x) - y = y - f^*(x) \quad (*)$$

(siehe Abbildung). Die Gleichung $(*)$ lässt sich wie folgt nach $f^*(x)$ umstellen:

$f(x) - y = y - f^*(x)$	$y = a$
$f(x) - a = a - f^*(x)$	$-a$
$f(x) - 2a = -f^*(x)$	$\cdot (-1)$
$-f(x) + 2a = f^*(x)$	(Umstellen)
$2a - f(x) = f^*(x)$.	

Es gilt damit die Spiegelformel für gespiegelte Funktionen:

$$f^*(x) = 2a - f(x) \quad (**).$$



II. Mit $f(x) = 8 - 2e^{-0,5x}$ und $y = 2$ bei $a = 2$ erhalten wir sofort gemäß $(**)$ die gespiegelte Funktion $f^*(x)$ als:

$$f^*(x) = 2 \cdot 2 - (8 - 2e^{-0,5x}) = 4 - 8 + 2e^{-0,5x} = -4 + 2e^{-0,5x}.$$

Zur Funktion $f(x) = 8 - 2e^{-0,5x}$ lautet also die um die Gerade $y = 2$ gespiegelte Funktion:

$$f^*(x) = -4 + 2e^{-0,5x}.$$